ЛЕКЦИЯ №2

КИНЕМАТИКА

Глава I
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1.6. Ускорение точки

Предположим, что в момент времени t скорость точки равна $\vec{v}_1 = \vec{v}\left(t\right)$, а в момент времени $t + \Delta t$ будет $\vec{v}_2 = \vec{v}\left(t + \Delta t\right)$ (рис. 1.18).

Изменение вектора скорости за промежуток времени Δt найдем как разность векторов $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$, если параллельно перенесем вектор $\vec{v}_2$ в точку M_1 (рис. 1.18). Вектор

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}\left(t + \Delta t\right) - \vec{v}\left(t\right),$$

представляет собой приращение вектора скорости за промежуток времени Δt.

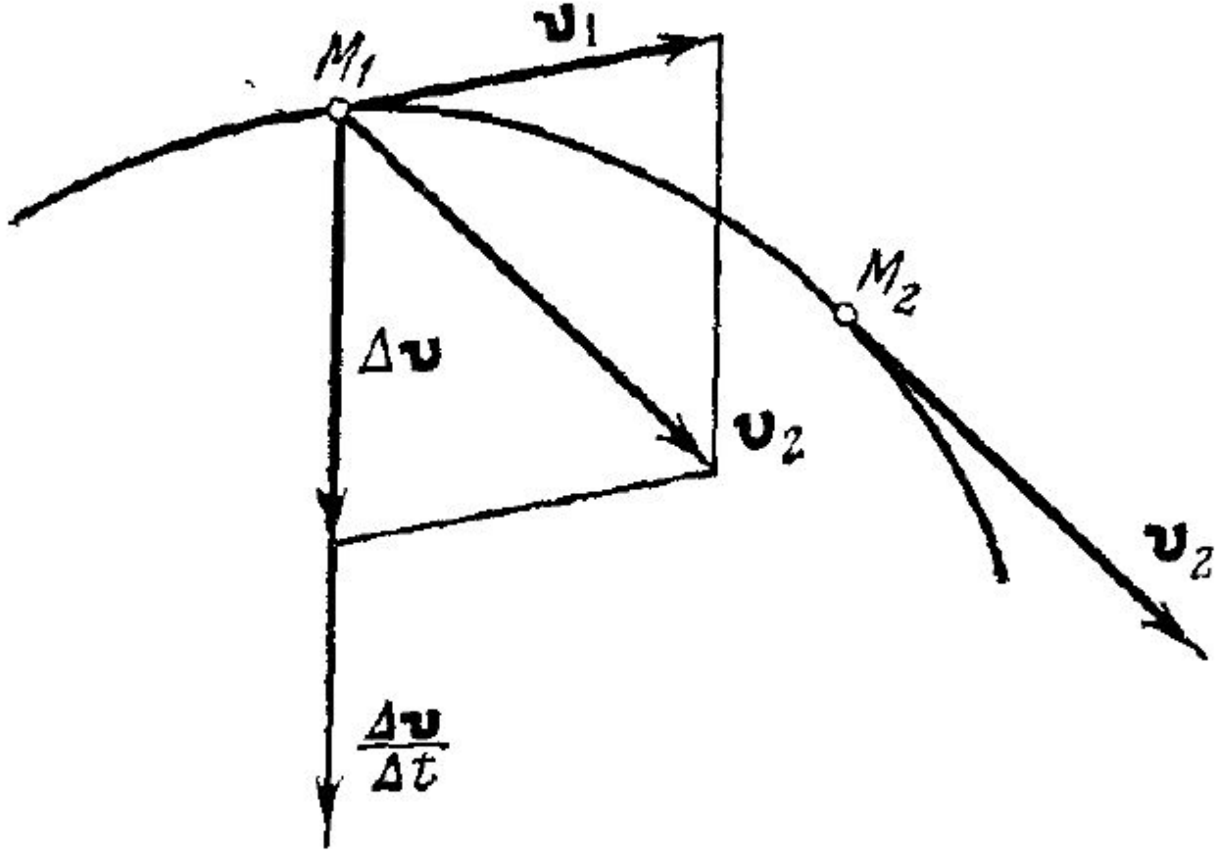

Рис. 1.18

Отношение вектора $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt называется ***средним ускорением точки*** *за промежуток времени Δt:*

$$\vec{w}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Ускорением $\vec{w}$ ***точки*** *в данный момент времени называется предел отношения приращения стрости $\Delta\vec{v}$ к приращению времени Δt при условии, что последнее стремится к нулю, т.е.*

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \qquad (1.21)$$

так как $\vec{v} = d\vec{r} \,/\, dt$. Можно также пользоваться следующей формой записи: $\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Следовательно, ускорение точки в данный момент времени равно первой производной по времени от вектора скорости точки или второй производной по времени от радиуса-вектора точки.

Годографом скорости называется кривая, которую вычерчивает конец вектора скорости при движении точки, если вектор скорости проводится из одной и той же точки (рис. 1.19).

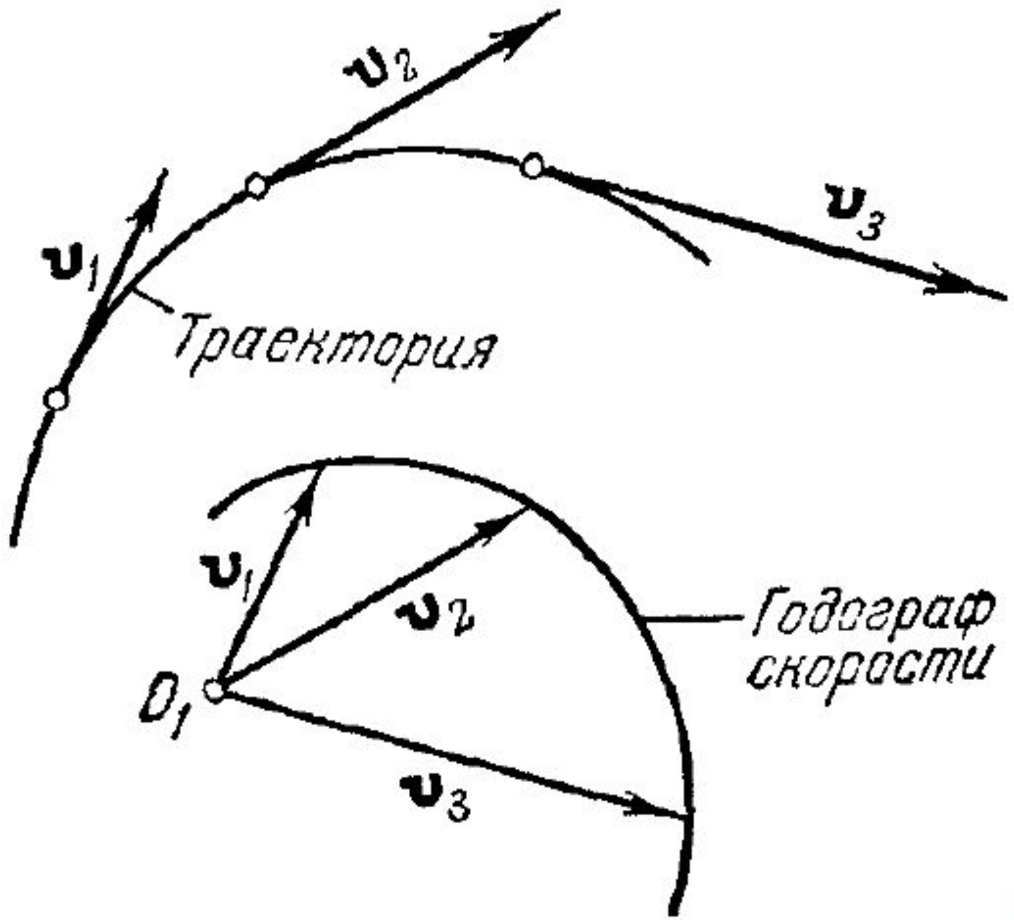

Рис. 1.19.

Очевидно, что скорость точки, вычерчивающей годограф скорости, будет равна $\vec{w} = \dot{\vec{v}}$, т.е. ускорению точки при ее движении по траектории. Размерность ускорения

$$[w] = \frac{[\text{скорость}]}{[\text{время}]} = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]^2} = \frac{L}{T^2}.$$

Единицами измерения могут быть м / с^2, см / с^2.

Нахождение ускорения при координатном способе задания движения. Пусть движение точки задано в прямоугольной системе координат:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Так как вектор скорости точки можно представить в виде

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

то на основании (1.21) будем иметь

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}.$$

Пусть w_x, w_y, w_z – проекции ускорения на координатные оси x, y, z; тогда

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad w_z = \frac{dv_z}{dt}, \tag{1.22}$$

т.е. проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей проекции скорости точки.

Выражения (1.22) на основании (1.12) можно переписать в виде

$$w_x = \ddot{x}, \qquad w_y = \ddot{y}, \qquad w_z = \ddot{z}. \tag{1.23}$$

Следовательно, проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты.

Модуль ускорения определяется по формуле

$$\left|\vec{w}\right| = w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (1.24)$$

Зная проекции ускорения и его модуль, легко находим направляющие косинусы вектора ускорения:

$$\cos\left(x, \vec{w}\right) = \frac{w_x}{w} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}},$$

$$\cos\left(y, \vec{w}\right) = \frac{w_y}{w} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \qquad (1.25)$$

$$\cos\left(z, \vec{w}\right) = \frac{w_z}{w} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}.$$

Найдем теперь ускорение в полярных координатах. Пусть координаты точки заданы как функции времени

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$

Согласно выражения для скорости в полярной системе координат

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{r}^{\,0} + \vec{r}\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}^{\,0}.$$

На основании определения ускорения получим

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\vec{r}^{\,0} + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{r}^{\,0}}{dt} + \\ + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{p}^{\,0} + \vec{r}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{p}^{\,0} + \vec{r}\,\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{p}^{\,0}}{dt},$$

но так как

$$\frac{d\vec{r}^{\,0}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{p}^{\,0}, \qquad \frac{d\vec{p}^{\,0}}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{r}^{\,0},$$

то
$$\vec{w} = \left(\ddot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}^{\,0} + \left(\vec{r}\ddot{\varphi} + 2\dot{\vec{r}}\dot{\varphi}\right)\vec{p}^{\,0}.$$

Отсюда находим проекции ускорения на радиальное и поперечное направления

$$\vec{w}_r = \ddot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{\varphi}^2, \qquad \vec{w}_p = \vec{r}\ddot{\varphi} + 2\dot{\vec{r}}\dot{\varphi}. \tag{1.26}$$

Модуль и направление вектора ускорения определяются по формулам

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2},$$

$$\cos\left(\vec{r}^{\,0}, \vec{w}\right) = \frac{w_r}{w}, \qquad \cos\left(\vec{p}^{\,0}, \vec{w}\right) = \frac{w_p}{w}.$$

Нахождение ускорения при естественном способе задания движения. Предварительно познакомимся с необходимыми сведениями из дифференциальной геометрии. Рассмотрим пространственную кривую. Пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной, проведенной в какой-либо точке M этой кривой (рис. 1.20). Возьмем теперь па кривой точку M_1, близкую к точке M, и обозначим единичный вектор касательной в этой точке через $\vec{\tau}_1$. Параллельно перенеся вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M, проведем плоскость через векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$, приложенные в точке M.

При стремлении точки M_1 к точке M эта плоскость в пределе займет определенное положение. Полученную таким образом плоскость называют ***соприкасающейся*** плоскостью в точке M. Отмстим, что если рассматриваемая кривая плоская, то она целиком будет расположена в соприкасающейся плоскости.

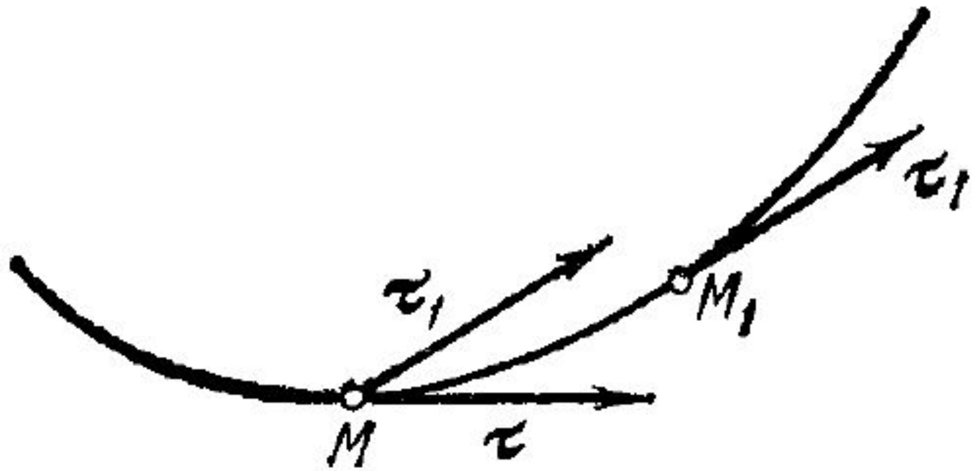

Рис. 1.20.

Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно касательной, называют ***нормальной плоскостью***. Линия пересечения соприкасающейся и нормальной плоскостей определяет ***главную нормаль*** к кривой в точке M. Плоскость, проведенную через точку M перпендикулярно главной нормали, называют ***спрямляющей плоскостью***. На рис. 1.21 соприкасающаяся, нормальная и спрямляющая плоскости обозначены соответственно цифрами I, II и III.

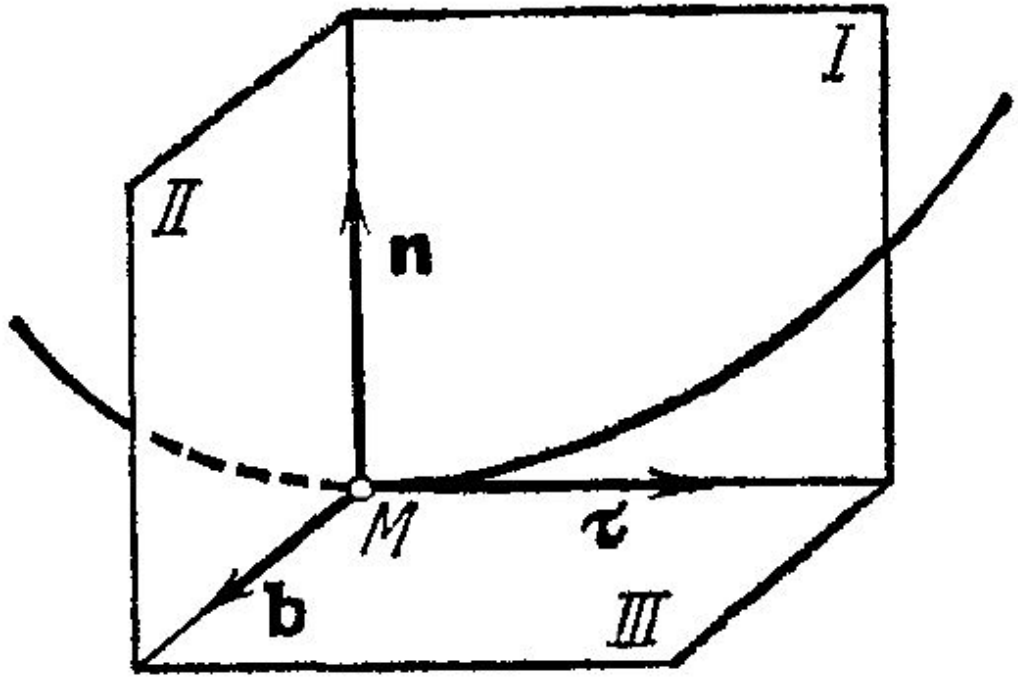

Рис. 1.21.

Линия пересечения спрямляющей и нормальной плоскостей определяет ***бинормаль*** к кривой.

Таким образом, в каждой точке кривой можно указать три взаимно перпендикулярных направления: касательной, главной нормали и бинормали. Принимая эти направления за координатные оси, введем единичные векторы этих осей.

Единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ нами уже был введен. Единичный вектор $\vec{n}$, ***направленный в сторону вогнутости кривой***, будет единичным вектором главной нормали. Направление единичного вектора бинормали $\vec{b}$ определим из требования, чтобы касательная, главная нормаль и бинормаль, направления которых определяются векторами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$, образовывали правую систему осей. *Полученный трехгранник, составленный из соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей, называется* ***естественным трехгранником***. Векторы $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ являются единичными векторами осей естественного трехгранника (рис. 1.21).

Обозначим через ε величину угла между вектором $\vec{\tau}$, проведенным в точке M, и вектором $\vec{\tau}_1$, проведенным в точке M_1, близкой к точке M. Этот угол называется ***углом смежности*** (рис. 9.22, *а*).

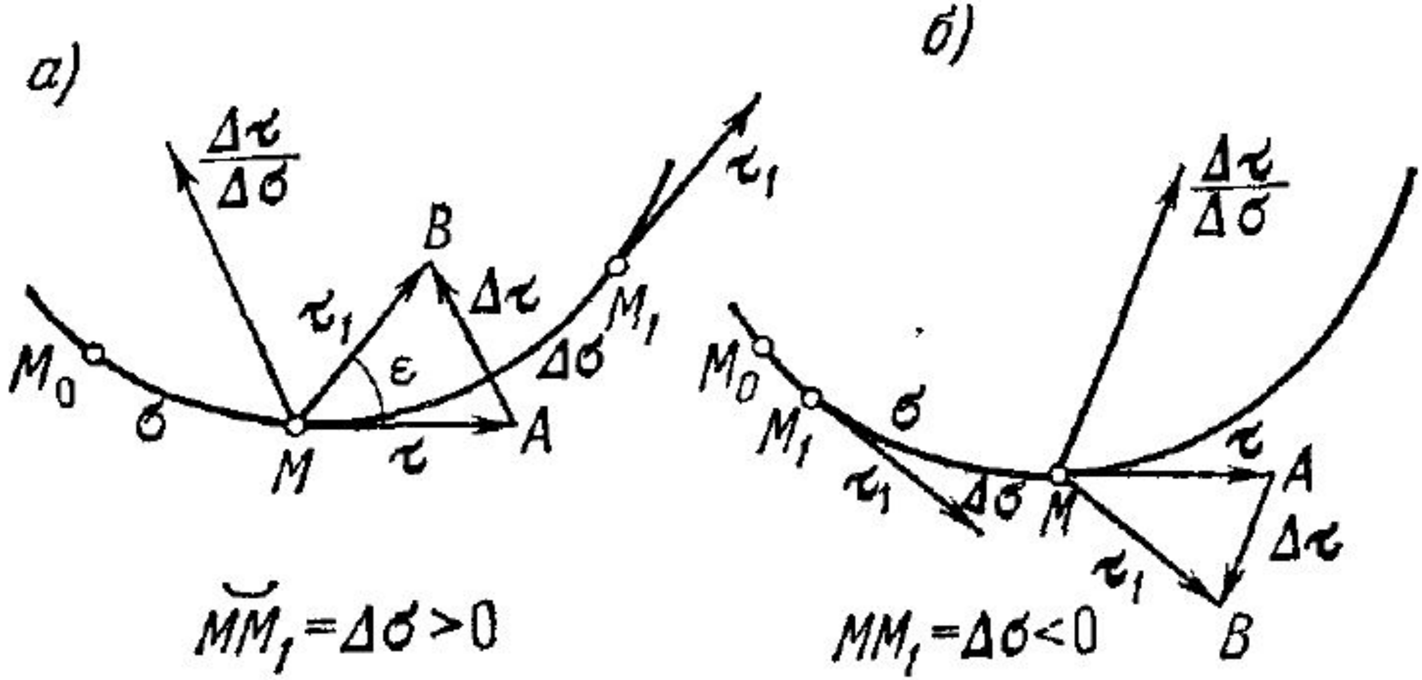

Рис. 1.22.

Кривизной кривой в точке M называют предел отношения угла смежности ε к абсолютному значению длины дуги $MM_1 = \Delta\sigma$, т.е.

$$k = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\varepsilon}{|\Delta\sigma|}. \qquad (1.27)$$

Радиусом кривизны кривой в точке M называется величина, обратная кривизне

$$\rho = 1 / k. \qquad (1.28)$$

Заметим, что кривизна прямой равна нулю, а ее радиус кривизны равен бесконечности. Кривизна окружности во всех ее точках одинакова и равна обратной величине радиуса ($k = 1/R$); радиус кривизны равен радиусу окружности ($\rho = R$).

Вектор скорости согласно выражению (1.20) можно представить в виде

$$\vec{v} = v_{\tau}\vec{\tau},$$

где v_{τ} – проекция скорости на направление $\vec{\tau}$. На основании формулы (1.21) имеем

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_{\tau}\vec{\tau}\right) = \frac{dv_{\tau}}{dt}\vec{\tau} + v_{\tau}\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.29)$$

Определим величину и направление вектора $d\vec{\tau} \,/\, dt$.

Пусть в момент времени t точка находится в положении M на траектории, а в момент времени $t + \Delta t$ – в положении M_1. Перенося вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M, найдем приращение вектора $\vec{\tau}$ за промежуток времени Δt (рис. 1.22, *а*)

$$\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}.$$

Вектор $\Delta\vec{\tau}$ при движении точки в сторону положительного отсчета дуги направлен в сторону вогнутости траектории (рис. 1.22, *а*), а при движении точки в сторону отрицательного отсчета дуги направлен в сторону выпуклости траектории (рис. 1.22, *б*).

Найдем производную вектора $\vec{\tau}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}.$$

Вектор $\Delta\vec{\tau} / \Delta\sigma$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории (см. рис. 1.22, *а* и *б*) и лежит в плоскости, проходящей через точку M и векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_1$ (плоскость MAB). Следовательно, вектор $d\vec{\tau} / d\sigma$ лежит в соприкасающейся плоскости, т.к. при $\Delta\sigma \to 0$ $(\Delta t \to 0)$ плоскость MAB совпадает с соприкасающейся плоскостью к траектории в точке M.

Дифференцируя тождество $\tau^2 = 1$ по σ, получим

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\vec{\tau} = 0,$$

т.е. скалярное произведение $\vec{\tau}$ на $d\vec{\tau} / d\sigma$ равно нулю, а это значит, что вектор $d\vec{\tau} / d\sigma$ перпендикулярен $\vec{\tau}$. Таким образом, вектор $d\vec{\tau} / d\sigma$ лежит в соприкасающейся плоскости, направлен в сторону вогнутости траектории и перпендикулярен $\vec{\tau}$; следовательно, он направлен по главной нормали к центру кривизны.

Определим теперь модуль вектора $d\vec{\tau} \,/\, d\sigma$. Из равнобедренного треугольника MAB (см. рис.9.22, а) найдем

$$AB = \left|\Delta\vec{\tau}\right| = 2\sin\left(\varepsilon \,/\, 2\right),$$

или, используя равенства (1.27) и (1.28), получим

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin\left(\varepsilon \,/\, 2\right)}{\left(\varepsilon \,/\, 2\right)}\frac{\varepsilon}{\left|\Delta\sigma\right|} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Учитывая, что $\vec{n}$ есть единичный вектор главной нормали, будем иметь

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \frac{\vec{n}}{\rho}.$$

Значит,

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v_{\tau}}{\rho}\vec{n},$$

и, следовательно,

$$\vec{w} = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}, \tag{1.30}$$

так как $v_\tau^2 = v^2$.

Из этой формулы следует, что ***вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости***.

Составляющие ускорения по направлениям $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ соответственно равны

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}, \qquad \vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Проекция ускорения на направление $\vec{\tau}$

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \qquad (1.31)$$

называется ***касательным (тангенциальным) ускорением***.

Проекция ускорения на главную нормаль

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad (1.32)$$

называется ***нормальным ускорением***.

Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Модуль вектора ускорения равен

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (1.33)$$

Касательное ускорение $w_\tau = dv_\tau / dt$ равно нулю при движении точки с постоянной по модулю скоростью и в моменты времени, в которые скорость v_τ достигает экстремальных значений.

Если v_τ и w_τ одного знака, то модуль скорости $v = \left| v_\tau \right|$ точки возрастает и движение в этом случае называется *ускоренным*. Если же v_τ и w_τ разных знаков, то модуль скорости $v = \left| v_\tau \right|$ точки убывает и движение будет *замедленным*. При $w_\tau = 0$ модуль скорости остается постоянным – *движение равномерное*.

Нормальное ускорение равно нулю при прямолинейном движении ($\rho = \infty$), в точках перегиба криволинейной траектории и в моменты времени, в которые скорость точки обращается в нуль.

Отметим, что для вычисления касательного ускорения w_τ можно использовать равенство

$$w_\tau = \vec{\tau}\vec{w} = \frac{\vec{v}\vec{w}}{v_\tau},$$

так как $\vec{\tau} = \vec{v} \,/\, v_\tau$.

Если движение точки задано координатным способом, то в случае задания движения в декартовых координатах ($x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$, $z = z\left(t\right)$) будем иметь

$$w_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

для полярных координат получим

$$w_\tau = \frac{v_r w_r + v_p w_p}{\pm\sqrt{v_r{}^2 + v_p{}^2}}.$$

§ 1.7. Частный случай движения точки

Движение точки по окружности. При движении точки по окружности удобно задать ее движение в полярных координатах, так как ори этом координата r является постоянной величиной, равной радиусу R окружности (рис. 1.24). Положение точки вполне определяется углом φ.

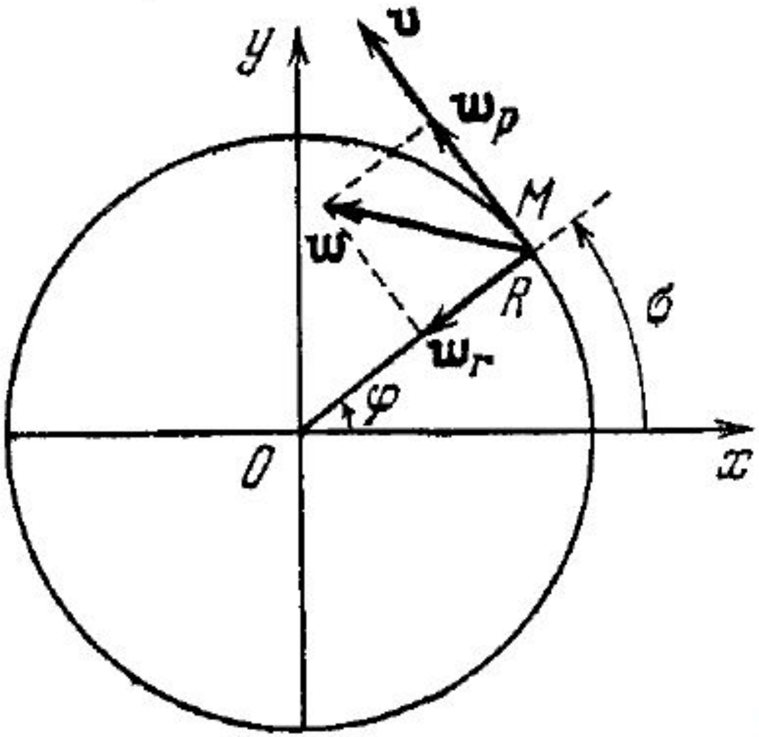

Рис. 1.24.

Так как $r = R$ – постоянная величина, то проекция скорости на радиальное направление $v_r = \dot{r} = 0$. Поперечная проекция скорости равна

$$v_p = r\dot{\varphi} = R\dot{\varphi}.$$

Модуль скорости будет

$$v = \left|v_p\right| = R\omega, \qquad \omega = \left|\varphi\right|.$$

В соответствии с формулами (9.26) проекции ускорения на радиальное и поперечное направления определяются равенствами

$$w_r = -R\omega^2, \qquad w_p = R\ddot{\varphi},$$

Модуль ускорения равен

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \qquad \varepsilon = \left|\ddot{\varphi}\right|.$$

Если выбрать направление положительного отсчета дуги, проходимой точкой, как указано на рис. 1.24, то очевидно, что касательное ускорение точки будет равно $w_\tau = R\ddot{\varphi}$, а нормальное $w_n = R\omega^2$ (***это ускорение называют центростремительным ускорением***). Заметим, что ω определяет угловую скорость вращения радиуса r, а ε – соответствующее угловое ускорение.

§ 1.8. Криволинейные координаты

Положение точки в трехмерном пространстве, как известно, можно однозначно определить тремя числами. Так, например, в декартовой системе координат такими числами будут координаты x, y и z точки, в цилиндрической и сферической системах координат такими числами соответственно будут ρ, φ, z и r, θ, φ (1.2). Очевидно, что можно ввести в рассмотрение и другие системы координат, в которых определен закон выбора трех чисел, однозначно определяющих положение любой точки. В этом параграфе мы рассмотрим так называемые ***криволинейные координаты***.

Предположим, что для однозначного определения положения любой точки нами установлен закон выбора трех чисел q_1, q_2, q_3, тем самым введена в рассмотрение определенная система координат. Эти ***числа q_1, q_2, q_3 называются криволинейными координатами***, а введенная ***система координат – криволинейной***. Пусть радиус-вектор, определяющий положение точки M, заданной координатами q_1, q_2, q_3, проведен из произвольно выбранного полюса O. Этот радиус-вектор будет функцией координат q_1, q_2, q_3:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(q_1, q_2, q_3\right). \qquad (1.38)$$

Проекции радиуса-вектора $\vec{r}$ на оси декартовой системы координат также будут функциями q_1, q_2, q_3, т.е.

$$x = x\left(q_1, q_2, q_3\right), \quad y = y\left(q_1, q_2, q_3\right), \quad z = z\left(q_1, q_2, q_3\right). \qquad (1.39)$$

Возьмем какую-либо точку M_0 с координатами q_1, q_{20}, q_{30}; тогда уравнения

$$x = x\left(q_1, q_{20}, q_{30}\right), \quad y = y\left(q_1, q_{20}, q_{30}\right), \quad z = z\left(q_1, q_{20}, q_{30}\right),$$

в которых переменной является только одна координата q_1, определяют кривую, проходящую через точку M_0. Эту кривую называют ***координатной линией***, соответствующей изменению координаты q_1. Аналогично определяются координатные линии, соответствующие изменению q_2 и q_3.

Касательные к координатным линиям, проведенные в точке M_0 в сторону возрастания соответствующих координат, называются ***координатными осями*** $\left[q_1\right], \left[q_2\right], \left[q_3\right]$ (рис. 1.31).

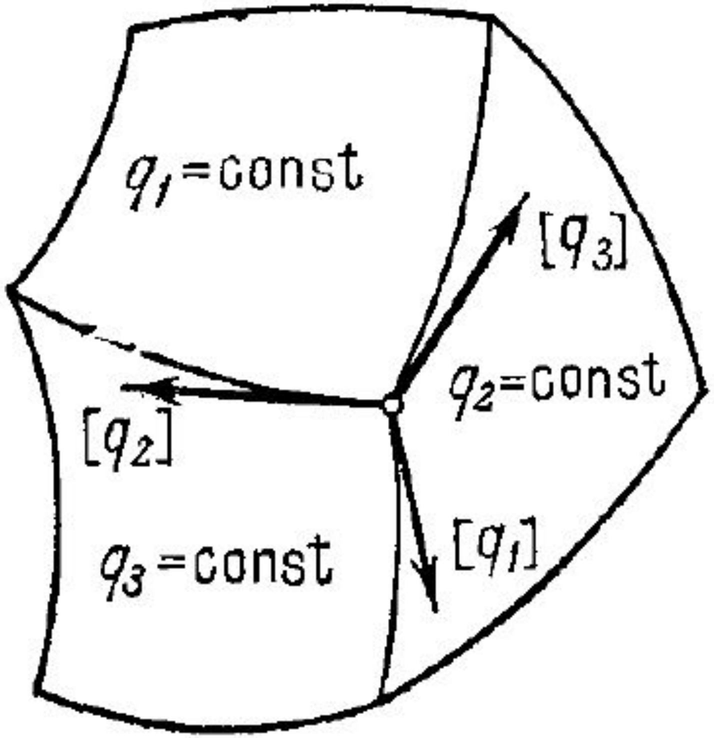

Рис. 1.31.

Координатными поверхностями называются поверхности, определяемые уравнениями (1.39) при изменении двух координат и при одной фиксированной координате. Так, например, поверхность $\left(q_1, q_2\right)$ определяется следующими уравнениями:

$$x = x\left(q_1, q_2, q_{30}\right), \quad y = y\left(q_1, q_2, q_{30}\right), \quad z = z\left(q_1, q_2, q_{30}\right).$$

Касательные плоскости, проведенные в точке M_0 к координатным поверхностям, называются ***координатными плоскостями***.

Определим теперь единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ координатных осей. Рассмотрим движение точки по координатной линии, соответствующей изменению координаты q_1. Пусть в момент времени t точка находится в положении M_0 (рис. 1.32).

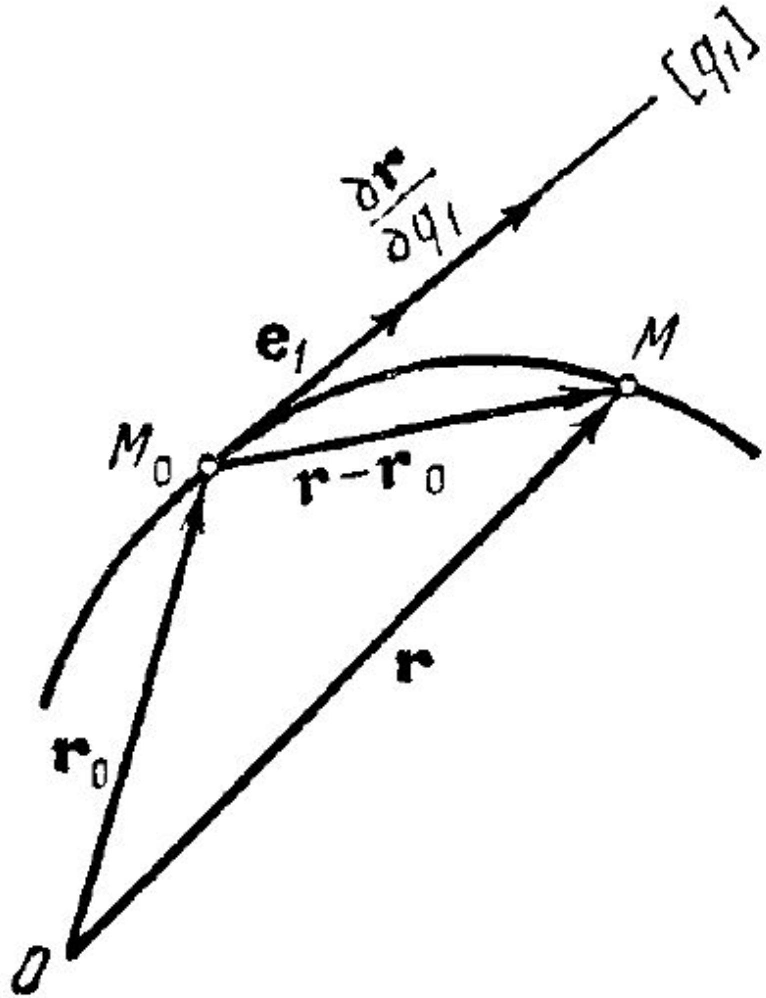

Рис. 1.32.

Вектор $\partial\vec{r} \,/\, \partial q_1$, вычисленный в точке M_0, направлен по касательной к координатной линии $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, т.е. он направлен по координатной оси $\left[q_1\right]$ в сторону возрастания q_1.

Так как
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k},$$
то
$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1. \qquad (1.40)$$

Таким образом, единичный вектор $\vec{e}_1$ равен
$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}. \qquad (1.41)$$

Аналогично можно получить

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \qquad (1.42)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}, \qquad (1.43)$$

где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \qquad (1.44)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Коэффициенты H_1, H_2, H_3 называются коэффициентами Ламе.

Мы будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты, т.е. такие, у которых координатные оси взаимно перпендикулярны. Условием ортогональности является

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = 0, \qquad \left(i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j\right). \tag{1.45}$$

Скорость точки может быть найдена посредством дифференцирования соотношения (1.38)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{1.46}$$

но так как

то $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = H_1 \vec{e}_1, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = H_2 \vec{e}_2, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = H_3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{v} = \dot{q}_1 H_1 \vec{e}_1 + \dot{q}_2 H_2 \vec{e}_2 + \dot{q}_3 H_3 \vec{e}_3. \tag{1.47}$$

Учитывая, что $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ по предположению взаимно перпендикулярны, для модуля скорости имеем

$$v = \sqrt{\dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2}. \tag{1.48}$$

Проекции скорости на координатные оси определяются выражениями

$$v_{q_1} = \dot{q}_1 H_1, \qquad v_{q_2} = \dot{q}_2 H_2, \qquad v_{q_3} = \dot{q}_3 H_3. \tag{1.49}$$

Проекция ускорения точки на координатную ось $[q_1]$, очевидно, будет равна

$$w_{q_1} = \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1},$$

отсюда

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right). \quad (1.50)$$

Взяв частную производную от выражения (1.46) по $\dot{q}_1$, получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}. \quad (1.51)$$

Так как производная $\partial \vec{r} \, / \, \partial q_1$ зависит от координат q_1, q_2 и q_3, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_2 \partial q_1}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_3 \partial q_1}\dot{q}_3.$$

Дифференцируя теперь обе части равенства (1.46) по q_1, получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_3.$$

Сравнивая оба выражения, найдем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right). \tag{1.52}$$

Подставляя полученные равенства (1.51) и (1.52) в формулу (1.50), имеем

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \dot{q}_1}\right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1}.$$

Так как $\vec{v}^2 = v^2$, то

$$\vec{v}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_1} = v\,\frac{\partial v}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Аналогично

$$\vec{v}\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Теперь выражение для w_{q_1} можно записать в следующей форме:

$$w_{q_1} = \frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \qquad (1.53)$$

где v находится по формуле (1.48). Аналогично получаем

$$w_{q_2} = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}, \qquad (1.54)$$

$$w_{q_3} = \frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}. \qquad (1.55)$$