ЛЕКЦИЯ №3

# КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Основы движения твердого тела

При движении твердого тела отдельные его точки движутся в общем случае по различным траекториям и имеют в каждый момент времени различные скорости и ускорения. Вместе с тем имеются кинематические характеристики, одинаковые для всех точек твердого тела.

**Основными задачами** кинематики твердого тела являются:

**– установление способа задания его движения;**

**– изучение кинематических характеристик;**

**– определение траекторий, скоростей и ускорений всех точек твёрдого тела.**

## § 10.1. Задание движения твердого тела

*Движение твердого тела задано, если имеется способ определения положения любой его точки в любой момент времени по отношению к выбранной системе координат.*

Может сначала показаться, что для задания движения твердого тела требуется задать уравнения движения каждой его точки, т.е. необходимо иметь их бесконечное множество. На самом деле это не так, так как перемещения отдельных точек связаны условием неизменяемости расстояний между ними.

Покажем, что положение твердого тела в общем случае вполне определяется заданием шести независимых параметров.

Для этого возьмем в теле три не лежащие на одной прямой точки (рис. 10.1) $A_1$, $A_2$, $A_3$ с координатами

$$x_k = x_k(t), \quad y_k = y_k(t) \quad z_k = z_k(t), \quad k = 1,2,3. \quad (10.1)$$

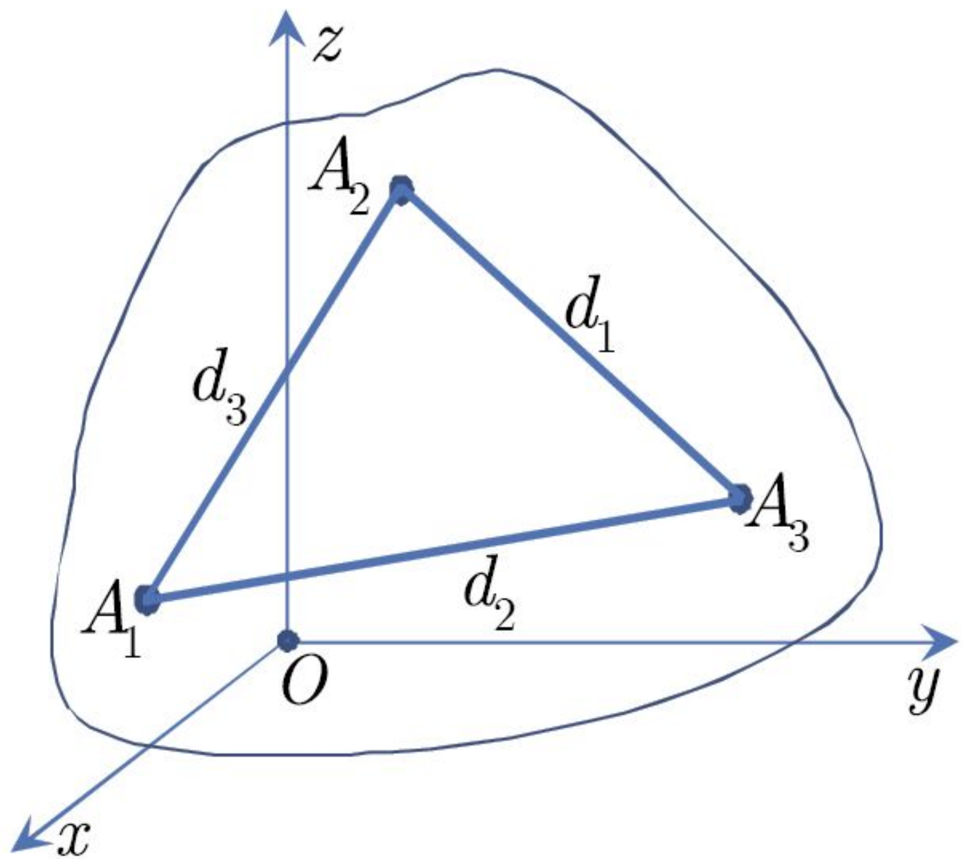



Рис. 10.1

Так как расстояния $d_1$, $d_2$, $d_3$ между точками твердого тела не изменяются, то координаты точек должны удовлетворять трем уравнениям:

$$\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= d_3^2, \\
(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= d_1^2, \\
(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 &= d_2^2.
\end{aligned} \qquad (10.2)$$

Следовательно, **из девяти координат (10.1) независимых** только **шесть**, остальные **три определяются из уравнений (10.2)**. Если взять еще одну точку $A_4$ с координатами $x_4$, $y_4$, $z_4$, то эти координаты должны будут удовлетворять трем уравнениям вида (10.2), выражающим неизменность расстояния до ранее выбранных точек $A_1$, $A_2$, $A_3$. Таким образом, *положение твердого тела относительно произвольно выбранной системы координат вполне определяется шестью независимыми параметрами.*

Число независимых параметров, задание которых однозначно определяет положение твердого тела в пространстве, называется *числом степеней свободы* твердого тела.

Заметим, что задание шести декартовых координат, например, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ , не является наилучшим способом задания движения твердого тела. Как будет позднее выяснено, существуют более удобные параметры, определяющие положение тела в пространстве. В каждом отдельном случае мы будем стараться выбирать независимые параметры, определяющие движение твердого тела, исходя из соображений простоты и удобства решения основных задач кинематики.

## § 10.2. Простейшие виды движения твердого тела

### 1. Поступательное движение твердого тела

*Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению.*

Пусть твердое тело движется поступательно относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 10.2).

$\vec{r}_A$ – радиус-вектор точки $A_0$, $\vec{r}_B$ – радиус-вектор точки $B_0$, а $\vec{\rho}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки $B_0$ в подвижной системе координат $A_0xyz$, жестко связанной с телом (на рис. 10.2 эта система не показана).

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и его движение поступательное, то вектор $\vec{v}$ при движении тела не меняет модуля и направления.

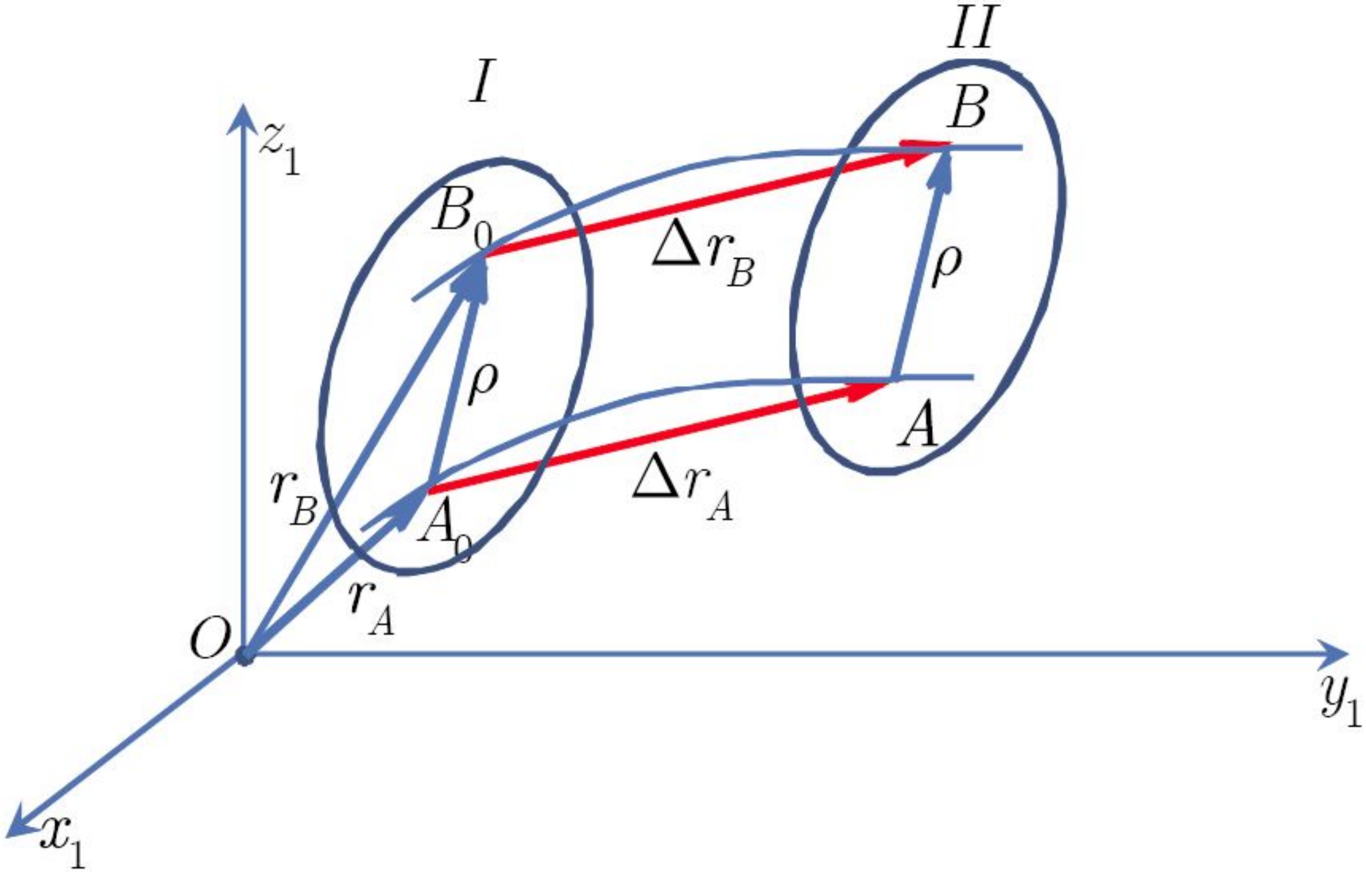



Рис. 10.2

Из рассмотрения рис. 10.2 следует

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{10.3}$$

Пусть в момент времени $t$ тело занимало положение $\mathrm{I}$, а в момент времени $t+\Delta t$ – положение $\mathrm{II}$ (рис. 10.2). Тогда $\Delta \vec{r}_A$ будет вектором перемещения точки $A_0$ а $\Delta \vec{r}_B$ — вектором перемещения точки $B_0$ за промежуток времени $\Delta t$.

Во время движения вектор $\vec{\rho}$ не изменяется, значит, отрезки $A_0B_0$ и $AB$ равны и параллельны и, следовательно, фигура $A_0B_0AB$ – параллелограмм. Таким образом,

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B$$

т.е. *при поступательном движении абсолютно твердого тела перемещения всех его точек геометрически равны между собой.*

Из равенства (10.3) и условия постоянства вектора $\vec{\rho}$ также следует, что *траектории точек тела, движущегося поступательно, одинаковы и получаются друг из друга параллельным смещением.*

Продифференцировав выражение (10.3) по времени, получим

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt},$$

но так как $\vec{\rho} = \mathrm{const}$, то $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$ и, следовательно,

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \text{ или } \vec{v}_B = \vec{v}_A,$$

т.е. *при поступательном движении твердого тела скорости всех его точек в каждый момент времени равны между собой.*

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получим

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \text{ или } \vec{w}_B = \vec{w}_A,$$

т.е. *ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны между собой.*

Таким образом, *при поступательном движении твердого тела все его точки движутся одинаково, так как их перемещения, скорости и ускорения геометрически равны.*

Следовательно, для определения поступательного движения твердого тела, нет необходимости рассматривать движение всех точек тела, а достаточно рассмотреть движение одной точки тела, координаты которой должны быть заданы как функции времени.

## 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

При движении твердого тела с двумя неподвижными точками $A$ и $B$ (рис. 10.3) все точки на прямой $AB$ остаются неподвижными. Это следует из условия неизменяемости расстояний между точками твердого тела.

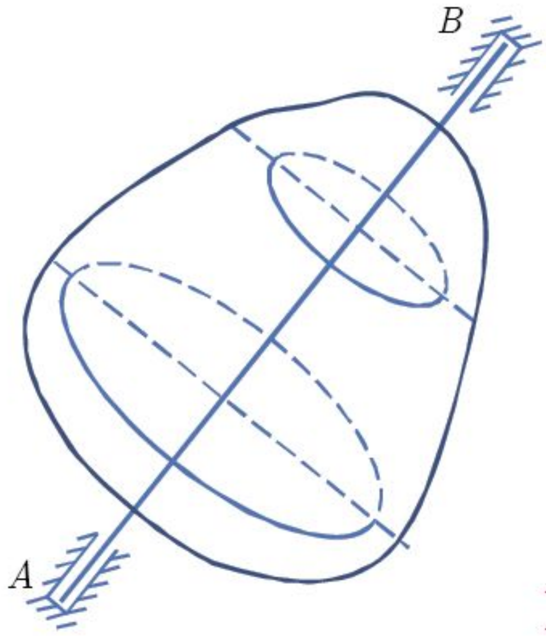



Рис. 10.3

*Прямая $AB$ называется осью вращения, а движение тела называется* ***вращательным****.*

Очевидно, что все точки тела движутся по дугам окружностей с центрами в основаниях перпендикуляров, опущенных из этих точек на ось вращения.

Возьмем на оси вращения две точки $A$ и $B$ и введем систему координат $Ax_1y_1z_1$ с началом в точке $A$ (рис. 10.4). Так, как положение точек $A$ и $B$ нам известно, то положение тела будет полностью определено, если мы будем знать в любой момент времени положение какой-либо точки $C$ тела (не лежащей на оси вращения). Из трех координат этой точки независимой будет только одна, так как расстояния $AC$ и $BC$ постоянны и координаты точки связаны двумя уравнениями:

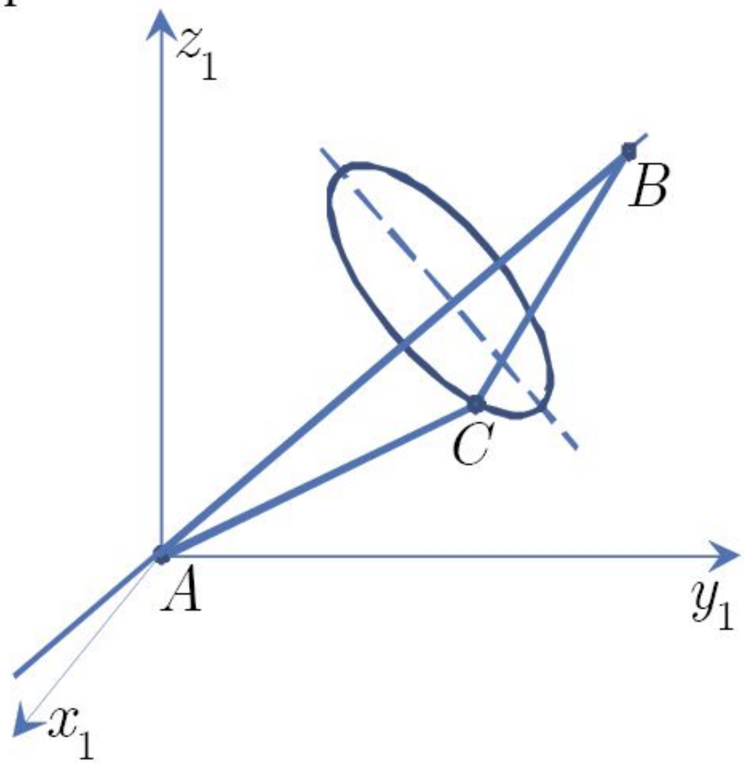



Рис. 10.4

$$
\begin{aligned}
\left(x_A - x_C\right)^2 + \left(y_A - y_C\right)^2 + \left(z_A - z_C\right)^2 &= AC^2, \\
\left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2 + \left(z_B - z_C\right)^2 &= BC^2,
\end{aligned}
\qquad (10.4)
$$

Отсюда следует, что *положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется одним параметром.*

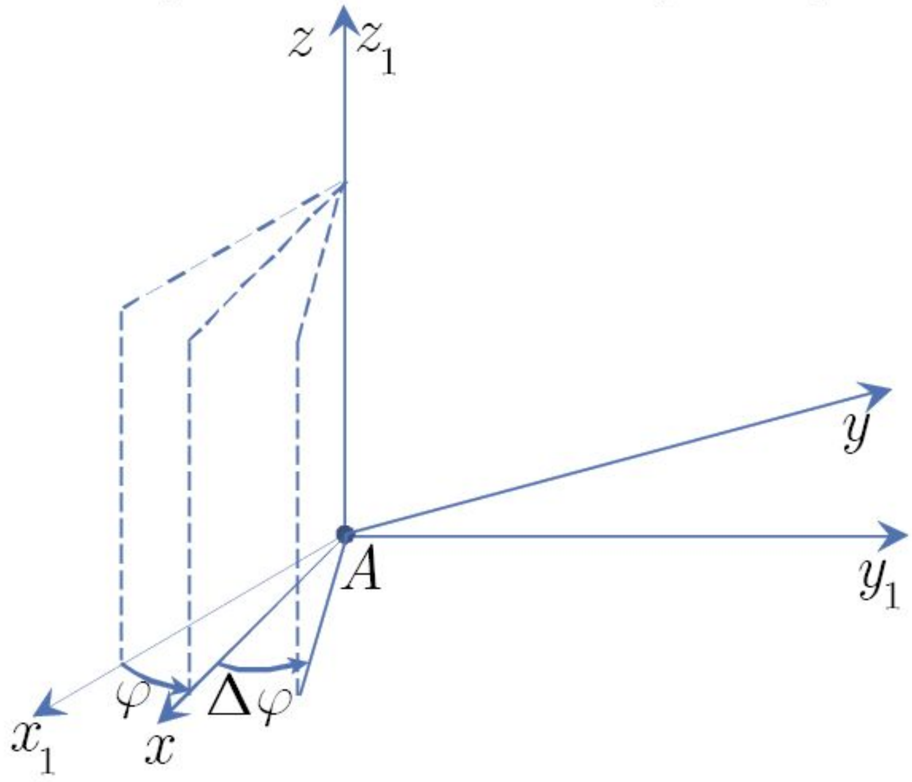



Рис. 10.5

Направим ось $Az_1$ неподвижной системы координат $Ax_1y_1z_1$ по оси вращения тела. Введем подвижную систему координат $Axyz$, жестко связанную с телом, ось $Az$ которой так же направим по оси вращения (рис. 10.5). Положение тела будет полностью определено, если задан угол $\varphi = \varphi\left(t\right)$ между неподвижной плоскостью $x_1Az_1$ и подвижной плоскостью (жестко связанной с телом) $xAz$ (рис. 10.5). Этот угол называется *углом поворота тела.*

Для однозначного определения положения тела необходимо знать не только величину, но и направление отсчета угла $\varphi$ . Условимся считать положительным направлением отсчета направление против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси $Oz_1$

*Вращательное движение твердого тела полностью определяется заданием угла его поворота как функции времени.*

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения всего тела будут *угловая скорость* и *угловое ускорение.*

Пусть в момент времени $t$ угол между неподвижной полуплоскостью $x_1Az_1$ и подвижной полуплоскостью $xAz$ равен $\varphi(t)$, а в момент времени $t+\Delta t$ равен $\varphi(t+\Delta t)$. Это означает, что за промежуток времени $\Delta t$ подвижная плоскость, а, следовательно, и тело повернулось на угол

$$\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$$

Отношение угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени $\Delta t$, за который тело повернулось на этот угол, называется *средней угловой скоростью тела* за промежуток времени $\Delta t$

$$\left(\vec{\omega}_z\right)_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *угловой скоростью тела* в данный момент времени

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (10.5)$$

Введенная таким образом угловая скорость $\vec{\omega}_z$ может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от закона изменения угла $\varphi$. Абсолютное значение угловой скорости будем обозначать через $\omega$, т. е. $\omega = \left| d\varphi / dt \right|$.

Если *угол* поворота измеряется *в радианах*, а *время – в секундах*, то ***единицей измерения угловой скорости будет рад/с***. В технике, часто при равномерном вращении тела, пользуются *числом оборотов в минуту.* Зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту определяется по следующей формуле

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{рад/с},$$

где $n$ – число оборотов в минуту.

Пусть теперь в момент времени $t$ угловая скорость вращения равна $\omega_z(t)$, а в момент $t + \Delta t$ равна $\omega_z(t + \Delta t)$; тогда за промежуток времени $\Delta t$ приращение угловой скорости будет равно

$$\Delta\vec{\omega}_z = \vec{\omega}_z(t + \Delta t) - \vec{\omega}_z(t)$$

*Средним угловым ускорением* тела за промежуток времени $\Delta t$ будем называть отношение приращения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, т.е.

$$\left(\vec{\varepsilon}_z\right)_{cp} = \frac{\Delta\vec{\omega}_z}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения, при $\Delta t \to 0$, называется *угловым ускорением тела* в данный момент времени

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \qquad (10.6)$$

так как

$$\vec{\omega}_z = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловое ускорение, характеризующее изменение угловой скорости с течением времени, равно производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота. Модуль углового ускорения обозначается буквой $\varepsilon$, ***единица измерения углового ускорения – рад/с²***.

Весьма полезным для дальнейшего изучения кинематики твердого тела является введение в рассмотрение *векторов угловой скорости углового ускорения.*

*Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, мы будем называть вектор, модуль которого равен абсолютному значению производной от угла поворота тела по времени, направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки.*

Учитывая ранее введенное определение направления положительного отсчета угла $\varphi$, вектор угловой скорости можно определить по формуле

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} = \omega_z \vec{k}, \qquad (10.7)$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор оси $Oz$.

Из этой формулы следует, что при $\omega_z = \dot{\varphi} > 0$, направление вектора $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $\vec{k}$, а при $\omega_z = \dot{\varphi} < 0$

вектор $\vec{\omega}$ направлен в сторону, противоположную направлению вектора $\vec{k}$.

*Вектором углового ускорения будем называть вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости,* т.е.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}\vec{k} = \varepsilon_z \vec{k}, \tag{10.8}$$

где $\varepsilon_z = d^2\varphi / dt^2$. Из формулы (10.8) следует, что вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен, как и вектор $\vec{\omega}$, вдоль оси вращения.

Величины $\omega_z$ и $\varepsilon_z$ представляют *проекции* векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ на ось вращения.

Перейдем к нахождению скорости и ускорения любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Пусть единичные векторы координатных осей $x$, $y$, $z$ соответственно будут $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 10.7).

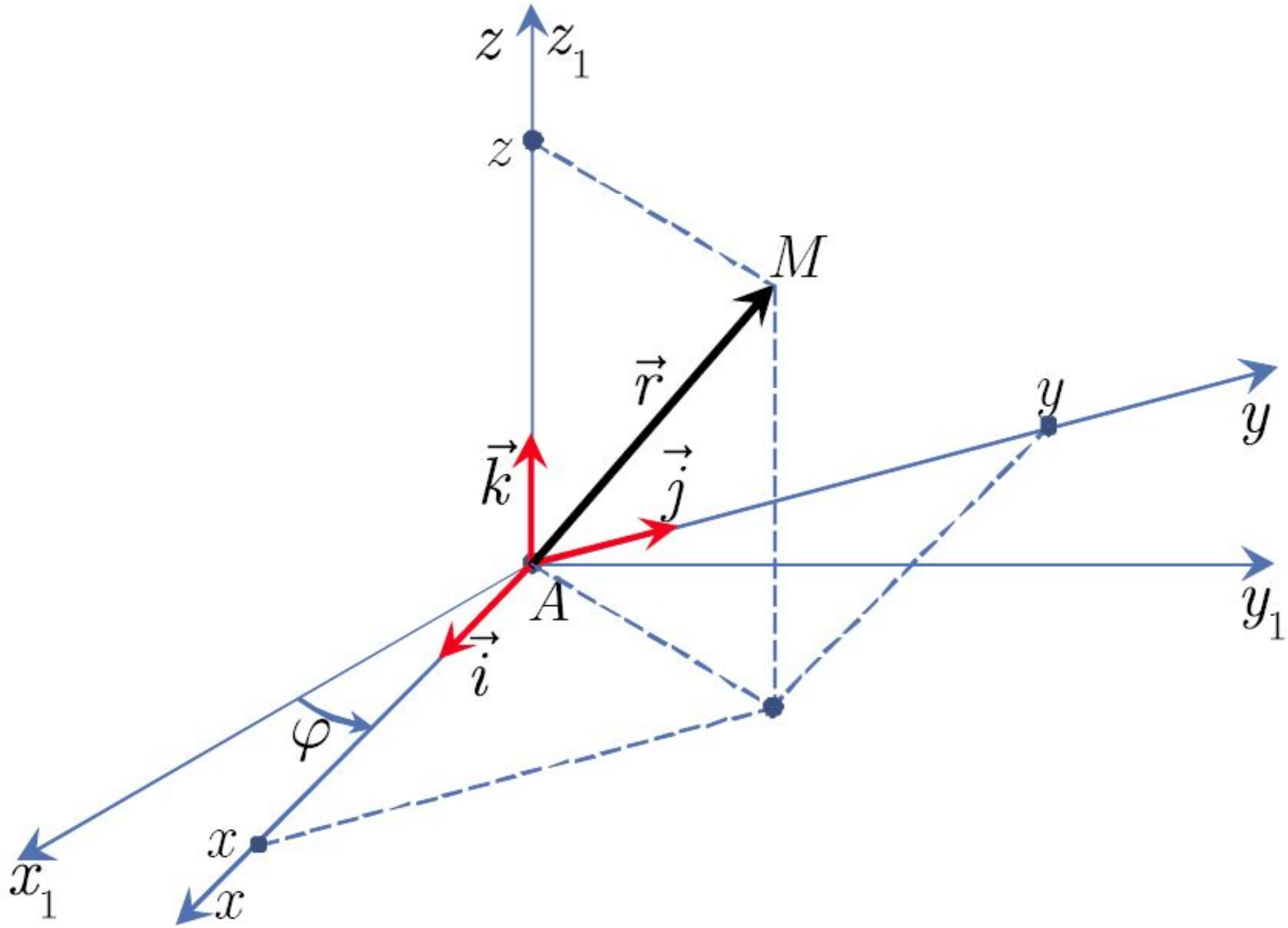



Рис. 10.7

Радиус-вектор произвольной точки $M$ можно представить в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{10.9}$$

где $x$, $y$, $z$ – координаты точки (постоянные величины). Скорость точки $M$ будет равна

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{10.10}$$

Так как вектор $\vec{k}$ неподвижен, то $d\vec{k} \,/\, dt = 0$; что же касается производных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то мы уже вычисляли их, рассматривая движение точки в полярной системе координат. Если обозначить $r^0 = \vec{i}$ и $p^0 = \vec{j}$, то формулы (9.15) и (9.16) примут вид

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi}\vec{j}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{i}.$$

Подставляя в формулу (10.10) эти производные и учитывая, что $\dot{\varphi} = \omega_z$, получим

$$\vec{v} = x\omega_z\vec{j} - y\omega_z\vec{i}. \tag{10.11}$$

Отсюда следует, что проекции вектора скорости точки $\vec{v}$ на оси $x$, $y$ и $z$ соответственно равны

$$v_x = -y\omega_z, \qquad v_y = x\omega_z, \qquad v_x = 0. \tag{10.12}$$

Так как векторное произведение

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega_z\vec{i} + x\omega_z\vec{j} + 0\cdot\vec{k},$$

имеет те же проекции на оси $x$, $y$ и $z$, что и вектор скорости $\vec{v}$, то имеем

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \tag{10.13}$$

иначе говоря, *скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.*

Из формулы (10.13) следует, что

$$v = \omega r \sin\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right) = \omega\rho,$$

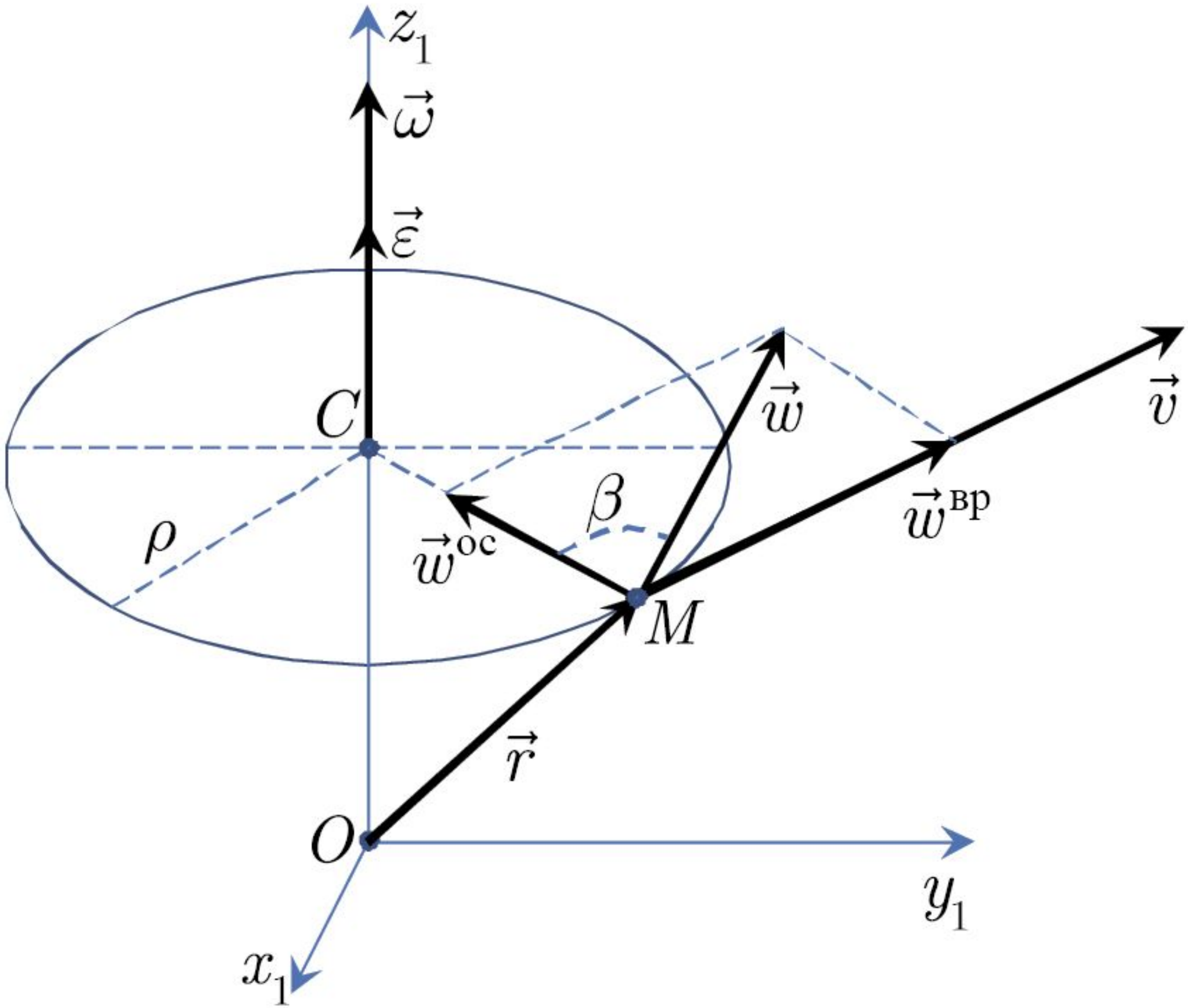
т. е. *модуль скорости любой точки твердого тела равен произведению модуля угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения. Направлен же вектор скорости по касательной к окружности, по которой перемещается точка $M$, в сторону ее движения.*

Взяв производную по времени от обеих частей равенства (10.13), получим

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Но $d\vec{\omega} \,/\, dt = \vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, а $d\vec{r} \,/\, dt = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ – скорость точки $M_1$. Тогда

$$\vec{w} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right).$$



$z_1$
$\vec{\omega}$
$\vec{\varepsilon}$
$C$
$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\beta$
$\vec{w}^{\text{вр}}$
$\rho$
$\vec{w}^{\text{ос}}$
$M$
$\vec{r}$
$O$
$y_1$
$x_1$


Рис. 10.7

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки (к окружности радиуса $\rho$), т.е. параллельно скорости (так как вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен по оси вращения (рис 10.8)). Эта составляющая ускорения является касательной составляющей ускорения точки $M$ тела. В дальнейшем будем называть эту составляющую *вращательным ускорением,* т.е.

$$\vec{w}^{\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Это название связано с тем, что с такой составляющей ускорения мы встретимся при изучении более сложного движения тела, когда вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ уже не будет являться касательным ускорением точки $M$.

Численное значение вращательного ускорения равно

$$w^{\text{вр}} = \varepsilon r \sin\left(\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right) = \varepsilon\rho.$$

Вектор $\vec{\omega} \times \vec{v}$ направлен в плоскости окружности радиуса $\rho$ от точки $M$ к точке $C$, т.е. направлен к оси вращения по нормали к траектории и является нормальным ускорением точки $M$. Этот вектор направленный к оси вращения, будем называть *осестремительным* ускорением:

$$\vec{w}^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Так как вектор $\vec{v}$ перпендикулярен вектору $\vec{\omega}$, то численное значение осестремительного ускорения равно

$$w^{\text{ос}} = \omega v = \omega \rho^2.$$

Модуль полного ускорения точки $M$ будет

$$w = \sqrt{w^{\text{ос}} + w^{\text{вр}}} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол $\beta$, образованный векторами полного и осестремительного ускорений, определяется из формулы

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w^{\text{вр}}}{w^{\text{ос}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$