ЛЕКЦИЯ №6

Глава XIII
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ
§ 13.1. Основные определения. Абсолютная и относительная производные вектора

На предыдущих занятиях мы изучали основные характеристики движения точки по отношению к заданной системе координат. Однако в некоторых случаях бывает целесообразно изучать движение точки одновременно по отношению к двум системам координат, одна из которых совершает заданное движение по отношению к другой (основной), принимаемой за неподвижную.

Изучение движения точки по отношению к каждой из этих координатных систем производится методами, которые мы рассмотрели на предыдущих лекциях. Нашей задачей является установление связи между основными характеристиками этих движений.

Будем называть ***сложным или «абсолютным» движением точки*** *ее движение по отношению к системе координат, выбранной за основную.*

Движение точки по отношению к подвижной системе координат будем называть ***относительным.***

Под ***переносным движением*** *будем понимать движение точки вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной.*

Установление связи между сложным, относительным и переносным движениями позволит решать разнообразные задачи по определению кинематических характеристик сложного и составляющих движений.

На этой лекции мы встретимся с необходимостью дифференцирования вектора, определенного в системе координат, которая может двигаться произвольным образом. В связи с этим мы введем понятия ***абсолютной*** и ***относительной*** производных вектора.

Пусть даны: основная система координат и подвижная система координат, которая совершает произвольное движение. Пусть какой-либо вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ определен в подвижной системе координат, т.е. проекции этого вектора a_x, a_y, a_z на оси подвижной системы – заданные функции времени. Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы подвижной системы координат, то вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \tag{13.1}$$

Установим теперь правило нахождения производной в неподвижной системе координат (абсолютной производной) от этого вектора. Дифференцируя обе части равенства (13.1) по времени, будем иметь в виду, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ вследствие движения подвижной системы координат меняют свое направление, т.е. являются функциями времени.

Таким образом, абсолютная производная вектора $\vec{a}$ по времени будет равна

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k} + \\ + a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}. \qquad (13.2)$$

Сумма первых трех слагаемых представляет собой производную от вектора $\vec{a}$ в подвижной системе координат. В самом деле, если бы мы поставили задачей изучить изменение вектора $\vec{a}$ только по отношению к подвижной системе координат, то мы учитывали бы при этом лишь изменение проекций вектора на оси этой системы координат. Движение же самой системы нас бы не интересовало.

Назовем сумму первых трех слагаемых в (13.2) ***относительной*** или ***локальной производной*** и обозначим ее через $\tilde{d}\vec{a}\ /\ dt$, т.е.

$$\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}. \qquad (13.3)$$

Заменяя в формулах $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ и $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ радиус-вектор $\vec{r}$ последовательно на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, получим

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

Поэтому сумма последних трех слагаемых в (13.2)

$$a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt},$$

может быть представлена в виде

$$
\begin{aligned}
a_x \frac{d\vec{i}}{dt} + a_y \frac{d\vec{j}}{dt} + a_z \frac{d\vec{k}}{dt} &= \\
&= a_x\left(\vec{\omega}\times\vec{i}\right) + a_y\left(\vec{\omega}\times\vec{j}\right) + a_z\left(\vec{\omega}\times\vec{k}\right) = \qquad (13.4)\\
&= \vec{\omega}\times\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \vec{\omega}\times\vec{a},
\end{aligned}
$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость подвижной системы координат. Следовательно,

$$
\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{a}. \qquad (13.5)
$$

Таким образом, *абсолютная производная вектора равна сумме относительной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости подвижной системы координат на этот вектор.*

§ 13.2. Теорема о сложении скоростей

Выбирая систему координат $Ox_1y_1z_1$ за основную, предположим, что система координат $Axyz$ движется по отношению к основной системе произвольным образом (рис. 13.1). Движение какой-либо точки M может быть изучено как по отношению к основной, так и по отношению к подвижной системам координат методами, изложенными ранее. Сейчас мы поставим задачу о нахождении связи между скоростями точки по отношению к выбранным нами системам координат. Напомним данные ранее определения.

Скорость $\vec{v}_a$ точки M по отношению к основной системе координат называется ***абсолютной скоростью.***

Скорость $\vec{v}_r$ точки по отношению к подвижной системе координат называется ***относительной скоростью.***

Важным понятием является понятие о переносной скорости. ***Переносной скоростью*** $\vec{v}_e$ *точки называется скорость той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.* Остановимся на этом определении несколько подробнее. Рассматриваемая точка при своем движении относительно подвижного тела, с которым жестко связана подвижная система координат, проходит через разные точки этого тела, имеющие в общем случае отличные друг от друга скорости. Поэтому переносной скоростью точки в данный момент будет скорость именно той точки подвижного тела (подвижной системы координат), через которую в данный момент проходит движущаяся точка.

Если радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определяет положение точки M по отношению к системе координат $Ox_1y_1z_1$, радиус-вектор $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ определяет положение начала системы координат $Axyz$

в системе $Ox_1y_1z_1$ а радиус-вектор $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ определяет положение точки M в системе координат $Axyz$, то в соответствии с рис. 13.1 имеем

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \tag{13.6}$$

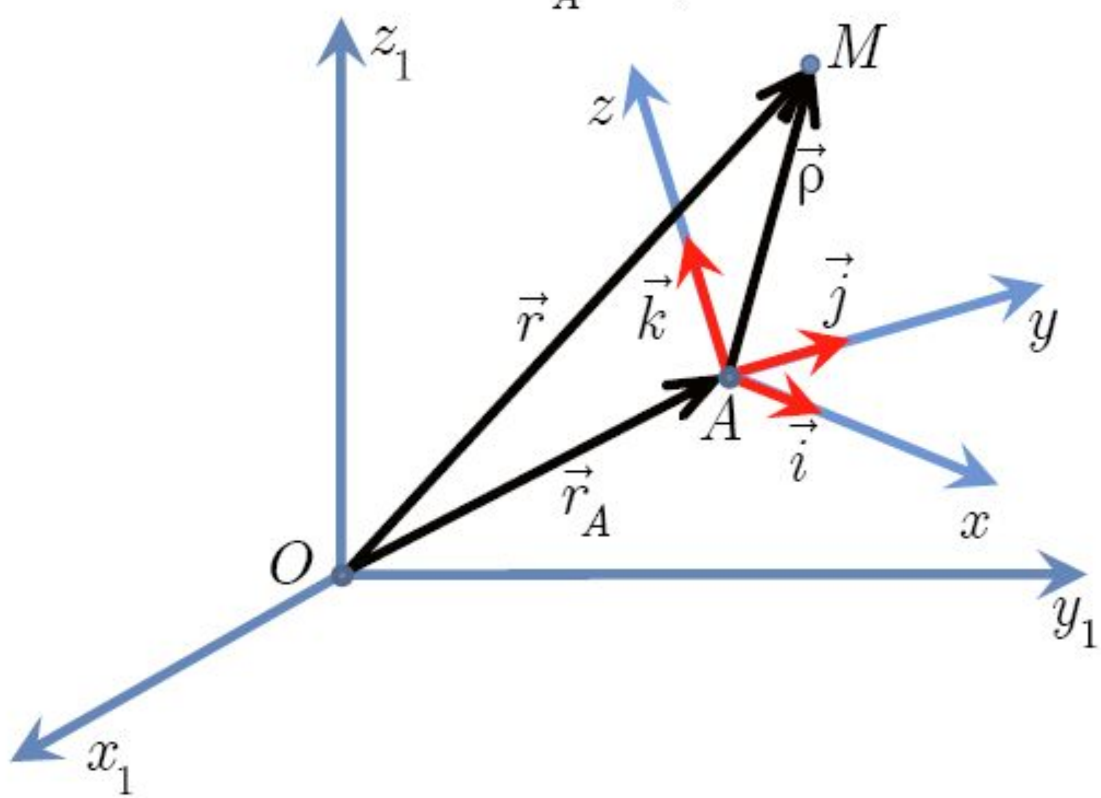

Рис. 13.1

Пусть координаты точки в подвижной системе координат будут x, y и z, тогда

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы осей подвижной системы координат. По определению абсолютная производная радиуса-вектора по времени будет абсолютной скоростью точки. Следовательно, дифференцируя равенство (13.6) по времени, найдем абсолютную скорость точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \qquad (13.7)$$

Так как вектор $\vec{\rho}$ определен в подвижной системе координат, то для нахождения абсолютной производной от него воспользуемся формулой (13.5):

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \qquad (13.8)$$

где $\vec{\omega}$ – угловая скорость подвижной системы координат, а

$$\frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

представляет собой относительную производную от $\vec{\rho}$ по времени. Согласно определению это будет относительная скорость точки, т.е.

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \qquad (13.9)$$

Подставляя выражения (13.8) и (13.9) в соотношение (13.7), получим

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}_r, \qquad (13.10)$$

где $\vec{v}_A = d\vec{r}_A \,/\, dt$ – скорость начала подвижной системы координат по отношению к основной.

Для определения переносной скорости точки закрепим ее в подвижной системе координат, т.е. положим в формуле (13.10) $\vec{v}_r = 0$, тогда получим

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{13.11}$$

Таким образом, имеем

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \tag{13.12}$$

т.е. ***абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.***

§ 13.3. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Для того чтобы найти абсолютное ускорение точки, т.е. ее ускорение по отношению к основной системе координат, продифференцируем формулу (13.10) по времени:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega}\frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}, \qquad (13.13)$$

Абсолютную производную вектора относительной скорости $\vec{v}_r$ найдем по формуле (13.5):

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}_r, \qquad (13.14)$$

В этом соотношении $\tilde{d}\vec{v}_r \,/\, dt$ есть относительная производная вектора $\vec{v}_r$, по времени и, следовательно, представляет собой относительное ускорение $\vec{w}_r$ т.е. ускорение точки по отношению к подвижной системе координат

$$\vec{w}_r = \frac{\tilde{d}\vec{v}_r}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}, \qquad (13.15)$$

Используя равенства (13.8), (13.9), (13.14) и (13.15), преобразуем формулу (13.13) к виду

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\left[\vec{v}_r + \left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right)\right] + \vec{w}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r = \\ &= \vec{w}_A + \vec{\varepsilon}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) + \vec{w}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r, \end{aligned} \qquad (13.16)$$

где $\vec{w}_A = \dot{\vec{v}}_A$ – ускорение начала подвижной системы координат, а $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ – ее угловое ускорение.

Для того чтобы найти переносное ускорение $\vec{w}_e$ (ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка!), закрепим точку в подвижной системе координат, т.е. положим $\vec{v}_r = 0$, $\vec{w}_r = 0$.

В этом случае согласно формуле (13.16) будем иметь

$$\vec{w}_e = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}\right), \tag{13.17}$$

т.е. переносное ускорение представляет собой ускорение точки свободного твердого тела, с которым жестко связана подвижная система координат. Таким образом, имеем

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{13.18}$$

Ускорение, определяемое членом $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, называется ***поворотным*** или ***кориолисовым*** ускорением и обозначается через $\vec{w}_c$, т.е.

$$\vec{w}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \tag{13.19}$$

Итак, имеем

$$\vec{w} = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_c. \tag{13.20}$$

Формула (13.20) выражает содержание теоремы Кориолиса: ***абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.***

Остановимся несколько подробнее на кориолисовом ускорении $\vec{w}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$. Модуль этого ускорения, очевидно, равен

$$w_c = 2\omega v_r \sin\left(\vec{\omega}, \vec{v}_r\right). \tag{13.21}$$

Направление кориолисова ускорения определяется направлением векторного произведения векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$, т.е. кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший переход от $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$ виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 13.2).

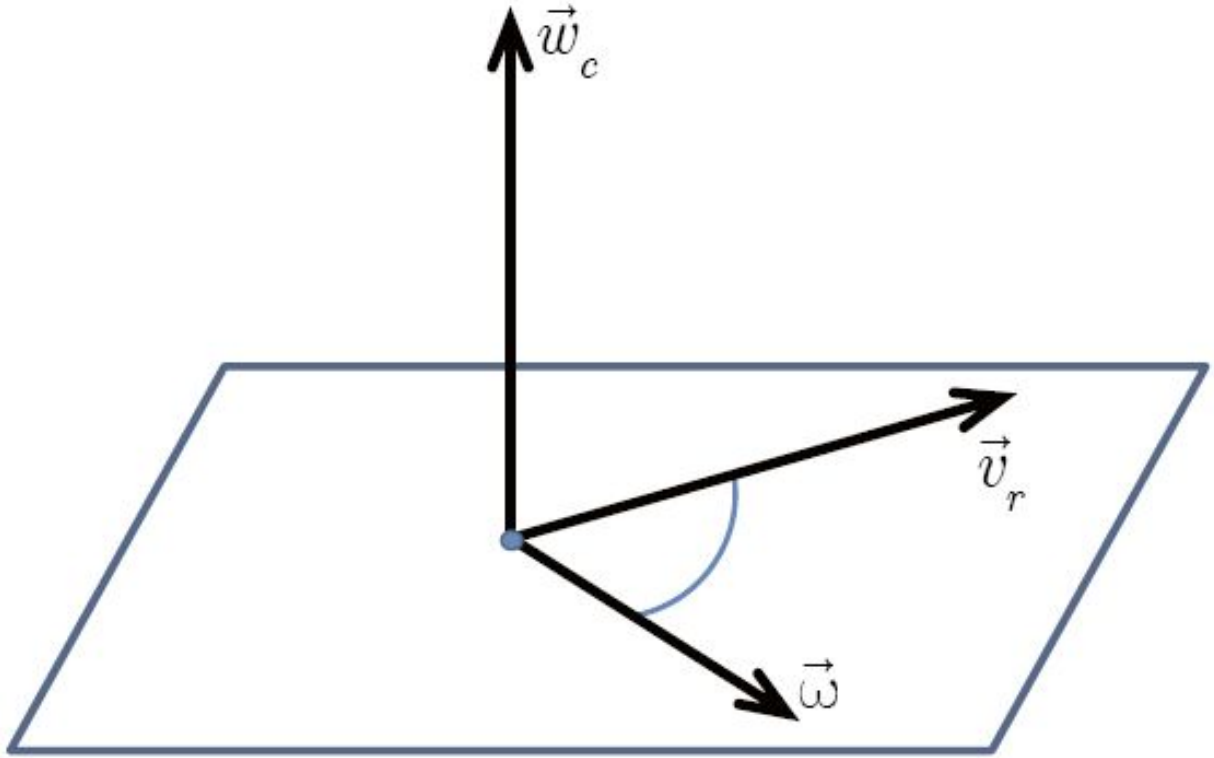

Рис. 13.2

Если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_r$ не лежат в одной плоскости, удобно бывает мысленно перенести вектор $\vec{\omega}$ параллельно самому себе в начало вектора скорости $\vec{v}_r$ и применить указанное выше правило.

Иногда нахождение кориолисова ускорения облегчается применением следующего **правила Н.Е. Жуковского** (рис. 13.3): *проекцию относительной скорости* $\vec{v}_r$ *на плоскость, перпендикулярную угловой скорости* $\vec{\omega}$ *подвижной системы координат, равную* $v_r \sin(\alpha)$, *следует умножить на* 2ω *и повернуть на угол* 90° *вокруг* $\vec{\omega}$ *в направлении вращения. Вектор, равный по модулю* $2\omega v_r \sin\alpha$ *и имеющий найденное направление, и будет кориолисовым ускорением.*

На основании формулы (13.21) можно указать, что кориолисово ускорение равно нулю в следующих случаях:

1) $\vec{\omega} = 0$, это будет при поступательном перемещении подвижной системы координат;

2) угловая скорость $\vec{\omega}$ подвижной системы параллельна относительной скорости $\vec{v}_r$;

3) в момент времени, когда относительная скорость $\vec{v}_r$ точки равна нулю.

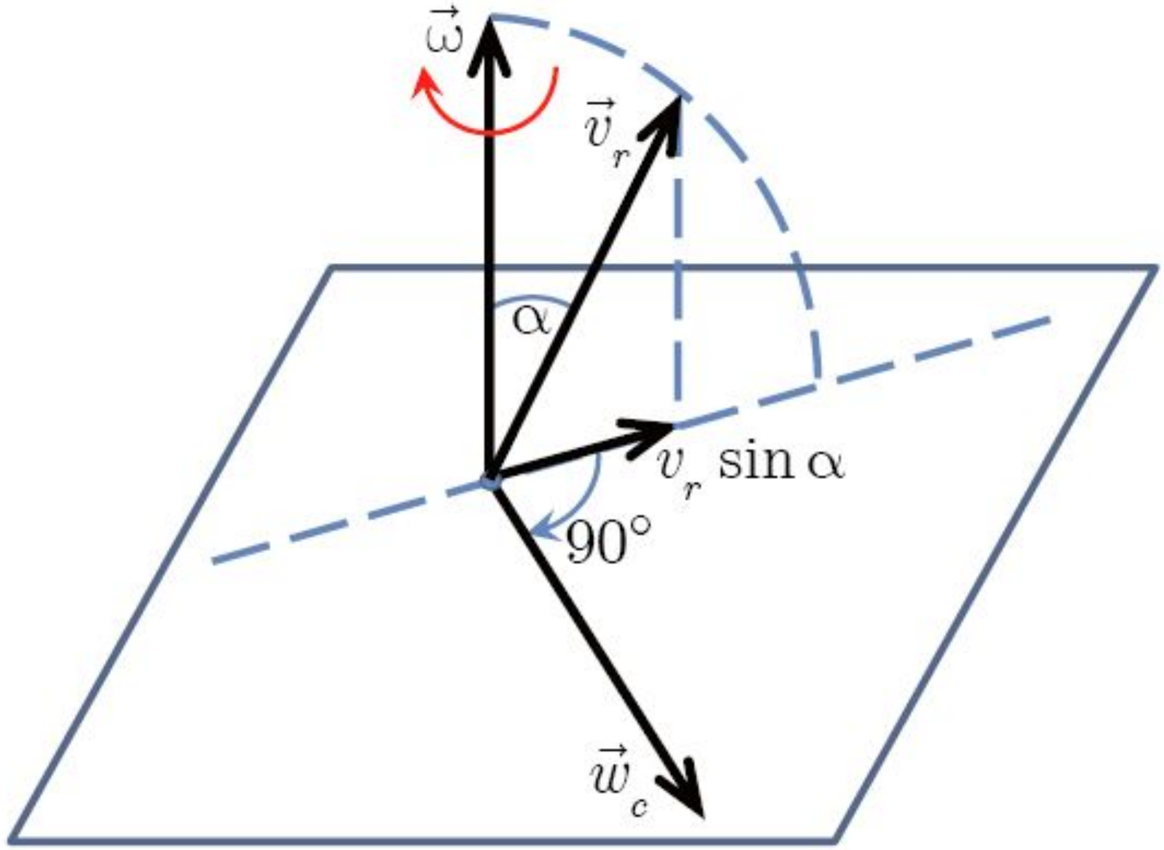

Рис. 13.3