ЛЕКЦИЯ №7

Глава XIV
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 14.1. Постановка задачи

Пусть твердое тело движется относительно подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а последняя в свою очередь перемещается относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, принимаемой за неподвижную.

В этом случае говорят, что тело совершает сложное движение, которое состоит из двух составляющих движений. Движение тела или движение какой-либо одной системы координат относительно другой в общем случае ничем не ограничено. Задача заключается в нахождении зависимости между основными характеристиками составляющих движений и сложного движения.

Ранее было установлено, что движение свободного твердого тела можно представить как сложное движение, состоящее из совокупности сферического движения тела вокруг некоторого полюса и поступательного движения тела вместе с системой координат, связанной с полюсом.

Таким образом, основными кинематическими характеристиками движения тела являются скорость и ускорение поступательного движения и угловые скорости и ускорения.

Следовательно, задача изучения сложного движения тела, заключающаяся в нахождении зависимости между основными характеристиками составляющих движений сложного движения, сводится к **установлению связи между поступательными и угловыми скоростями и ускорениями составляющих движений**.

В настоящем курсе мы ограничимся лишь установлением связи между поступательными и угловыми скоростями.

Рассмотрение начнем с простейших случаев.

§ 14.2. Сложение поступательных движений

Пусть $\vec{v}_1$ – скорость поступательного движения тела P относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 14.1), а $\vec{v}_2$ – скорость поступательного движения системы $O_2x_2y_2z_2$ относительно неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

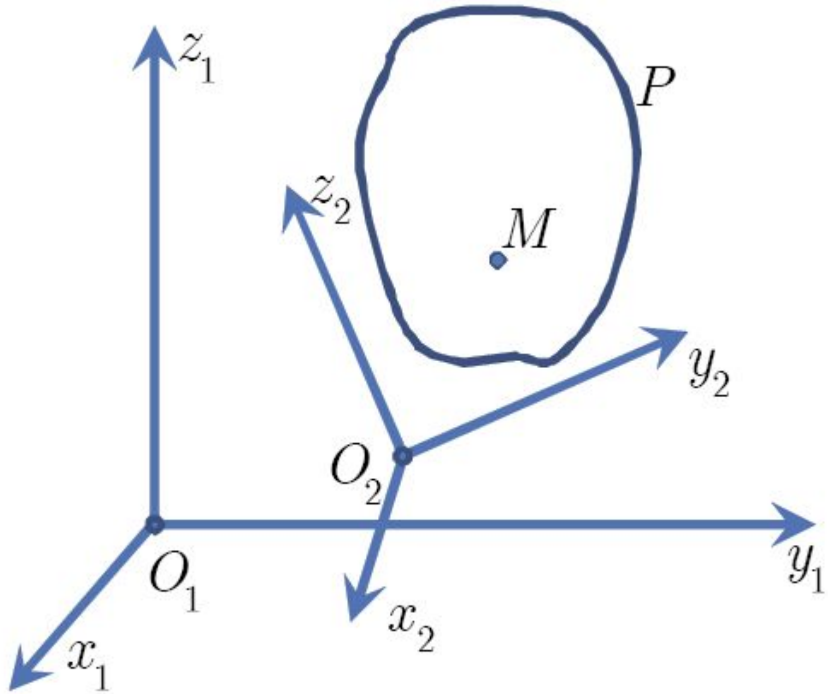


Рис. 14.1

Чтобы найти абсолютную скорость какой-либо точки M тела P, нужно применить теорему о сложении скоростей:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \tag{14.1}$$

В нашем случае $\vec{v}_r = \vec{v}_1$ и $\vec{v}_e = \vec{v}_2$, следовательно,

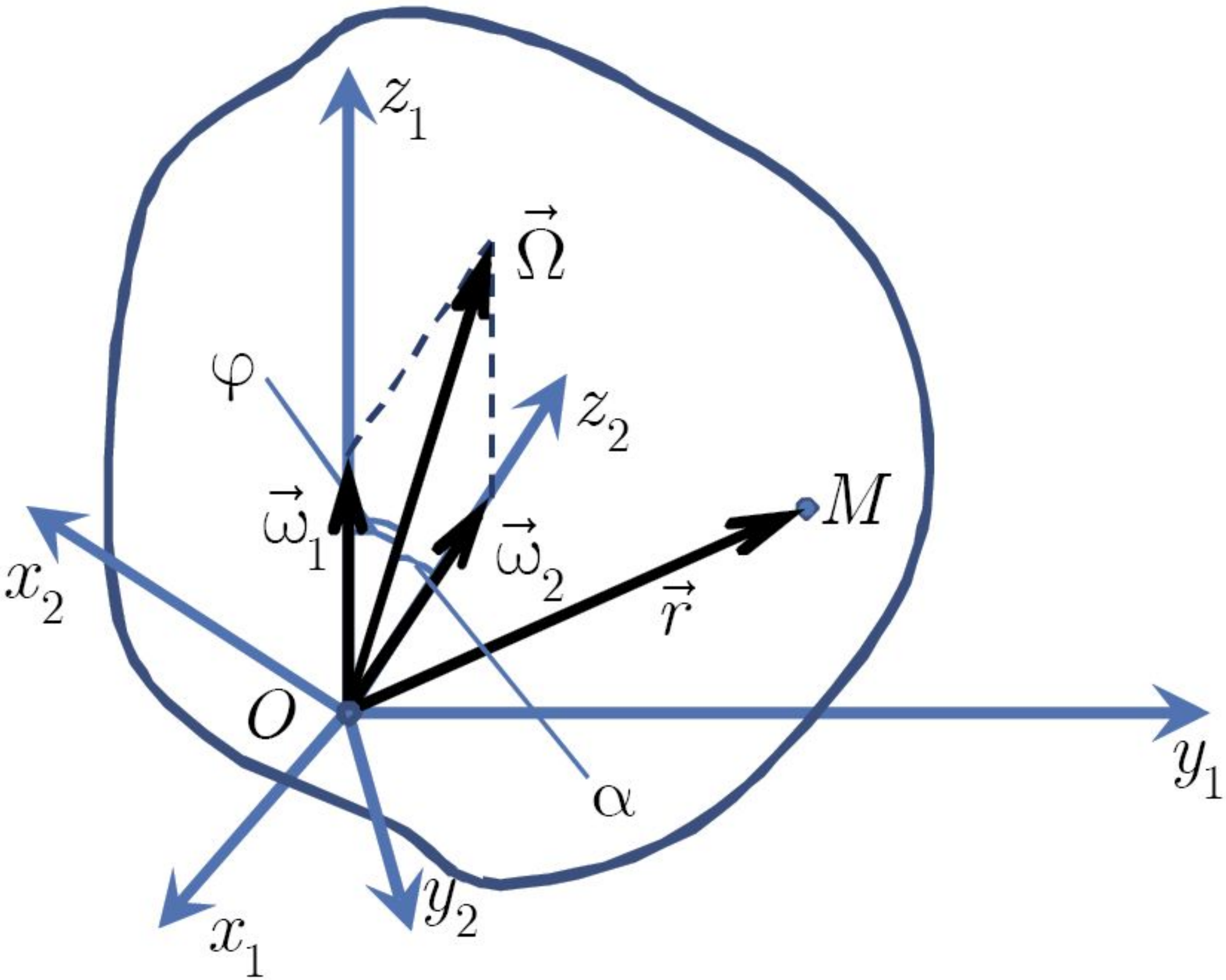
$$\vec{v}_M = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \tag{14.2}$$

Таким образом, у всех точек тела абсолютные скорости оказались одинаковыми, следовательно, при сложении поступательных движений твердого тела результирующее движение будет также **поступательным** и скорость результирующего движения равна сумме скоростей составляющих движений.

§ 14.3. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть тело P вращается в системе координат $Ox_2y_2z_2$ вокруг оси Oz_2 с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, а система координат $Ox_2y_2z_2$ вращается вокруг оси Oz_1 неподвижной системы с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (рис. 14.2). Точка O остается неподвижной, поэтому результирующее движение тела будет сферическим. Обозначим через $\vec{\Omega}$ угловую скорость этого движения.

Наша задача состоит в том, чтобы найти угловую скорость абсолютного движения тела, зная угловые скорости $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ составляющих вращений.



z_1
$\vec{\Omega}$
φ
z_2
M
$\vec{\omega}_1$
$\vec{\omega}_2$
x_2
$\vec{r}$
O
y_1
α
y_2
x_1

Рис. 14.2

Найдем абсолютную скорость произвольной точки M тела. Для этого в формулу (14.1) следует подставить

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \qquad \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M; тогда

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_2 \times \vec{r} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r} = \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \times \vec{r}.$$

С другой стороны, скорость той же точки M в абсолютном движении будет равна

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Сравнивая оба выражения, получим

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \times \vec{r}.$$

Так как точка M, а следовательно, и ее радиус-вектор $\vec{r}$ произвольны, то

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \qquad (14.3)$$

Из формулы (14.3) следует, что ***совокупность двух вращений, происходящих вокруг пересекающихся осей, эквивалентна одному вращению, происходящему с мгновенной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.***

§ 14.4. Пара вращений

Рассмотрим сложное движение, состоящее из двух вращений относительно параллельных осей O_1z_1 и O_2z_2 (рис. 14.3). Пусть угловые скорости относительного $\vec{\omega}_2$ и переносного $\vec{\omega}_1$ движений равны по модулю, но противоположно направлены $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$. Такая совокупность движений называется ***парой вращений***.

Найдем абсолютную скорость какой-либо точки M твердого тела.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r .$$

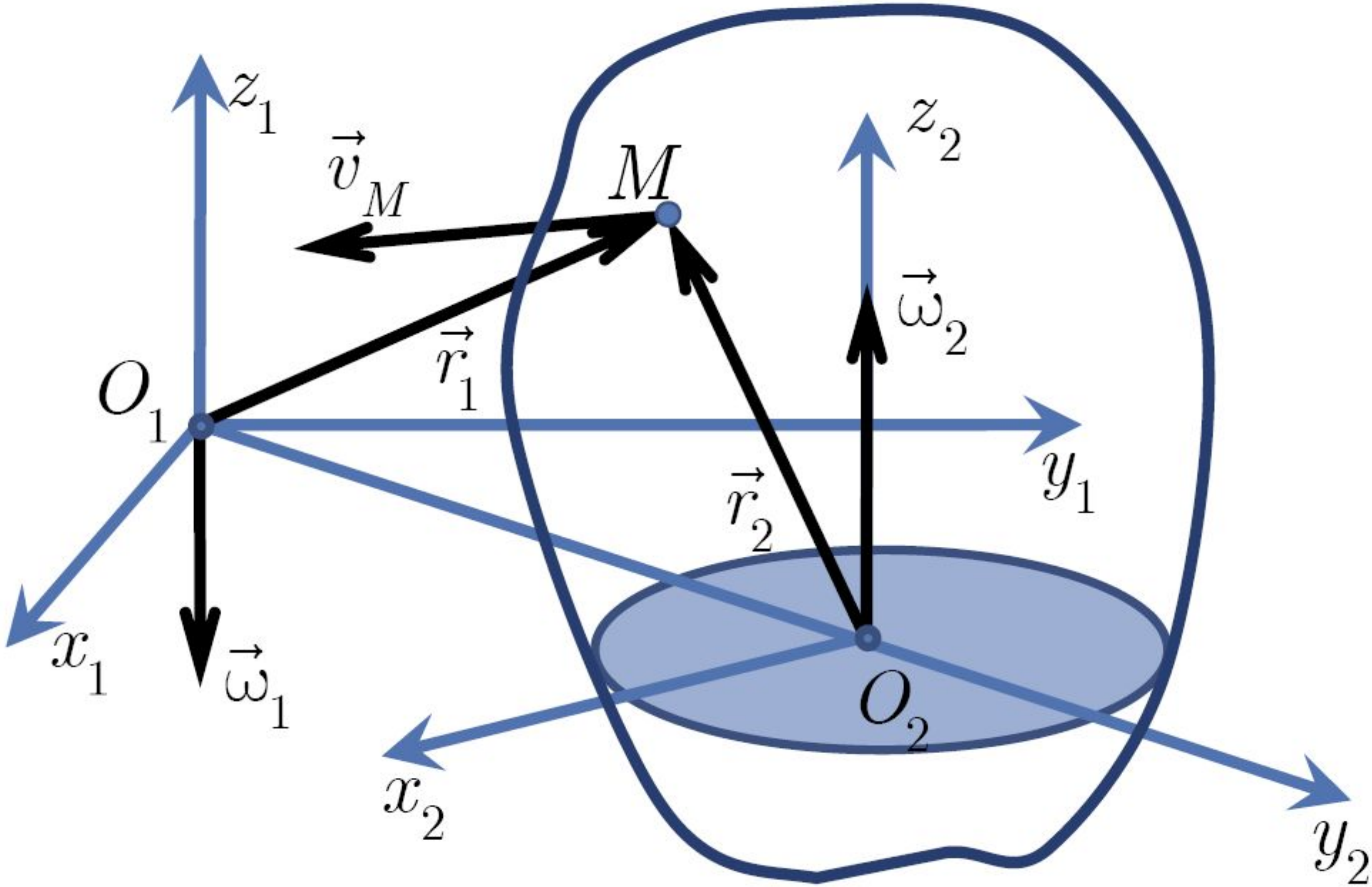

z_1
$\vec{v}_M$
M
z_2
$\vec{\omega}_2$
$\vec{r}_1$
O_1
y_1
$\vec{r}_2$
x_1
$\vec{\omega}_1$
O_2
x_2
y_2

Рис. 14.3

В нашем случае

$$\vec{v}_r = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2, \qquad \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_2 = \\ &= \vec{\omega}_1 \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1O_2}.\end{aligned} \tag{14.9}$$

Векторы $\vec{\omega}_1$ и $\overrightarrow{O_1O_2}$ не зависят от положения точки M, поэтому из (14.9) вытекает, что скорости всех точек тела одинаковы. Этим свойством обладает только ***поступательное движение***.

Из (14.9) следует, что

$$\vec{v}_M = \overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2. \tag{14.10}$$

Векторное произведение $\overrightarrow{O_1O_2} \times \vec{\omega}_2$ называется ***моментом пары вращений.***

Таким образом, ***тело, участвующее в паре вращений, движется поступательно со скоростью, равной моменту пары вращений.***

Заметим, что любое мгновенно-поступательное движение можно представить как мгновенную пару вращений.

§ 14.5. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Предположим, что тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг оси O_2z_2 относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а последняя вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг оси O_1z_1 относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$, причем оси O_1z_1 и O_2z_2 параллельны (рис. 14.4).

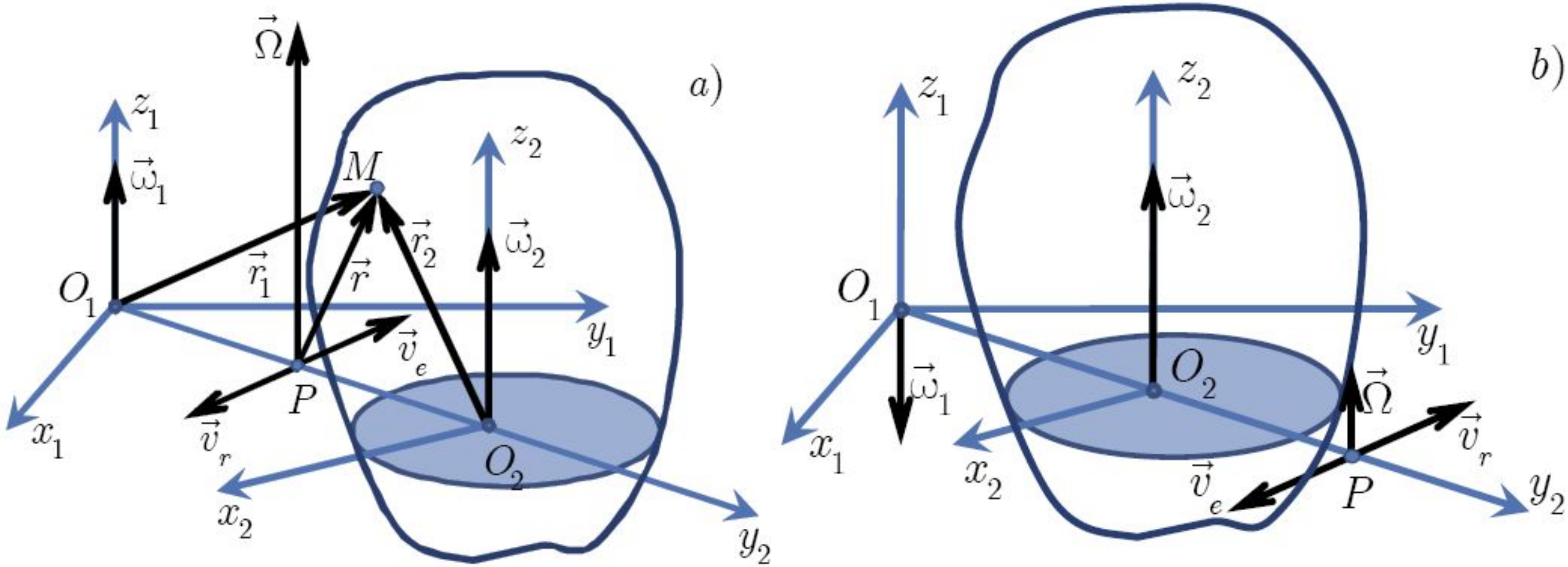


Рис. 14.4

Тогда абсолютная скорость любой точки M тела

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2.$$

Скорости $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ точки M расположены в плоскости, перпендикулярной осям O_1z_1 и O_2z_2, следовательно, и абсолютная скорость $\vec{v}$ точки M лежит в плоскости, перпендикулярной этим осям. Так как точка M произвольна, то это означает, что тело участвует в плоском движении. Найдем в плоскости $x_1O_1y_1$ мгновенный центр скоростей в случае, когда $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в одну сторону (рис. 14.4, *а*). Для точки P, лежащей на прямой O_1O_2, $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ коллинеарны, но направлены в разные стороны. Для того чтобы их геометрическая сумма была равна нулю, должно выполняться равенство

$$\omega_2 \cdot O_2P = \omega_1 \cdot O_1P,$$

или

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (14.11)$$

Точка P делит отрезок O_1O_2 внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей составляющих вращений.

Перейдем теперь к сложению вращений, имеющих противоположные направления.

Пусть $\vec{\omega}_2 > \vec{\omega}_1$. Скорости $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_e$ в этом случае имеют противоположные направления в точках на прямой O_1O_2 , расположенных вне отрезка O_1O_2 (рис. 14.4, *б*). Найдем точку P, в которой эти скорости равны:

$$\omega_2 \cdot O_2P = \omega_1 \cdot O_1P,$$

или

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{14.12}$$

Точка P делит отрезок O_1O_2 внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Такую точку всегда можно найти, если только $\omega_1 \neq \omega_2$.

В каждом из рассмотренных случаев точка P имеет скорость равную нулю, т.е.

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{O_2P} + \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1P} = 0. \qquad (14.13)$$

Найдем теперь скорость произвольной точки M:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_1 \times \left(\overrightarrow{O_1P} + \vec{r}'\right) + \vec{\omega}_2 \times \left(\overrightarrow{O_2P} + \vec{r}'\right).$$

Здесь $\vec{r}'$ – радиус-вектор точки M относительно мгновенного центра скоростей P. Раскрывая скобки в правой части и используя равенство (14.13), получим

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1P} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}' + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{O_2P} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}' = \\ &= \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) \times \vec{r}' = \vec{\Omega} \times \vec{r}'. \end{aligned} \qquad (14.14)$$

где $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Отсюда следует, что ***совокупность двух вращений, происходящих вокруг параллельных осей, но не представляющих собой пары вращений, приводится к одному вращению, мгновенная ось которого делит внутренним или внешним образом расстояние между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Угловая скорость результирующего вращения равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих движений.***

Если угловые скорости направлены в одну сторону, то мгновенная ось вращения расположена между осями O_1z_1 и O_2z_2 и модуль результирующей угловой скорости $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. В случае противоположно направленных вращений мгновенная ось расположена за осью, вокруг которой вращение происходит с большей угловой скоростью и $\vec{\Omega} = \left|\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2\right|$. Результирующая угловая скорость направлена в сторону большей из угловых скоростей.

§ 14.7. Сложение поступательных и вращательных движений

Первый случай. Рассмотрим сначала следующий случай сложного движения: Тело P движется поступательно с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$, а она в свою очередь вращается вокруг оси z_1 неподвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, параллельной скорости $\vec{v}_0$ поступательного движения. Найдем абсолютную скорость некоторой точки M тела (рис. 14.5):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (14.15)$$

Таким образом, абсолютная скорость точки может быть разложена на две составляющие: одну $\vec{v}_0$, параллельную оси z_2, и другую $\vec{v}_e = \vec{\omega} \times \vec{r}$, перпендикулярную плоскости, проходящей через ось z_1 и точку M.

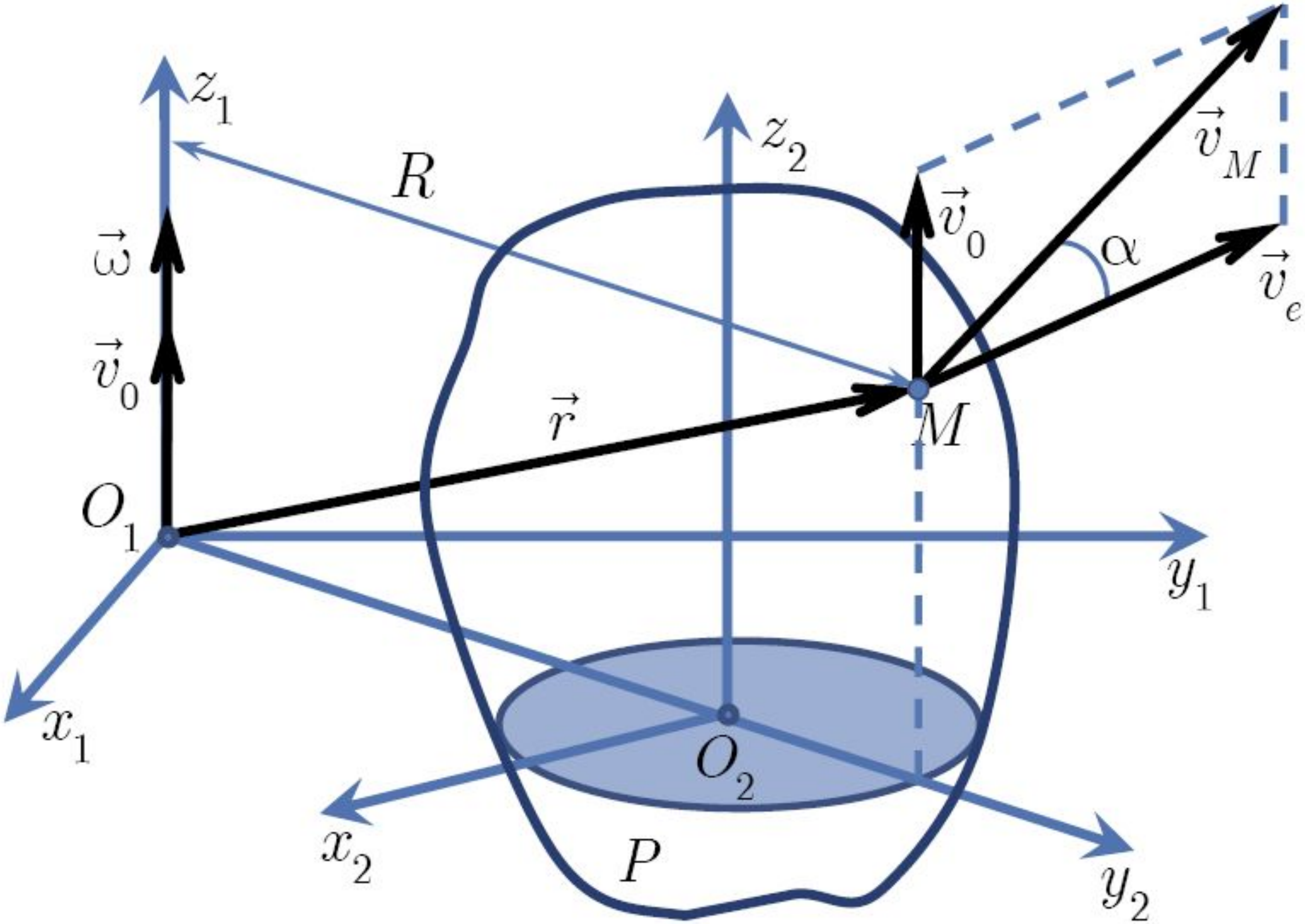


Рис. 14.5

Отсюда следует, что точка M движется по боковой поверхности кругового цилиндра с осью z_1. Касательная к винтовой траектории образует с плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, угол α причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_r}{v_e} = \frac{v_0}{\omega R},$$

где R – радиус цилиндра (см. рис. 14.5).

Время T одного оборота тела в винтовом движении

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Любая точка тела переместится за это время параллельно оси на расстояние, равное

$$h = v_0 T = \frac{2\pi v_0}{\omega}.$$

и называется ***шагом винта***. Величина $p = v_0 / \omega$ называется ***параметром винта***

Рассмотренное сложное движение тела называется ***кинематическим винтом***.

Если скорость $\vec{v}_0$ и угловая скорость $\vec{\omega}$ переменны, то движение тела будет ***мгновенно-винтовым движением***. Естественно, что параметр винта в общем случае также будет переменным.

Второй случай. Скорость поступательного движения перпендикулярна угловой скорости вращательного движения. Тогда мгновенное поступательное движение можно рассматривать как сложное движение – пару вращений. При этом момент пары вращений должен быть равен скорости данного поступательного движения. Плоскость пары вращений должна быть перпендикулярна $\vec{v}_0$ – проведем ее через ось z, (рис. 14.6). Поступательное движение со скоростью $\vec{v}_0$ относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ можно заменить вращением тела с угловой скоростью $\vec{\omega}''$ относительно некоторой новой системы и вращением этой новой системы относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ с угловой скоростью $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}''$. Для упрощения чертежа плоскость $y_2O_2z_2$ проведена перпендикулярно $\vec{v}_0$ через ось z_1.

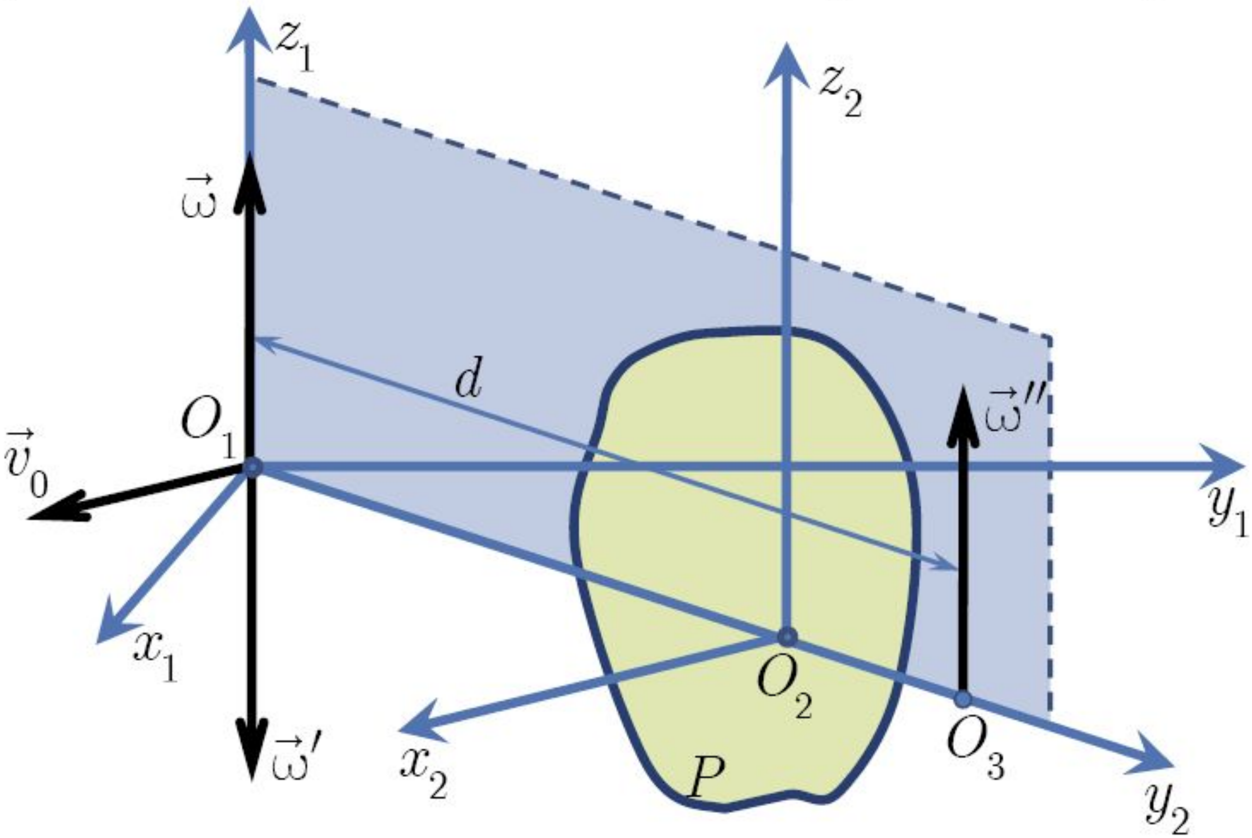


Рис. 14.6

Пусть одно из вращений, составляющих пару, имеет угловую скорость $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$ и происходит вокруг оси, совпадающей с z_1; тогда другое вращение имеет угловую скорость $\vec{\omega}'' = \vec{\omega}'$ и происходит вокруг параллельной оси, проходящей через точку O_3. Для эквивалентности этой пары вращений данному поступательному движению тела достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\vec{v}_0 = \overrightarrow{O_1 O_3} \times \vec{\omega}''.$$

Если $O_1 O_3 \perp O_1 z_1$ (см. рис. 14.14), то отсюда следует, что

$$d = O_1 O_3 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Таким образом, совокупность поступательного и вращательного движений нами приведена к трем вращениям $\left(\vec{\omega}'', \vec{\omega}', \vec{\omega}\right)$, при этом два последних вращения $\left(\vec{\omega}', \vec{\omega}\right)$ эквивалентны покою, так как угловые скорости $\vec{\omega}'$ и $\vec{\omega}$ равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, результирующее движение эквивалентно только одному вращению вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O_2, с угловой скоростью, равной угловой скорости заданного вращения.

Третий случай. Скорость поступательного движения $\vec{v}_0$ направлена под углом φ к угловой скорости $\vec{\omega}$ вращательного движения (рис. 14.7). Этот случай легко приводится к первому. В самом деле, поступательное движение со скоростью $\vec{v}_0$ можно сначала представить как совокупность двух поступательных движений со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, причем $\vec{v}_1 \parallel \vec{\omega}$, $\vec{v}_2 \perp \vec{\omega}$ (рис. 14.7) и $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_0$.

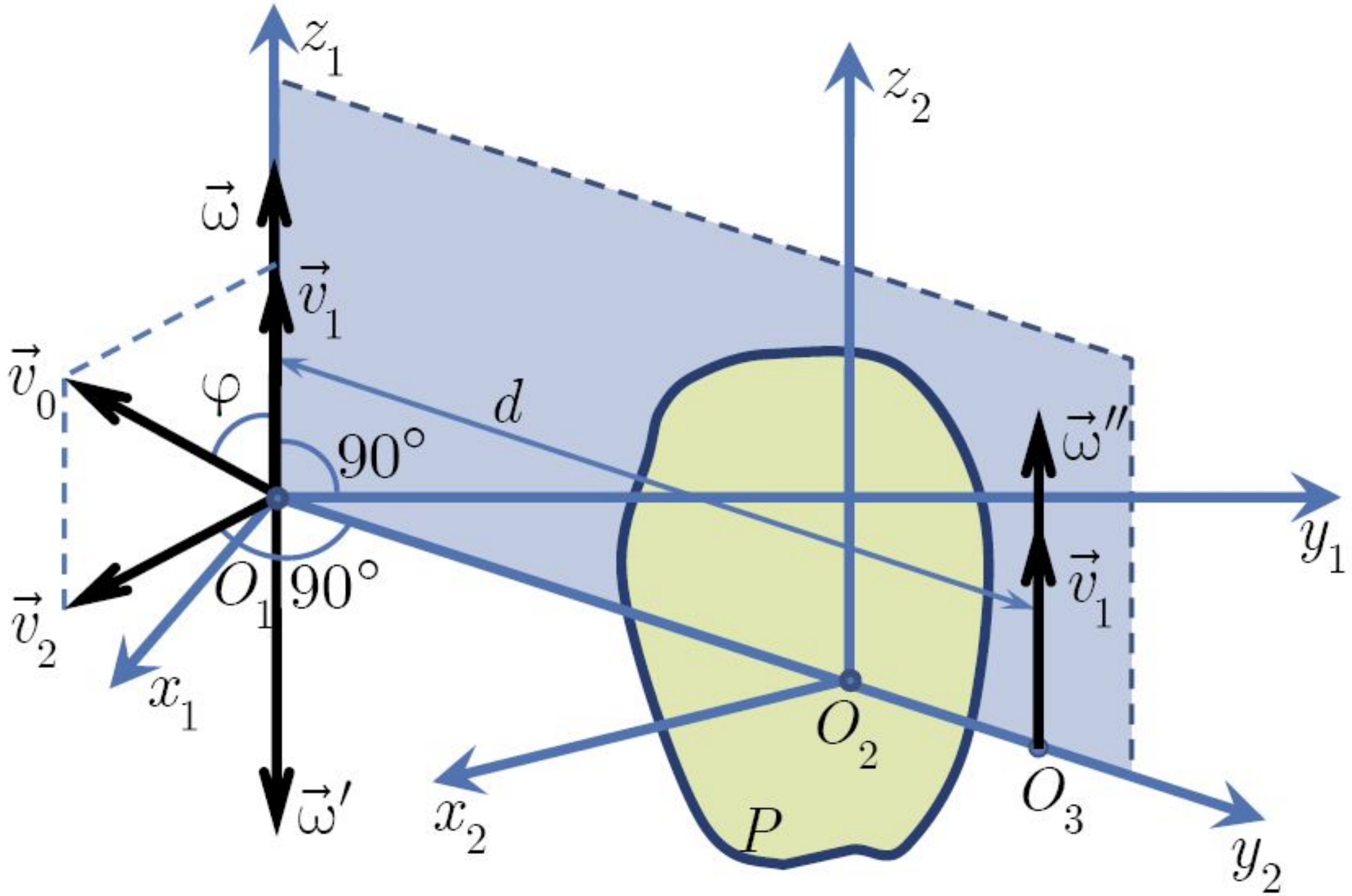


Рис. 14.7

Поступательное движение со скоростью $\vec{v}_2$ (в соответствии со вторым случаем) можно заменить парой вращений $\left(\vec{\omega}', \vec{\omega}''\right)$.

Получилась система четырех движений $\left(\vec{v}_1, \vec{\omega}'', \vec{\omega}', \vec{\omega}\right)$; при этом два последних движения $\left(\vec{\omega}', \vec{\omega}\right)$ эквивалентны покою, следовательно, остается мгновенно-винтовое движение $\left(\vec{v}_1, \vec{\omega}''\right)$.

Если скорости $\vec{v}_0, \vec{\omega}$ постоянны, то движение будет винтовым. При этом ось винта отстоит от оси z на расстоянии

$$d = \frac{v_2}{\omega} = \frac{v_0 \sin\varphi}{\omega}.$$

Шаг винта равен

$$h = \frac{2\pi v_0 \sin\varphi}{\omega}.$$

§ 14.8. Общий случай сложения движений твердого тела

Можно показать (мы не будем останавливаться на доказательстве), что любая система скользящих векторов, независимо от их физической природы, эквивалентна одному скользящему вектору (главному вектору) и одной паре скользящих векторов, момент которой равен главному моменту.

Применительно к сложению движений твердого тела это означает следующее: *если тело участвует одновременно в n вращениях с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots \vec{\omega}_n$ и в m поступательных движениях, скорости которых равны $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ (моменты пар вращений), то вся система этих движений эквивалентна совокупности одного вращательного и одного поступательного движений. Угловая скорость результирующего вращения равна сумме (главному вектору) составляющих угловых скоростей*

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n, \qquad (14.22)$$

а скорость $\vec{v}_A$ результирующего поступательного движения равна сумме (главному моменту) моментов угловых скоростей $\vec{\omega}_i$ относительно центра приведения A и скоростей $\vec{v}_i$ поступательных движений (моментов пар вращения):

$$\begin{aligned}\vec{v}_A = \vec{M}_A\left(\vec{\omega}_1\right) + \vec{M}_A\left(\vec{\omega}_2\right) + \ldots + \vec{M}_A\left(\vec{\omega}_n\right) + \\ + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_m,\end{aligned} \tag{14.23}$$

причем ось вращения проходит через выбранный центр приведения A.

На рис. 14.8 показаны результирующая угловая скорость $\vec{\omega}$ вращательного движения (главный вектор) и результирующая скорость $\vec{v}_A$ (главный момент) поступательного движения. Векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{\omega}$ можно рассматривать так же, как скорость полюса A и угловую скорость вращения тела относительно полюса (§ 12.4).

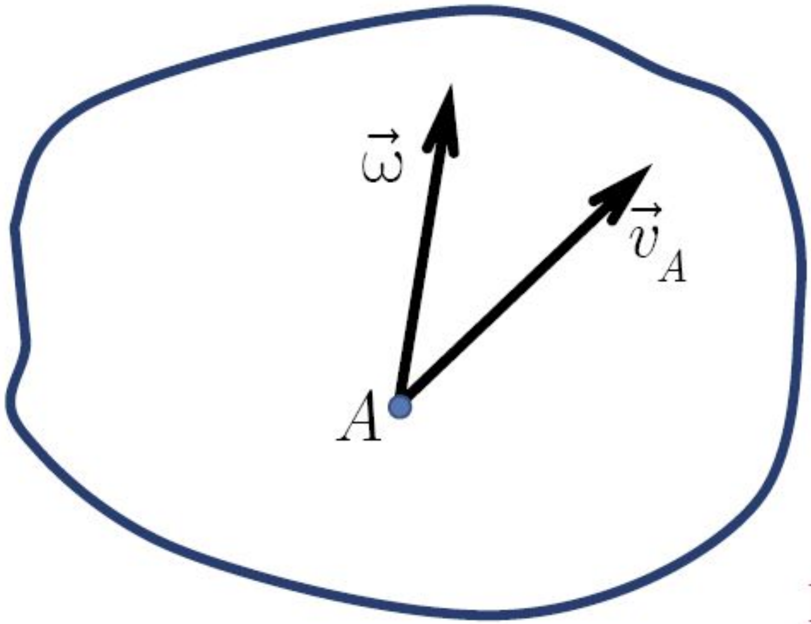


Рис. 14.8

Покажем, что имеются два ***кинематических инварианта***, аналогичных статическим инвариантам. Действительно, из равенства (14.22) следует, что главный вектор $\vec{\omega}$ не зависит от выбора центра приведения A и, следовательно, представляет собой первый кинематический инвариант. По существу, инвариантность главного вектора тождественна с ранее доказанным утверждением о независимости угловой скорости тела от выбора полюса. В более узком смысле под первым инвариантом I_1 будем понимать квадрат модуля главного вектора

$$I_1 = \omega^2 \tag{14.24}$$

Прежде чем перейти ко второму инварианту, заметим, что при переходе к новому центру приведения, например точке B, главный момент $\vec{v}_B$ будет связан с главным моментом $\vec{v}_A$ относительно старого полюса формулой (рис. 14.9)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \times \rho. \tag{14.25}$$

Эту формулу можно получить непосредственно из равенства (14.23). Она также следует из того, что главный момент $\vec{v}_B$ есть скорость точки B твердого тела и определяется формулой (12.20). Умножим скалярно обе части равенства (14.25) на вектор $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} + \left(\omega \times \rho\right) \cdot \vec{\omega}.$$

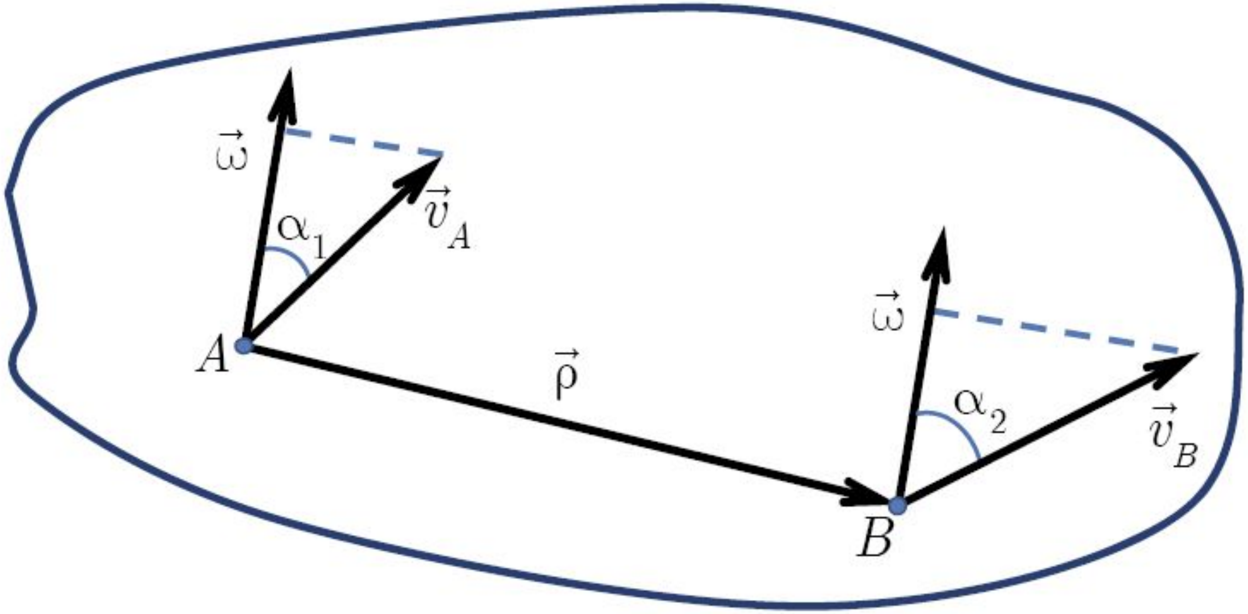


Рис. 14.9

Так как вектор $\omega \times \rho$ перпендикулярен вектору $\vec{\omega}$, то их скалярное произведение равно нулю. Поэтому

$$\vec{v}_A \vec{\omega} = \vec{v}_B \vec{\omega}, \qquad (14.26)$$

т.е. *скалярное произведение главного вектора* $\vec{\omega}$ *на главный момент не зависит от центра приведения, иначе говоря, скалярное произведение скорости точки твердого тела на угловую скорость тела в каждый момент времени одинаково для всех точек тела.*

Вторым кинематическим инвариантом I_2 *называется скалярное произведение скорости* $\vec{v}$ *любой точки тела на его угловую скорость* $\vec{\omega}$

$$I_2 = \vec{v}\vec{\omega}. \tag{14.27}$$

Запишем равенство (14.26) в следующей форме;

$$v_A \omega \cos\alpha_1 = v_B \omega \cos\alpha_2.$$

Если $\omega \neq 0$, то

$$v_A \cos\alpha_1 = v_B \cos\alpha_2.$$

Каждое из этих произведений представляет проекцию главного момента относительно соответствующей точки (скорости соответствующей точки) на направление главного вектора (угловой скорости тела). Следовательно, если угловая скорость тела (главный вектор) не равна нулю, то проекция скорости точки тела (главного момента) на направление угловой скорости тела не зависит от выбора точки.

Покажем, что если второй кинематический инвариант не равен нулю, то совокупность всех движений, в которых участвует тело, может быть сведена к мгновенно-винтовому движению. Действительно, если $I_2 \neq 0$, то скорость $\vec{v}_A$ любой точки A тела и угловая скорость его отличны от нуля; кроме того, в этом случае угол α между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{v}_A$ не равен $\pi / 2$. Ранее мы получили, что в этом случае имеется такая точка B , скорость которой $\vec{v}_B$ параллельна угловой скорости $\vec{\omega}$ тела (рис. 14.10). Для этой точки должно выполняться равенство

$$\vec{v}_B = p\vec{\omega},$$

или, учитывая формулу (14.25),

$$\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = p\vec{\omega},. \qquad (14.28)$$

где p – некоторый скаляр, а $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки B в системе координат $Axyz$, жестко связанной с телом; $\vec{v}_B$ – скорость точки B.

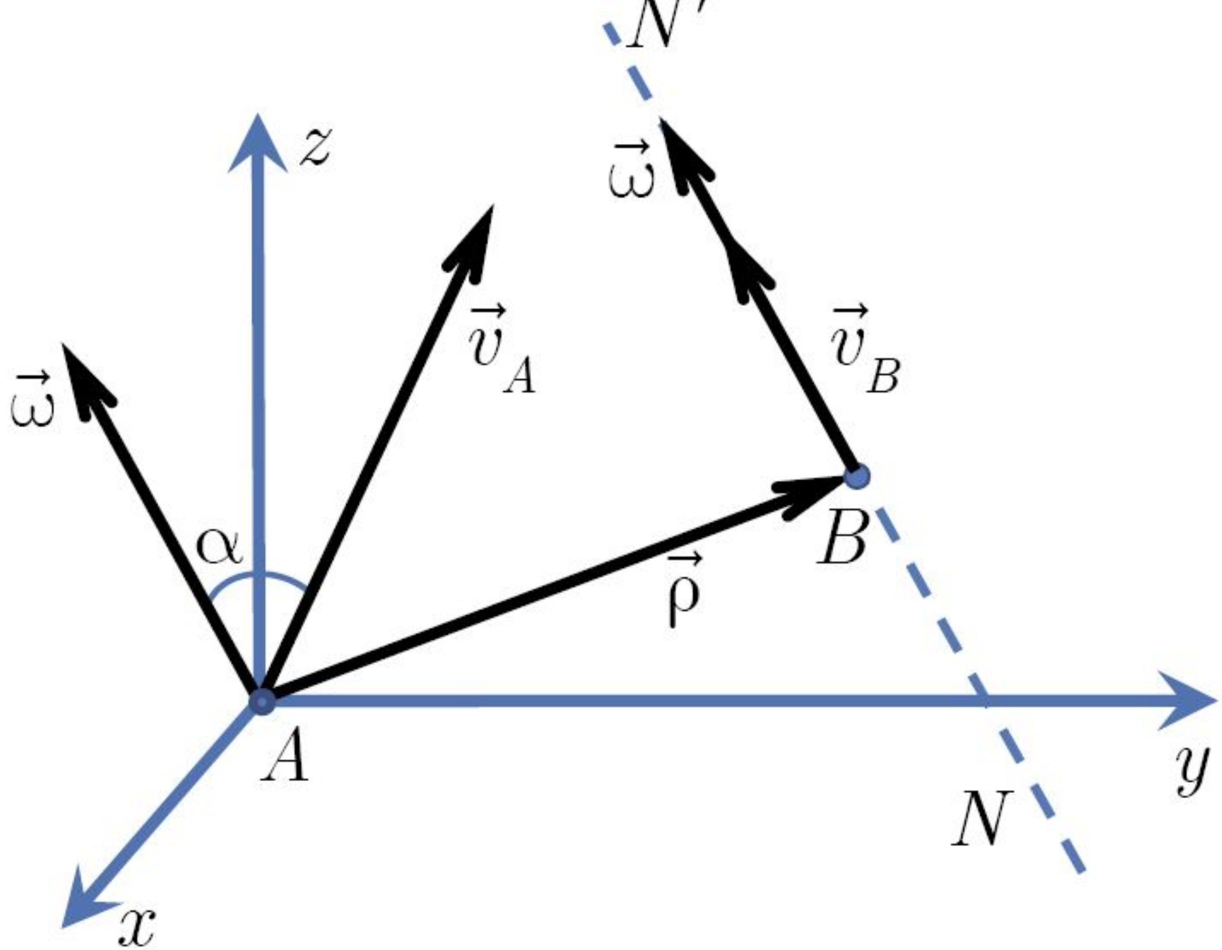


Рис. 14.10

Очевидно, что равенству (14.28) удовлетворяет радиус-вектор $\vec{\rho}$ любой точки, лежащей на прямой NN', проходящей через точку B и параллельной вектору $\vec{\omega}$. Следовательно, равенство (14.28) представляет векторное уравнение прямой линии, все точки которой в данный момент времени имеют скорости, параллельные угловой скорости $\vec{\omega}$. Прямая NN' называется ***мгновенной винтовой осью тела;*** совокупность угловой скорости $\vec{\omega}$ тела и скорости $\vec{v}$ любой точки мгновенной винтовой оси называется ***кинематическим винтом,*** а число p в равенстве (14.28) – ***параметром кинематического винта***. Происхождение этих названий очевидно: винтовое движение состоит из вращения вокруг некоторой оси и одновременного поступательного перемещения вдоль этой оси. Таким образом, в самом общем случае скорости точек твердого тела распределяются так, как если бы тело совершало мгновенно-винтовое движение.