ЛЕКЦИЯ №3

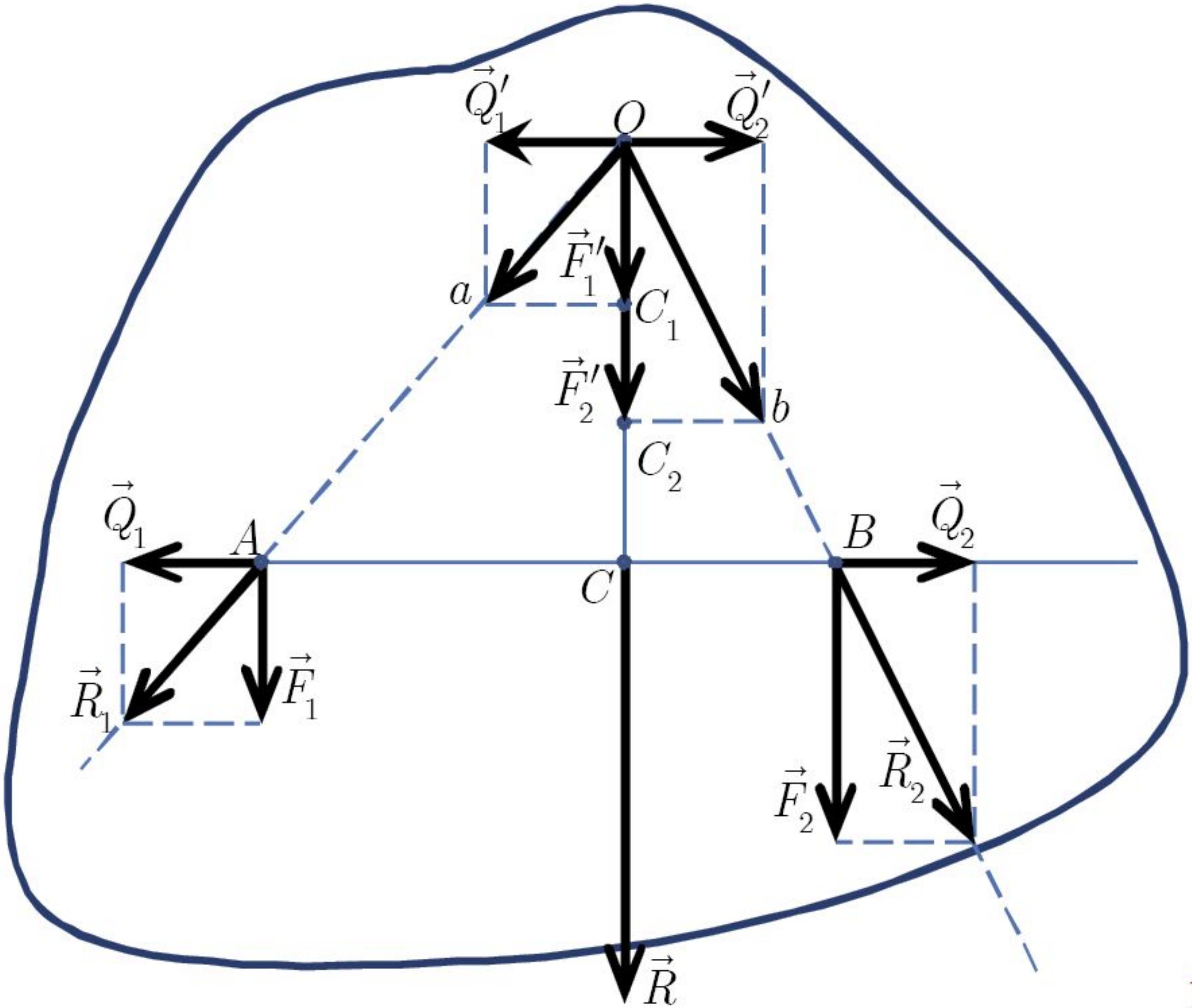
СТАТИКА

Глава III
ТЕОРИЯ ПАР

§ 3.1. Сложение двух параллельных сил

Настоящий параграф носит вспомогательный характер и необходим для дальнейшего построения теории.

Пусть параллельные и одинаково направленные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложены к точкам A и B тела и нужно найти их равнодействующую (рис. 3.1).



$\vec{Q}'_1$
O
$\vec{Q}'_2$
$\vec{F}'_1$
a
C_1
$\vec{F}'_2$
b
C_2
$\vec{Q}_1$
A
B
$\vec{Q}_2$
C
$\vec{R}_1$
$\vec{F}_1$
$\vec{R}_2$
$\vec{F}_2$
$\vec{R}$

Рис. 3.1

Приложим к точкам A и B равные по модулю и противоположно направленные силы $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$ (их модуль может быть любым); такое добавление можно делать па основании **аксиомы 2**. Тогда в точках A и B мы получим две силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$:

$$\vec{R}_1 \sim \left(\vec{F}_1, \vec{Q}_1\right) \text{ и } \vec{R}_2 \sim \left(\vec{F}_2, \vec{Q}_2\right).$$

Линии действия этих сил пересекаются в некоторой точке O. Перенесем силы $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$ в точку O и разложим каждую на составляющие:

$$\vec{R}_1 \sim \left(\vec{F}_1', \vec{Q}_1'\right) \text{ и } \vec{R}_2 \sim \left(\vec{F}_2', \vec{Q}_2'\right).$$

Из построения видно, что $\vec{Q}_1' = \vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2' = \vec{Q}_2$ следовательно, $\vec{Q}_1' = -\vec{Q}_2'$ и две эти силы согласно **аксиоме 2** можно отбросить.

Кроме того, $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$, $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$. Силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ действуют по одной прямой, и их можно заменить одной силой

$$\vec{R} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2', \tag{3.1}$$

которая и будет искомой равнодействующей. Модуль равнодействующей равен

$$R = F_1 + F_2.$$

Очевидно, что линия действия равнодействующей параллельна линиям действия слагаемых. Из подобия треугольников Oac_1 и OAC, а, также Obc_2 и OBC получим соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \tag{3.2}$$

которым определяется точка приложения равнодействующей $\vec{R}$.

Таким образом, *система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам и направленную в ту же сторону, причем ее модуль делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.*

Рассмотрим теперь задачу о сложении двух параллельных сил, направленных в разные стороны и не равных друг другу по модулю. Пусть даны две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, (рис. 3.2), причем для определенности будем считать, что $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$.

Пользуясь формулами (3.1) и (3.2), можно силу $\vec{F}_1$ разложить на две составляющие, $\vec{F}_1'$ и $\vec{R}$, направленные в сторону силы $\vec{F}_1$. Сделаем это так, чтобы сила $\vec{F}_2'$ оказалась приложенной к точке B, и положим $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$.

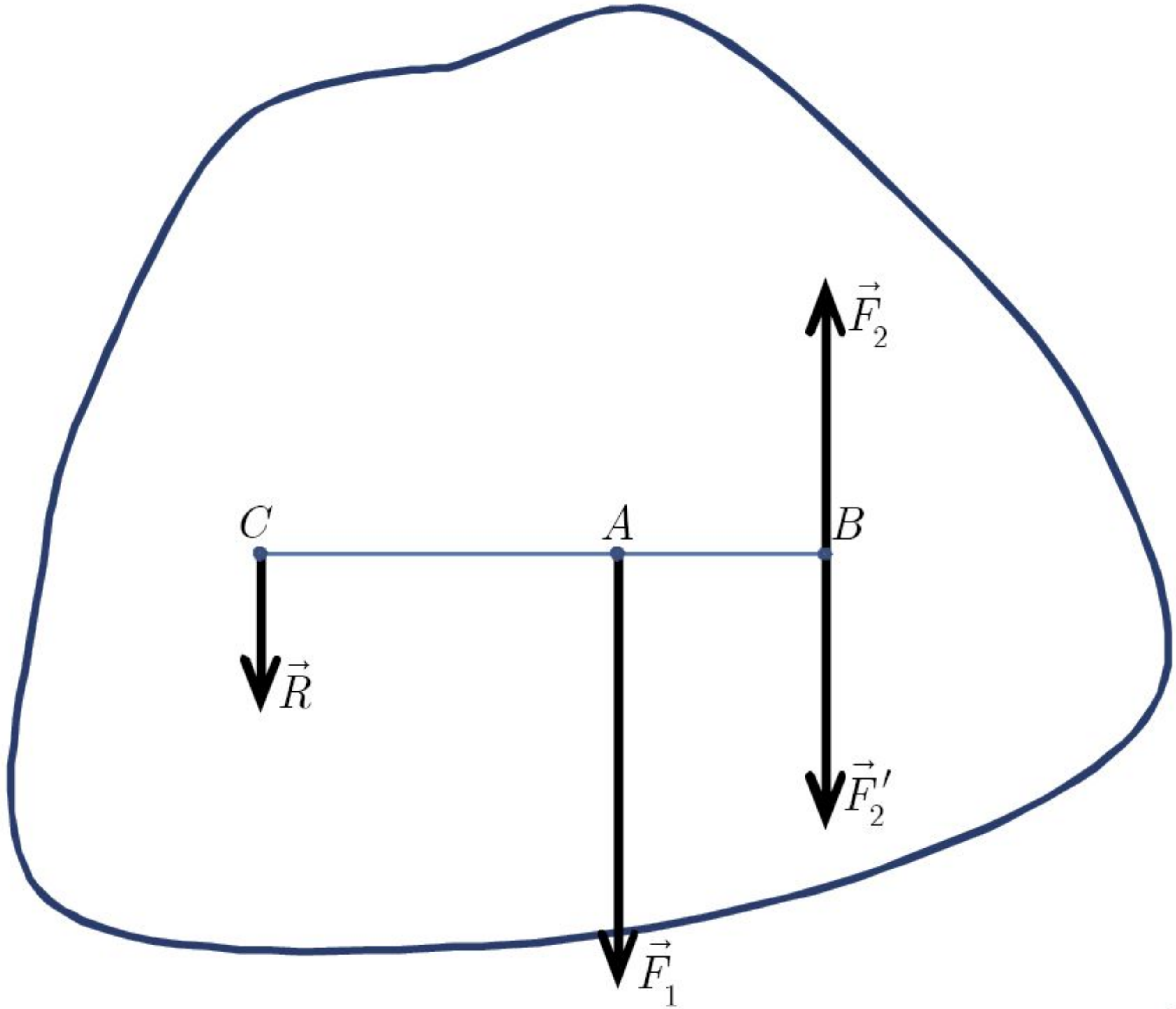


Рис. 3.2

Таким образом, $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \sim \left(\vec{R}, \vec{F}_2', \vec{F}_2\right)$. Теперь заметим, что силы $\vec{F}_2$, $\vec{F}_2'$ можно отбросить как эквивалентные нулю (**аксиома 2**), следовательно, $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \sim \vec{R}$, т.е. сила $\vec{R}$ и является равнодействующей. Определим силу $\vec{R}$, удовлетворяющую такому разложению силы $\vec{F}_1$. Формулы (3.1) и (3.2) дают

$$\vec{R} + \vec{F}_2' = \vec{F}_1, \qquad \frac{R}{F_2} = \frac{AB}{AC}. \tag{3.3}$$

Отсюда следует

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

и так как силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены в разные стороны, то

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2. \tag{3.4}$$

Подставив это выражение во вторую формулу (3.3), получим после простых преобразований

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Из двух последних формул следует, что *две не равные по модулю противоположно направленные параллельные силы имеют равнодействующую, параллельную этим силам, направленную в сторону большей по модулю силы, причем ее модуль равен разности модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.*

Заметим, что равнодействующая в этом случае всегда расположена за большей из двух сил.

Прежде чем рассмотреть случай двух равных по модулю, параллельных, но противоположно направленных сил, заметим, что из равенств (3.3) и (3.4) следует

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \tag{3.5}$$

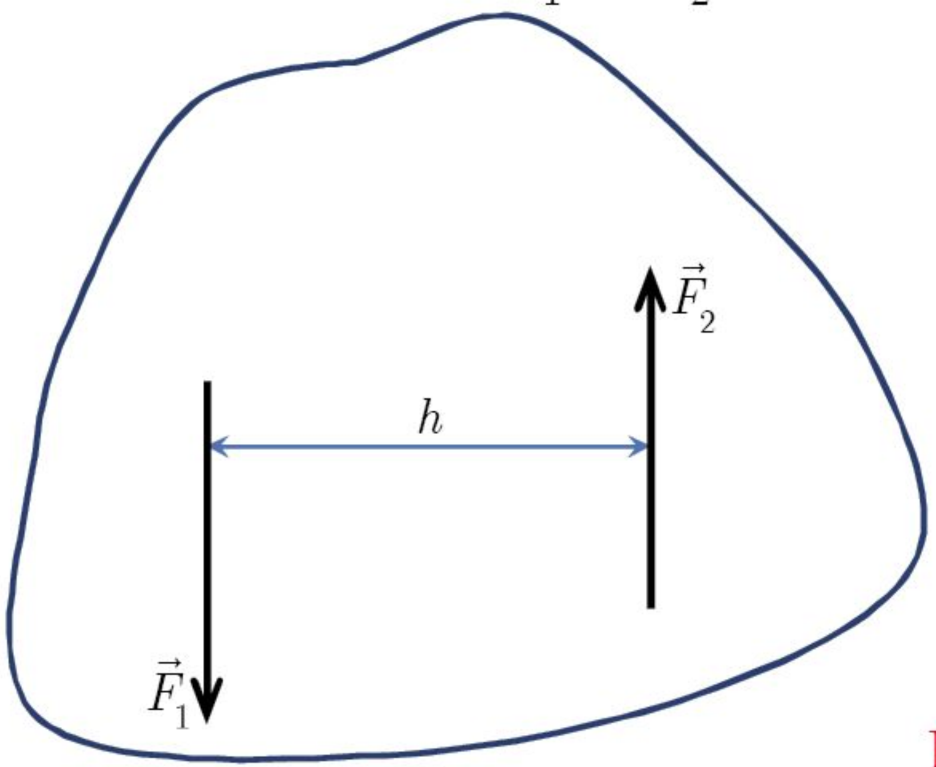


Рис. 3.3

Рассмотрим теперь случай двух параллельных, равных по модулю, но противоположно направленных сил (рис. 3.3).

Эта система сил называется *парой сил* или просто *парой* и обозначается символом $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$.

Рассуждения, которыми мы пользовались при выводе соотношений (3.4) и (3.5), здесь непригодны. Формальное применение этих соотношений приводит к заключению, что в данном случае модуль равнодействующей равен нулю, а линия ее действия находится на бесконечном удалении от линий действия слагаемых сил. Чтобы понять природу этого результата, вновь вернемся к случаю, когда слагаемые силы имеют различные модули, и предположим, что модуль F_2 постепенно возрастает, приближаясь к значению модуля F_1. Тогда разность модулей будет стремиться к нулю, а система сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ – к паре. При этом модуль равнодействующей будет неограниченно приближаться к нулю (см. (3.4)), а линия ее действия – неограниченно удаляться от линий действия слагаемых (см. (3.5)).

Как следует из сказанного, для пары сил понятие равнодействующей лишено смысла, так как *она представляет собой неуравновешенную систему, которая не может быть заменена одной силой.*

Говорят, что пара сил не имеет равнодействующей.

Таким образом, пара сил является неприводимым (не упрощаемым) элементом статики; наряду с силой она является вторым самостоятельным элементом статики.

В следующих параграфах рассматриваются свойства пар сил, а также правила действия над системами пар.

§ 3.2. Момент силы относительно точки и относительно оси. Момент пары сил

Прежде чем перейти к исследованию свойств пары сил, введем понятие момента силы, которое необходимо для дальнейшего.

Моментом силы относительно какой-либо точки (центра) называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Момент силы характеризует ее вращательное действие.

Если O – точка, относительно которой находится момент силы $\vec{F}$, то момент силы обозначается символом $\vec{M}_{\mathrm{O}}\left(\vec{F}\right)$. Покажем, что если точка приложения силы $\vec{F}$ определяется радиусом-вектором $\vec{r}$ относительно O, то справедливо соотношение

$$\vec{M}_{\mathrm{O}}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.6}$$

Согласно этому соотношению момент *силы равен векторному произведению вектора* $\vec{r}$ *на вектор* $\vec{F}$.

В самом деле, модуль векторного произведения равен

$$\vec{M}_{\mathrm{O}}\left(\vec{F}\right) = rF\sin\alpha = \vec{F}h, \tag{3.7}$$

где h – плечо силы (рис. 3.4).

Заметим также, что вектор $\vec{M}_{\mathrm{O}}\left(\vec{F}\right)$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\vec{r}$ к направлению вектора $\vec{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, формула (3.6) полностью определяет модуль и направление момента силы $\vec{F}$.

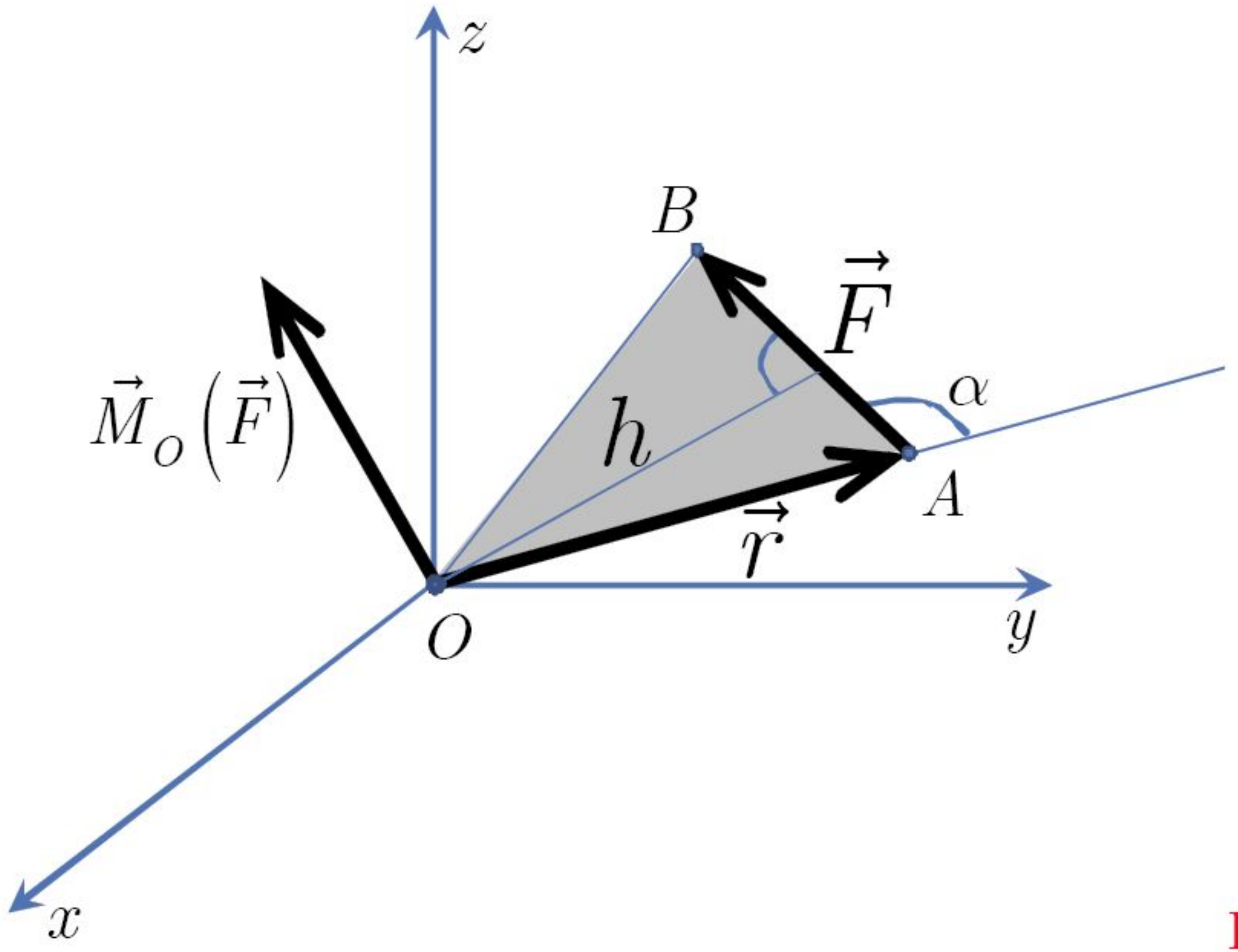


Рис. 3.4

Иногда формулу (3.7) полезно записывать в виде

$$M_{\text{O}}\left(\vec{F}\right) = 2S. \tag{3.8}$$

где S – площадь треугольника OAB.

Пусть x, y, z – координаты точки приложения силы, а F_x, F_y, F_z – проекции силы на координатные оси. Тогда, если точка О находится в начале координат, момент силы выражается следующим образом:

$$\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \tag{3.9}$$
$$= \left(yF_z - zF_y\right)\vec{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}.$$

Отсюда следует, что проекции момента силы на координатные оси определяются формулами:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{O}x}\left(\vec{F}\right) &= yF_z - zF_y,\\
M_{\mathrm{O}y}\left(\vec{F}\right) &= zF_x - xF_z,\\
M_{\mathrm{O}z}\left(\vec{F}\right) &= xF_y - yF_x.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Введем теперь понятие проекции силы на плоскость.

Пусть даны сила $\vec{F}$ и некоторая плоскость. Опустим из начала и конца вектора силы перпендикуляры на эту плоскость (рис. 3.5).

Проекцией силы на плоскость называется вектор, начало и конец которого совпадают с проекцией начала и проекцией конца силы на эту плоскость.

Если в качестве рассматриваемой плоскости принять плоскость xOy, то проекцией силы $\vec{F}$ на эту плоскость будет вектор $\vec{F}_{xy}$ (рис. 3.5).

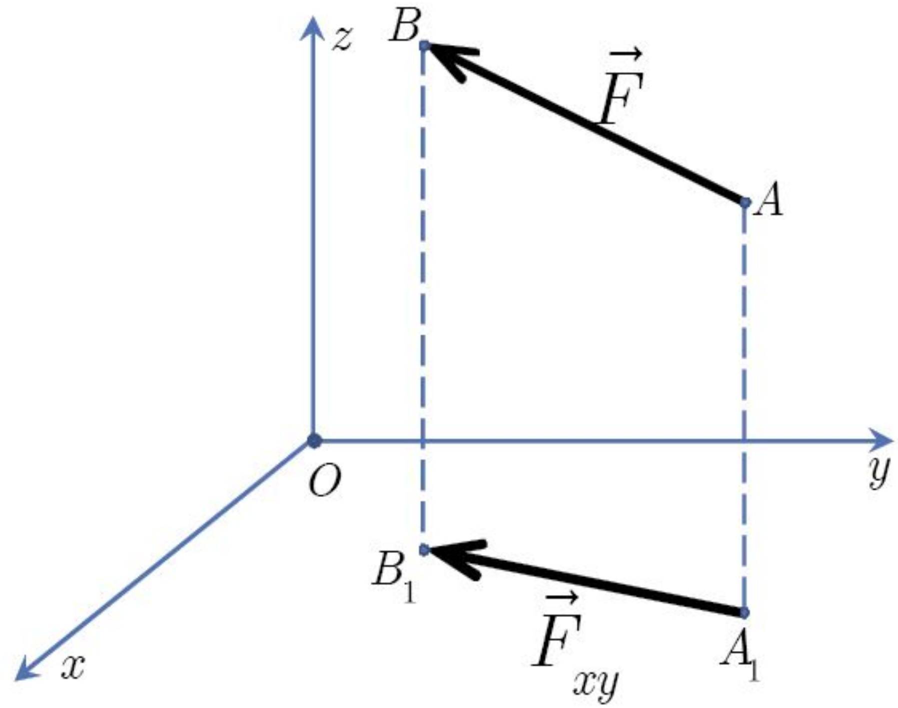


Рис. 3.5

Момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки O (точки пересечения оси z с плоскостью xOy) может быть вычислен по формуле (3.9), если в ней положить $z = 0$, $F_z = 0$. Получим

$$\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}_{xy}\right) = \left(xF_y - yF_x\right)\vec{k}.$$

Таким образом, этот момент направлен вдоль оси z, а его проекция на ось z в точности совпадает с проекцией на ту же ось момента силы $\vec{F}$ относительно точки O. Другими словами,

$$M_{\text{O}z}\left(\vec{F}\right) = M_{\text{O}z}\left(\vec{F}_{xy}\right) = xF_y - yF_x. \tag{3.11}$$

Очевидно, что тот же результат можно получить, если спроектировать силу $\vec{F}$ на любую другую плоскость, параллельную плоскости xOy. При этом точка пересечения оси z с плоскостью будет уже иной (обозначим новую точку пересечения через O_1). Однако все входящие в правую часть равенства (3.11) величины x, y, F_x, F_y останутся неизменными, и, следовательно, можно записать

$$M_{\mathrm{O}z}\left(\vec{F}\right) = M_{\mathrm{O}_1 z}\left(\vec{F}_{xy}\right).$$

Другими словами, *проекция момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, не зависит от выбора точки на оси*.

Поэтому в дальнейшем вместо символа $M_{0z}\left(\vec{F}\right)$ будем применять символ $M_z\left(\vec{F}\right)$. Эта проекция момента называется *моментом силы относительно оси* z.

Вычисление момента силы относительно оси часто бывает удобнее производить посредством проектирования силы $\vec{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси, и вычисления величины $M_z\left(\vec{F}_{xy}\right)$.

В соответствии с формулой (3.7) и учитывая знак проекции, будем иметь

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_z\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm F_{xy} h^{*}. \qquad (3.12)$$

Здесь h^* – плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки O (рис. 3.6); если наблюдатель видит со стороны положительного направления оси z, что сила $\vec{F}_{xy}$ стремится повернуть тело вокруг оси z против хода часовой стрелки, то берется знак «**плюс**», а в противном случае – знак «**минус**».

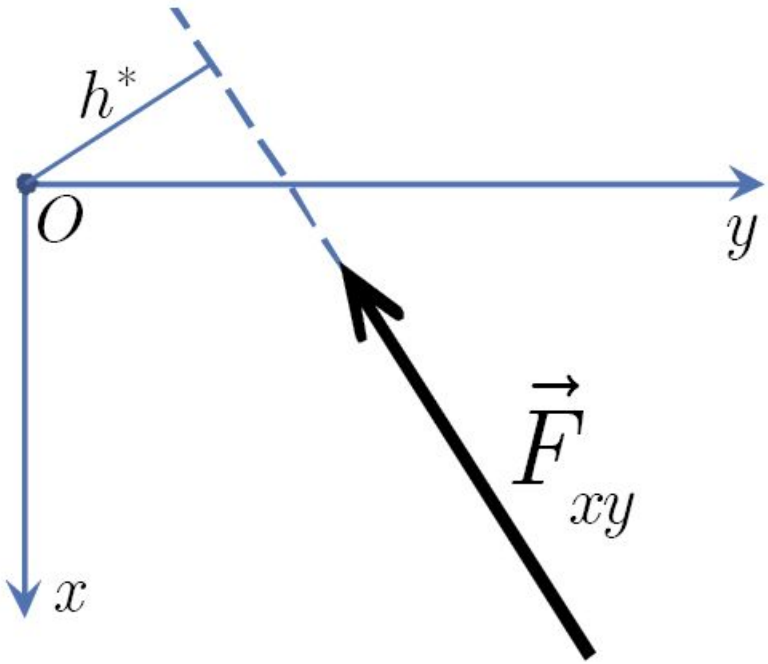


Рис. 3.6

Формула (3.12) дает возможность сформулировать следующее правило для вычисления момента силы относительно оси. Для этого нужно:

1) *Выбрать на оси произвольную точку и построить плоскость, перпендикулярную оси;*

2) *Спроектировать на эту плоскость силу;*

3) *Определить плечо проекции силы* h^*.

Момент силы относительно оси равен произведению модуля проекции силы на ее плечо, взятому с соответствующим знаком (см. изложенное выше правило).

Из формулы (3.12) следует, что *момент силы относительно оси равен нулю* в двух случаях:

1) Когда проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю, т.е. *когда сила и ось параллельны*;

2) Когда плечо проекции h^* равно нулю, т.е. когда *линия действия силы пересекает ось*.

Оба эти случая можно объединить в один: *момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда линия действия силы и ось находятся в одной плоскости*.

Введем теперь понятие **момента пары**.

Найдем сначала, чему равна сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки. Пусть O – произвольная точка пространства (рис. 3.8), а $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ – силы, составляющие пару.

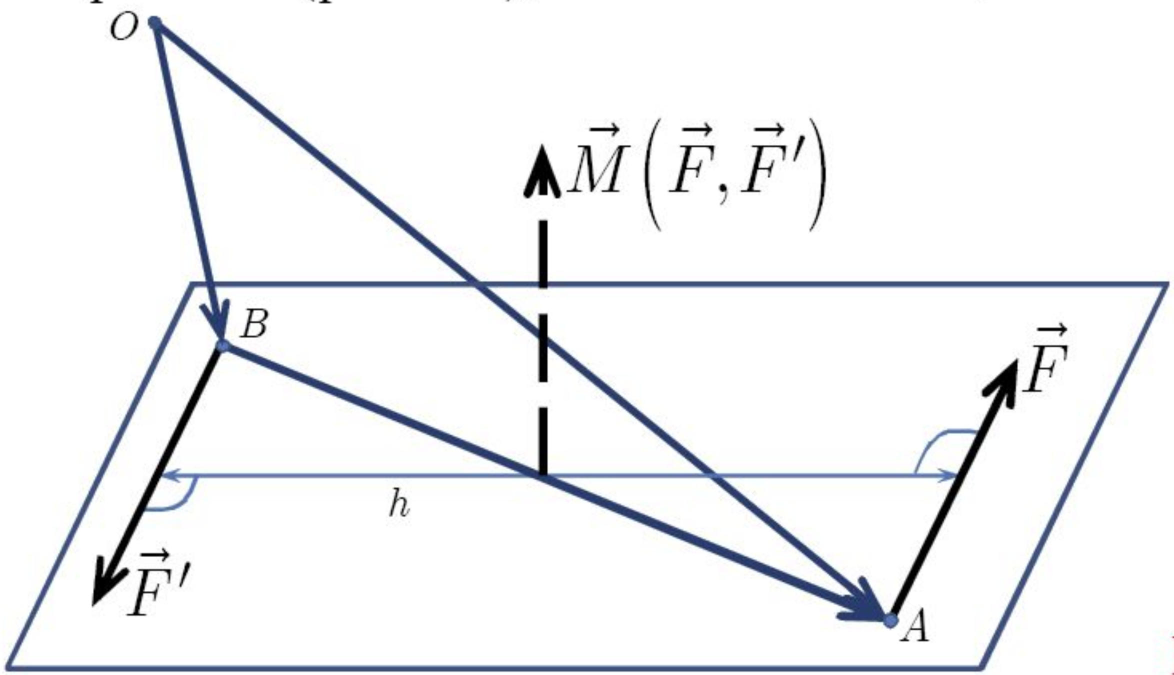


Рис. 3.8

Тогда

$$\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}\right)=\overline{OA}\times\vec{F},\qquad \vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}'\right)=\overline{OB}\times\vec{F}'$$

Откуда

$$\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}\right)+\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}'\right)=\overline{OA}\times\vec{F}+\overline{OB}\times\vec{F}',$$

но так как $\vec{F}'=-\vec{F}$, то

$$\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}\right)+\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}'\right)=\overline{OA}\times\vec{F}-\overline{OB}\times\vec{F}=\left(\overline{OA}-\overline{OB}\right)\times\vec{F}$$

Принимая во внимание равенство $\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$, окончательно находим:

$$\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}\right)+\vec{M}_{\text{O}}\left(\vec{F}'\right)=\overline{BA}\times\vec{F}.$$

Следовательно, *сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от положения точки, относительно которой берутся моменты.*

Векторное произведение $\overline{BA} \times \vec{F}$ и называется *моментом пары*. Обозначается момент пары символом $\vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right)$, причем

$$\vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right) = \overline{BA} \times \vec{F} = \overline{AB} \times \vec{F}',$$

или, короче,

$$\vec{M} = \overline{BA} \times \vec{F} = \overline{AB} \times \vec{F}'. \qquad (3.13)$$

Рассматривая правую часть этого равенства, замечаем, что *момент пары представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары (т.е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил, составляющих пару) и направленный в ту сторону, откуда «вращение» пары видно происходящим против хода часовой стрелки.*

Если h – плечо пары, то $\vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}'\right) = h\vec{F}$.

Из самого определения видно, что момент пары сил представляет собой свободный вектор, линия действия которого не определена (дополнительное обоснование этого замечания следует из **теорем 2** и **3** этой главы).

Для того чтобы пара сил составляла уравновешенную систему (систему сил, эквивалентную нулю), необходимо и достаточно, чтобы момент пары равнялся нулю.

Действительно, если момент пары равен нулю, $\vec{M} = h\vec{F} = 0$, то либо $F = 0$, т.е. нет сил, либо плечо пары h равно нулю. Но в этом случае силы пары будут действовать по одной прямой, так как они равны по модулю и направлены в противоположные стороны, то на основании **аксиомы 1** они составят уравновешенную систему.

Обратно, если две силы, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, составляющие пару, уравновешены, то на основании той же **аксиомы 1** они действуют по одной прямой. Но в этом случае плечо пары A равно нулю и, следовательно, $\vec{M} = h\vec{F} = 0$.

§ 3.3. Теоремы о парах

Докажем три теоремы, с помощью которых становятся возможными эквивалентные преобразования пар. При всех рассуждениях следует помнить, что они относятся к парам, действующим на какое-либо одно твердое тело.

Теорема 1. ***Две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар.***

Для доказательства этой теоремы рассмотрим две пары $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ и

$\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ (рис. 3.9) и перенесем точки приложения всех сил вдоль линий их действия в точки A и B соответственно.

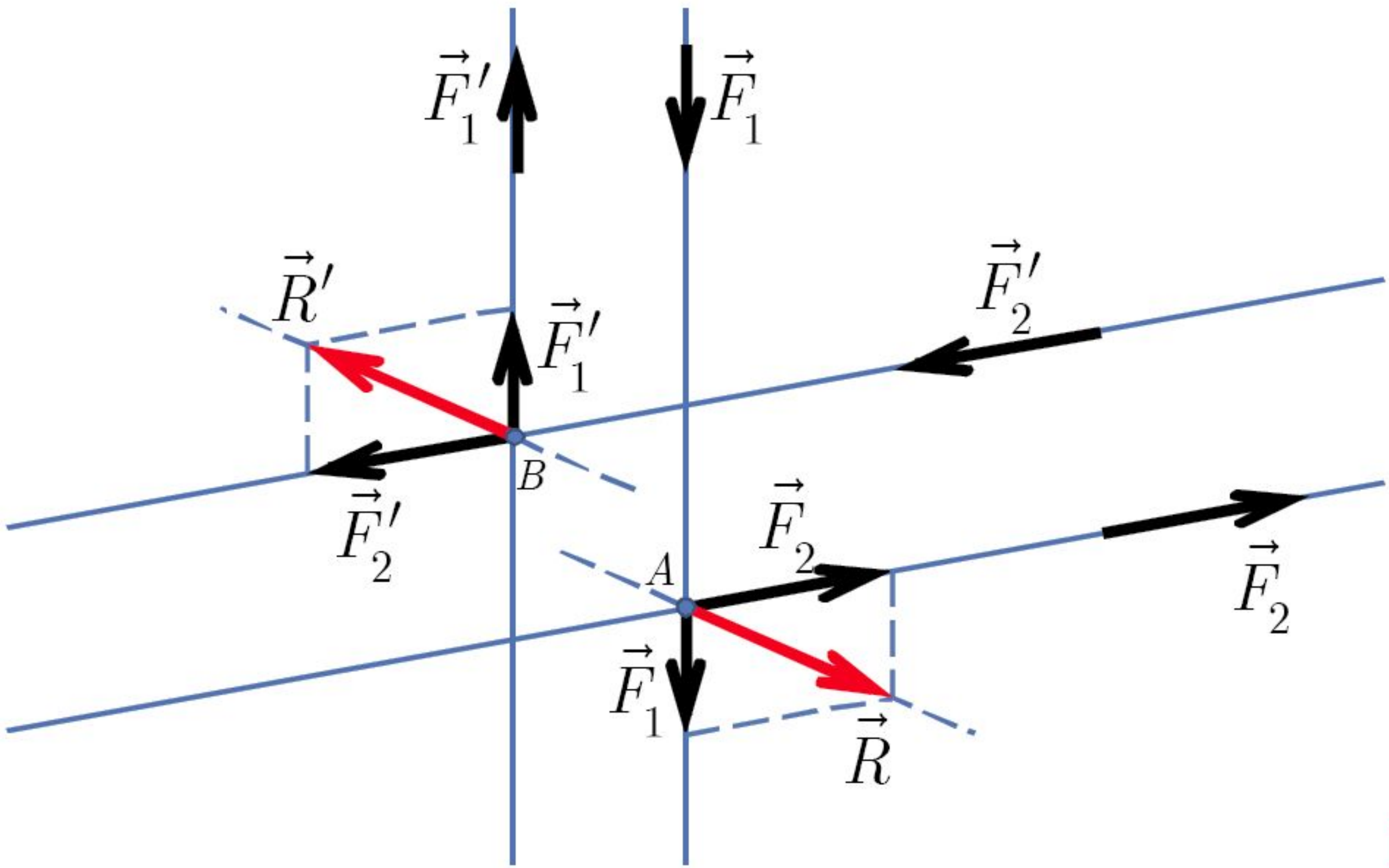


Рис. 3.9

Складывая силы по **аксиоме 3**, получим

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \text{ и } \vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2', \text{ но } \vec{F}_1' = -\vec{F}_1 \text{ и } \vec{F}_2' = -\vec{F}_2.$$

Следовательно, $\vec{R} = -\vec{R}'$, т.е. силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ образуют пару.

Найдем момент этой пары, воспользовавшись формулой (3.13):

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}\left(\vec{R}, \vec{R}'\right) = \overline{BA} \times \vec{R} = \overline{BA} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = \\ &= \overline{BA} \times \vec{F}_1 + \overline{BA} \times \vec{F}_2.\end{aligned} \tag{3.14}$$

При переносе сил, составляющих пару, вдоль линии их действия ни плечо, ни направление вращения пары не меняются, следовательно, не меняется и момент пары. Значит,

$$\overline{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) = \vec{M}_1, \quad \overline{BA} \times \vec{F}_2 = \vec{M}\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) = \vec{M}_2,$$

и формула (3.14) примет вид

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \tag{3.15}$$

что и доказывает справедливость сформулированной выше теоремы.

Сделаем к ней два замечания.

1. *Линии действия сил, составляющих пары, могут оказаться параллельными.* Теорема остается справедливой и в этом случае, но для ее доказательства следует воспользоваться правилом сложения параллельных сил.

2. После сложения может получиться, что $\vec{M}\left(\vec{R}, \vec{R}'\right) = 0$; на основании сделанного ранее замечания из этого следует, что совокупность двух пар $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) \sim 0.$

Теорема 2. ***Две пары, имеющие равные моменты, эквивалентны.***

Пусть на тело в плоскости I действует пара $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ с моментом $\vec{M}_1$. Покажем, что эту пару можно заменить другой парой $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$, расположенной в плоскости II, если только ее момент $\vec{M}_2$ равен $\vec{M}_1$ (согласно определению (см. § 1.1) это и будет означать, что пары $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ и $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ эквивалентны). Прежде всего, заметим, что плоскости I и II должны быть параллельны, в частности, они могут совпадать. Действительно, из параллельности моментов $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ (в нашем случае $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$) следует, что плоскости действия пар, перпендикулярные моментам, также параллельны.

Введем в рассмотрение новую пару $\left(\vec{F}_3, \vec{F}_3'\right)$ и приложим ее вместе с парой $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ к телу, расположив обе пары в плоскости II. Для этого согласно **аксиоме 2** нужно подобрать пару $\left(\vec{F}_3, \vec{F}_3'\right)$ с моментом $\vec{M}_3$ так, чтобы приложенная система сил $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3'\right)$ была уравновешена. Это можно сделать, например, следующим образом: положим $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_3' = -\vec{F}_1$, и совместим точки приложения этих сил с проекциями A_1 и B_1 точек A и B на плоскость II (см. рис. 3.10).

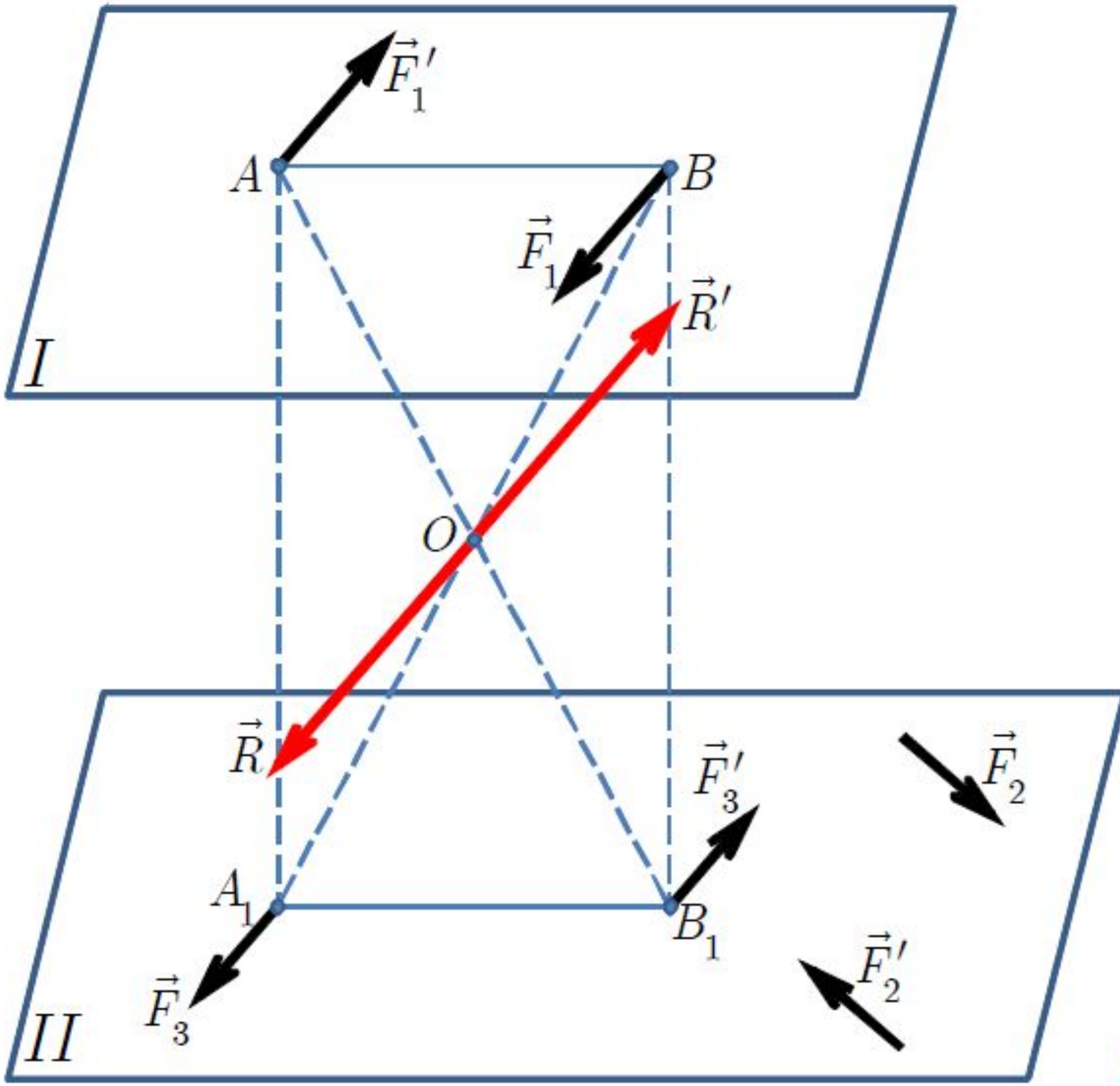


Рис. 3.10

В соответствии с построением будем иметь: $\vec{M}_3 = -\vec{M}_1$ или, учитывая, что

$$\vec{M}_2 + \vec{M}_3 = 0.$$

Принимая во внимание второе замечание к предыдущей теореме, получим $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3'\right) \sim 0.$

Таким образом, пары $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ и $\left(\vec{F}_3, \vec{F}_3'\right)$ взаимно уравновешены и присоединение их к телу не нарушает его состояния (**аксиома 2**), так что

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) \sim \left(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3'\right). \tag{3.16}$$

С другой стороны, силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$, а также $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_3'$ можно сложить по правилу сложения параллельных сил, направленных в одну сторону. По модулю все эти силы равны друг другу, поэтому их равнодействующие $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ должны быть приложены в точке пересечения диагоналей прямоугольника ABB_1A_1.

Кроме того, они равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Это означает, что они составляют систему, эквивалентную нулю. Итак,

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_3, \vec{F}_3'\right) \sim \left(\vec{R}, \vec{R}'\right) \sim 0.$$

Теперь мы можем записать

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2', \vec{F}_3, \vec{F}_3'\right) \sim \left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right). \tag{3.17}$$

Сравнивая соотношения (3.16) и (3.17), получим $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right) \sim \left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$, что и требовалось доказать.

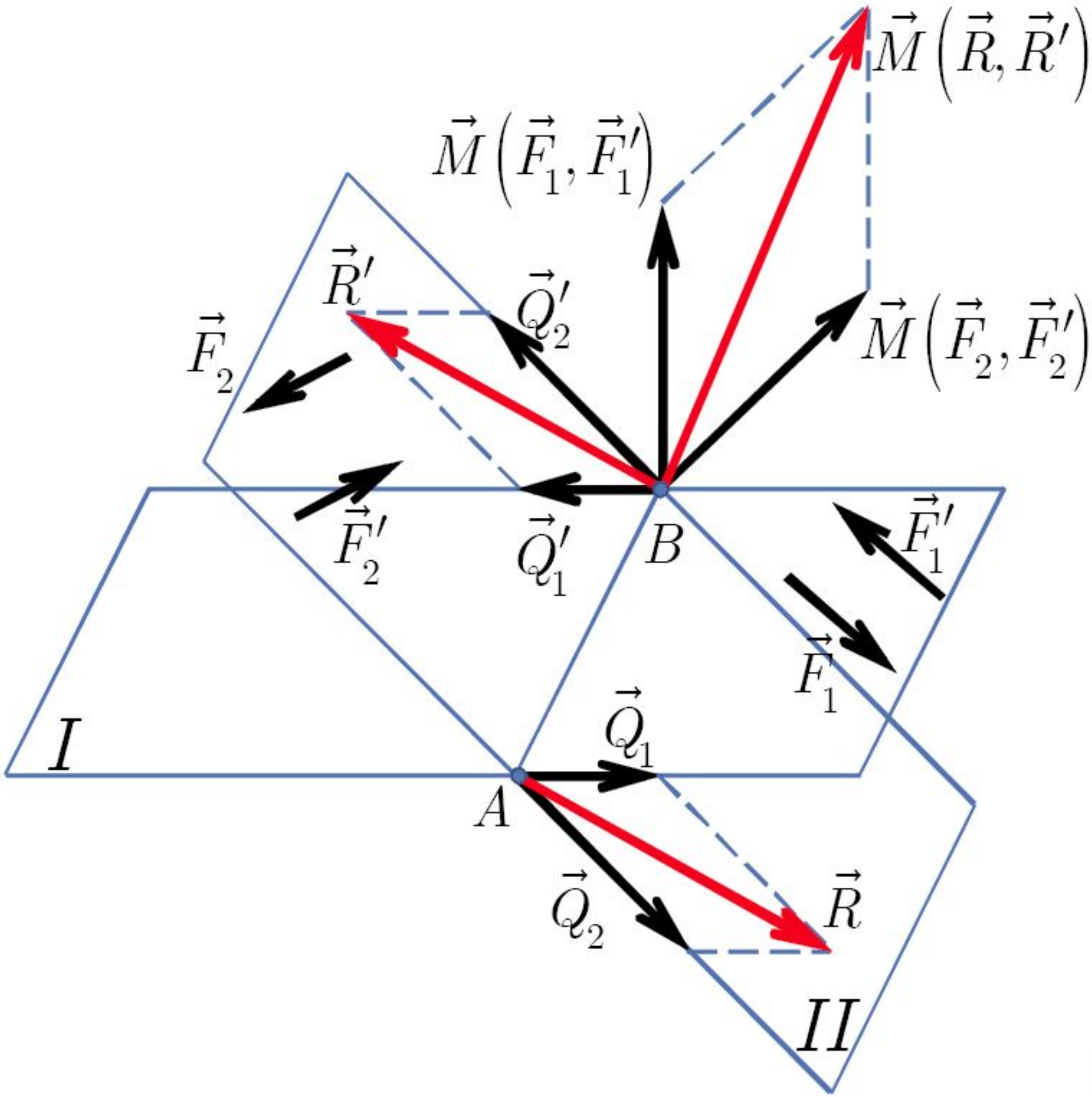
Из этой теоремы следует, что пару сил можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в параллельную плоскость; наконец, в паре можно менять одновременно силы и плечо, сохраняя лишь направление вращения пары и модуль ее момента $\left(F_1h_1 = F_2h_2\right)$.

В дальнейшем мы будем широко пользоваться такими эквивалентными преобразованиями пары.

Теорема 3. ***Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме моментов двух данных пар.***

Пусть пары $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ и $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ расположены в пересекающихся плоскостях I и II соответственно.

Пользуясь следствием **теоремы 2**, приведем обе пары к плечу AB (рис. 3.11), расположенному на линии пересечения плоскостей I и II.



$\vec{M}\left(\vec{R},\vec{R}'\right)$
$\vec{M}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_1'\right)$
$\vec{R}'$
$\vec{Q}_2'$
$\vec{F}_2$
$\vec{M}\left(\vec{F}_2,\vec{F}_2'\right)$
$\vec{F}_2'$
$\vec{Q}_1'$
B
$\vec{F}_1'$
$\vec{F}_1$
I
$\vec{Q}_1$
A
$\vec{Q}_2$
$\vec{R}$
II

Рис. 3.11

Обозначим трансформированные пары через $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_1'\right)$ и $\left(\vec{Q}_2, \vec{Q}_2'\right)$. При этом должны выполняться равенства:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_1'\right) = \vec{M}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right),$$
$$\vec{M}_2 = \vec{M}\left(\vec{Q}_2, \vec{Q}_2'\right) = \vec{M}\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right).$$

Сложим по **аксиоме 3** силы, приложенные в точках A и B соответственно. Тогда получим $\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$ и $\vec{R}' = \vec{Q}_1' + \vec{Q}_2'$.

Учитывая, что $\vec{Q}_1' = -\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2' = -\vec{Q}_2$, получим: $\vec{R} = -\vec{R}'$.

Таким образом, мы доказали, что система двух пар эквивалентна одной паре $\left(\vec{R}, \vec{R}'\right)$.

Найдем момент M этой пары. На основании формулы (3.13) имеем $\vec{M}\left(\vec{R}, \vec{R}'\right) = \overline{BA} \times \vec{R}$, но $\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$ и, следовательно,

$$\vec{M}\left(\vec{R},\vec{R}'\right)=\overline{BA}\times\left(\vec{Q}_1+\vec{Q}_2\right)=\overline{BA}\times\vec{Q}_1+\overline{BA}\times\vec{Q}_2=$$
$$=\vec{M}\left(\vec{Q}_1,\vec{Q}_1'\right)+\vec{M}\left(\vec{Q}_2,\vec{Q}_2'\right)=\vec{M}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_1'\right)+\vec{M}\left(\vec{F}_2,\vec{F}_2'\right),$$

Или

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2,$$

т.е. **теорема доказана**.

Заметим, что полученный результат справедлив и для пар, лежащих в параллельных плоскостях. По **теореме 2** такие пары можно привести к одной плоскости, а по **теореме 1** их можно заменить одной парой, момент которой равен сумме моментов составляющих пар.

Доказанные выше теоремы о парах позволяют сделать важный вывод: момент пары является свободным вектором и полностью определяет действие пары на абсолютно твердое тело.

В самом деле, мы уже доказали, что если две пары имеют одинаковые моменты (следовательно, лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях), то они друг другу эквивалентны (**теорема 2**).

С другой стороны, две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, не могут быть эквивалентны, ибо это означало бы, что одна из них и пара, противоположная другой, эквивалентны нулю, что невозможно, так как сумма моментов таких пар отлична от нуля.

Таким образом, введенное понятие момента пары чрезвычайно полезно, поскольку оно полностью отражает механическое действие пары на тело. В этом смысле можно сказать, что момент исчерпывающим образом представляет действие пары на твердое тело.

Для деформируемых тел изложенная выше теория пар неприменима. Две противоположные пары, действующие, например, по торцам стержня, с точки зрения статики твердого тела эквивалентны нулю.

Между тем их действие на деформируемый стержень вызывает его кручение, и тем большее, чем больше модули моментов.

Перейдем к решению первой и второй задач статики в случаях, когда на тело действуют только пары сил.

§ 3.4. Приведение системы пар к простейшему виду. Равновесие системы пар

Пусть дана система n пар $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right), \left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right), \ldots, \left(\vec{F}_n, \vec{F}_n'\right)$, как угодно расположенных в пространстве, моменты которых равны $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots, \vec{M}_n$.

На основании **теоремы 3** первые две пары можно заменить одной парой $\left(\vec{R}_1, \vec{R}_1'\right)$ с моментом $\vec{M}_2'$:

$$\vec{M}_2' = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Полученную пару $\left(\vec{R}_1, \vec{R}_1'\right)$ сложим с парой $\left(\vec{F}_3, \vec{F}_3'\right)$, тогда получим новую пару $\left(\vec{R}_2, \vec{R}_2'\right)$ с моментом $\vec{M}_3'$:

$$\vec{M}_3' = \vec{M}_2' + \vec{M}_3 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3.$$

Продолжая и дальше последовательное сложение моментов пар, мы получим последнюю *результирующую* пару $\left(\vec{R}, \vec{R}'\right)$ с моментом

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k. \qquad (3.18)$$

Итак, *система пар приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар*.

Теперь легко решить вторую задачу статики, т.е. найти условия равновесия тела, на которое действует система пар. Для того чтобы система пар была эквивалентна нулю, т.е. приводилась к двум уравновешенным силам, необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары был равен нулю. Тогда из формулы (3.18) получим следующее условие равновесия в векторном виде:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots + \vec{M}_n = 0. \qquad (3.19)$$

В проекциях на координатные оси уравнение (3.19) дает три скалярных уравнения.

Условие равновесия (3.19) упрощается, когда все пары лежат в одной плоскости. В этом случае все моменты перпендикулярны этой плоскости, и поэтому уравнение (3.19) достаточно спроектировать только на одну ось, например ось, перпендикулярную плоскости пар. Пусть это будет ось z (рис. 3.12).

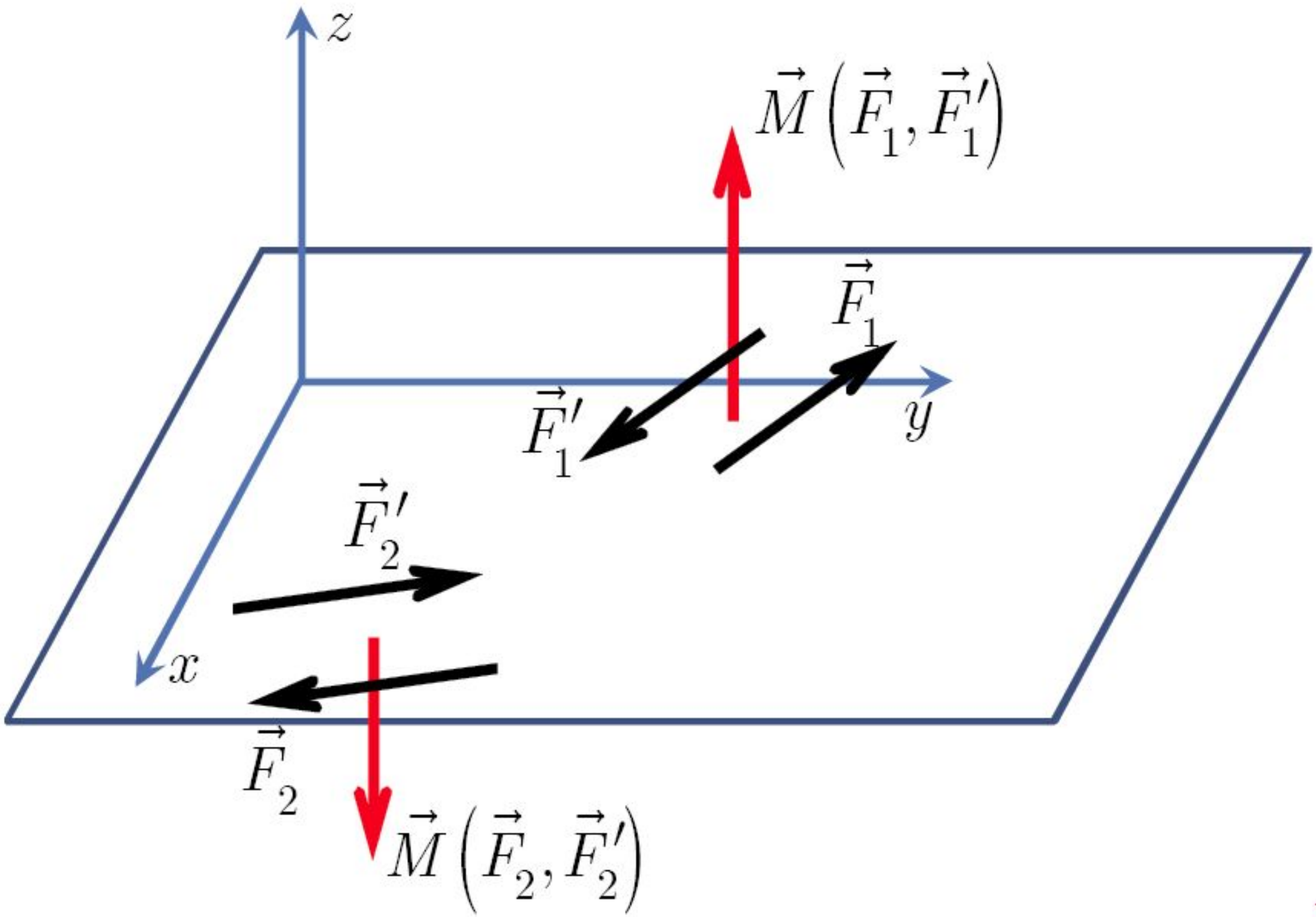


Рис. 3.12

Тогда из уравнения (3.19) получим:

$$\vec{M}_{1z} + \vec{M}_{2z} + \ldots + \vec{M}_{nz} = 0. \qquad (3.20)$$

При этом ясно, что $\vec{M}_z = \vec{M}$, если вращение пары видно с положительного направления оси z против хода часовой стрелки, и $\vec{M}_z = -\vec{M}$ при противоположном направлении вращения. Оба эти случая представлены на рис. 3.12.