ЛЕКЦИЯ №4

СТАТИКА

Глава IV
ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ И УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

§ 4.1. Лемма о параллельном переносе силы

Докажем лемму о параллельном переносе силы:

Лемма: *Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.*

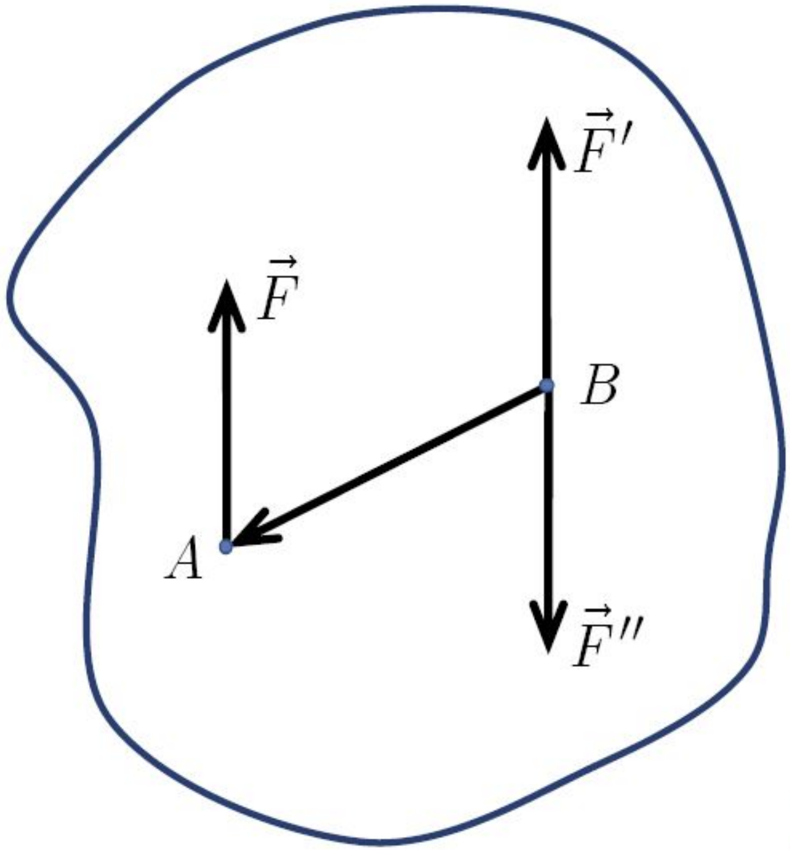

Рис. 4.1

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\vec{F}$ (рис. 4.1). Приложим теперь в точке B тела систему двух сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, эквивалентную нулю, причем выбираем $F' = F$ (следовательно,

$\vec{F}'' = -\vec{F}$). Тогда сила $\vec{F} \sim \left(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\right)$, так как $\left(\vec{F}', \vec{F}''\right) \sim 0$. Но, с другой стороны, система сил $\left(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\right)$ эквивалентна силе $\vec{F}'$ и паре сил $\left(\vec{F}, \vec{F}''\right)$; следовательно, сила $\vec{F}$ эквивалентна силе $\vec{F}'$ и паре сил $\left(\vec{F}, \vec{F}''\right)$. Момент пары $\left(\vec{F}, \vec{F}''\right)$ равен

$$\vec{M} = \vec{M}\left(\vec{F}, \vec{F}''\right) = \overrightarrow{BA} \times \vec{F},$$

т.е. равен моменту силы $\vec{F}$ относительно точки B

$$\vec{M} = \vec{M}_B\left(\vec{F}\right)$$

Таким образом, лемма о параллельном переносе силы доказана.

§ 4.2. Основная теорема статики

Введем два определения.

1. Пусть дана произвольная система сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n\right)$.

   Сумму этих сил

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k,$$

называют ***главным вектором*** системы сил.

2. Сумму моментов сил относительно какого-либо полюса (центра приведения) называют ***главным моментом*** рассматриваемой системы сил относительно этого полюса.

$$\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k,$$

Пользуясь теперь леммой о параллельном переносе силы, докажем следующую основную теорему статики (теорема Пуансо):

Основная теорему статики: *Всякую пространственную систему сил в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела (центре приведения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту всех сил относительно выбранного центра приведения.*

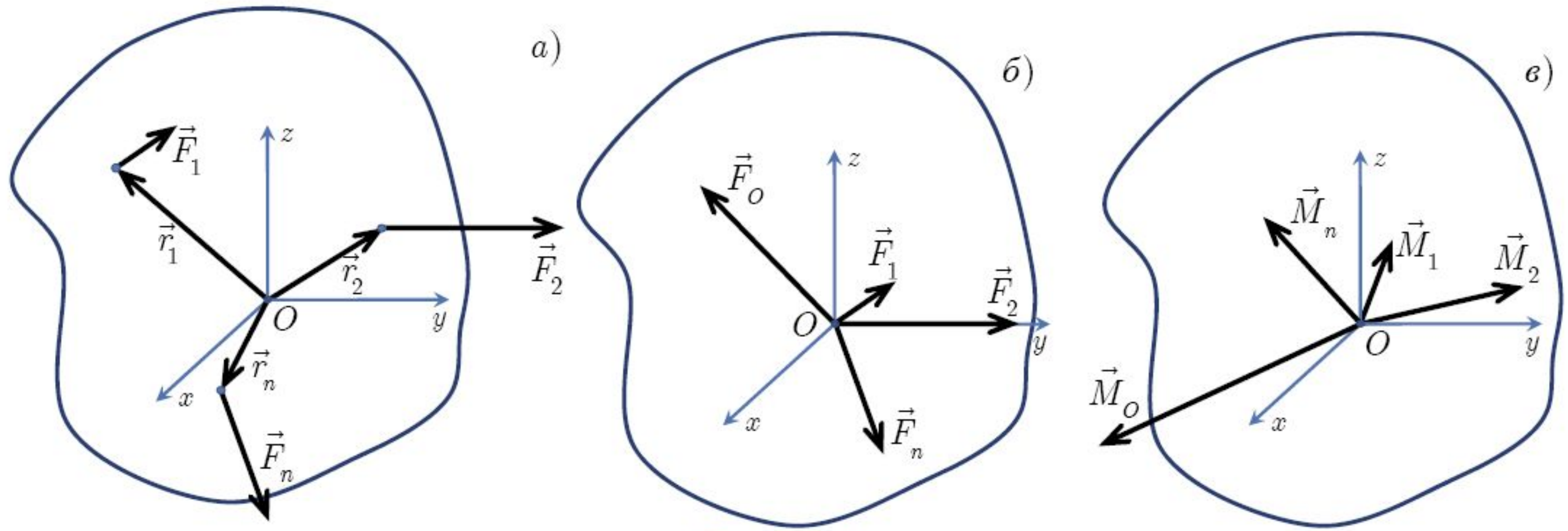

Рис. 4.2

Следовательно, основная теорема статики устанавливает закон эквивалентной замены произвольной системы сил более простой системой, состоящей из одной силы и одной пары.

Пусть O – центр приведения, принимаемый за начало координат, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n$ – соответствующие радиус-векторы точек приложения сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$, составляющих данную систему сил (рис. 4.2, *а*). Прежде всего, перенесем силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ в точку O, а затем сложим эти силы как сходящиеся; в результате получим одну силу:

$$\vec{F}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k,$$

которая равна главному вектору (рис. 4.2, *б*). Но при последовательном переносе сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ в точку O мы получаем каждый раз соответствующую пару сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1''\right)$, $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2''\right), ..., \left(\vec{F}_n, \vec{F}_n''\right)$.

Моменты этих пар соответственно равны моментам данных сил относительно точки O:

$$\begin{aligned}
&\vec{M}_1 = \vec{M}\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1''\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right),\\
&\vec{M}_2 = \vec{M}\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2''\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right),\\
&\dots\\
&\vec{M}_n = \vec{M}\left(\vec{F}_n, \vec{F}_n''\right) = \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

На основании правила приведения системы пар к простейшему виду все указанные пары можно заменить одной парой. Ее момент равен сумме моментов всех сил системы относительно точки O, т.е.

равен главному, моменту, так как согласно формулам (3.18) и (4.1) имеем (рис. 4.2, *в*)

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n =$$

$$= \vec{M}_O\left(\vec{F}_1\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k,$$

Итак, систему сил, как угодно расположенных в пространстве, можно в произвольно выбранном центре приведения заменить силой

$$\vec{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \qquad (4.2)$$

и парой сил с моментом

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k, \qquad (4.3)$$

§ 4.3. Аналитическое определение главного вектора и главного момента пространственной системы сил

Определим модули и направления векторов $\vec{F}_O$ и $\vec{M}_O$. Пусть декартова система координат $Oxyz$ имеет начало в центре приведения O. Тогда проекции силы $\vec{F}_O$ на координатные оси найдутся из соотношений:

$$F_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx},$$

$$F_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \qquad (4.4)$$

$$F_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}.$$

Модуль силы $\vec{F}_O$ равен

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2} = \\ = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}, \tag{4.5}$$

а направление определяется направляющими косинусами

$$\cos\left(x, \vec{F}_O\right) = \frac{F_{Ox}}{F_O}, \quad \cos\left(y, \vec{F}_O\right) = \frac{F_{Oy}}{F_O}, \\ \cos\left(z, \vec{F}_O\right) = \frac{F_{Oz}}{F_O}. \tag{4.6}$$

Для проекций вектора $\vec{M}_O$ имеем (см. (3.10))

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\vec{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k F_{kz} - z_k F_{ky}\right), \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\vec{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(z_k F_{kx} - x_k F_{kz}\right), \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\vec{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k F_{ky} - y_k F_{kx}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Следовательно, модуль и направление вектора $\vec{M}_O$ определяются формулами

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \tag{4.8}$$

$$\cos\left(x, \vec{M}_O\right) = \frac{M_{Ox}}{M_O}, \quad \cos\left(y, \vec{M}_O\right) = \frac{M_{Oy}}{M_O},$$
$$\cos\left(z, \vec{M}_O\right) = \frac{M_{Oz}}{M_O} \qquad (4.9)$$

При приведении пространственной системы сил к одной силе и одной паре сил угол между направлением главного вектора и направлением главного момента может получиться любым в зависимости от действующих сил. Для определения этого угла воспользуемся формулой, выражающей скалярное произведение векторов $\vec{F}_O$ и $\vec{M}_O$:

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O = F_O M_O \cos\left(\vec{F}_O, \vec{M}_O\right).$$

Отсюда

$$\cos\left(\vec{F}_O, \vec{M}_O\right) = \frac{\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O}{F_O M_O} = \frac{F_{Ox} M_{Ox} + F_{Oy} M_{Oy} + F_{Oz} M_{Oz}}{F_O M_O}, \quad (4.10)$$

или, по формулам для направляющих косинусов (4.6) и (4.9),

$$\cos\left(\vec{F}_O, \vec{M}_O\right) = \cos\left(x, \vec{F}_O\right)\cos\left(x, \vec{M}_O\right) + \\ + \cos\left(y, \vec{F}_O\right)\cos\left(y, \vec{M}_O\right) + \cos\left(z, \vec{F}_O\right)\cos\left(z, \vec{M}_O\right). \quad (4.11)$$

Выясним, как будут меняться сила и пара сил, к которым приводится рассматриваемая система сил, при перемене центра приведения. Так как сила $\vec{F}_O$ равна главному вектору, т. е. сумме всех сил системы, то для любого центра приведения она будет одной и той же. Если в качестве нового центра приведения взята точка O_1 то

$$\vec{F}_{O_1} = \vec{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \quad (4.12)$$

Для центра приведения O_1 момент пары равен главному моменту относительно этого центра приведения

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k' \times \vec{F}_k, \qquad (4.13)$$

где $\vec{r}_k'$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}_k$, проведенный из нового центра приведения O_1 (рис. 4.3).

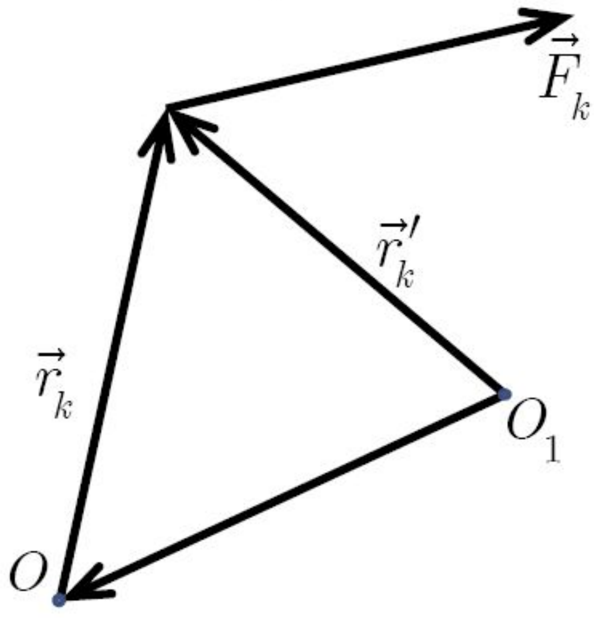

Рис. 4.3

Из рассмотрения рис. 4.3 видно, что

$$\vec{r}_k' = \vec{r}_k + \overline{O_1O}.$$

Подставив значение $\vec{r}_k'$ в формулу (4.13), получим

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k' \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{r}_k + \overline{O_1O}\right) \times \vec{F}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \overline{O_1O} \times \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k,$$

откуда на основании формул (4.2) и (4.3)

$$\vec{M}_{\mathrm{O}_1} = \vec{M}_{\mathrm{O}} + \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}} \times \vec{F}_{\mathrm{O}} = \vec{M}_{\mathrm{O}} + \vec{M}_{\mathrm{O}_1}\left(\vec{F}_{\mathrm{O}}\right), \qquad (4.14)$$

т.е. момент пары, а следовательно, и *главный момент при перемене центра приведения изменяются на момент силы, равный главному вектору, приложенному в старом центре приведения, относительно нового центра приведения*.

Из формулы (4.14) следует, что если в каком-либо центре приведения, например точке O, $\vec{F}_O = 0$ и $\vec{M}_O = 0$, то и для любого центра приведения O_1 будет

$$\vec{F}_{O_1} = 0, \qquad \vec{M}_{O_1} = 0.$$

Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил не является единственным способом приведения к простейшему виду (хотя и применяется наиболее часто). Возможен другой вариант приведения; согласно этому варианту *система сил, как угодно расположенных в пространстве, может быть приведена к двум силам, в общем случае не лежащим в одной плоскости*.

В самом деле, пусть произвольная система сил приведена в данном центре O к силе $\vec{F}_O$ и паре сил с моментом $\vec{M}_O$. Выберем силы, составляющие пару, равными $\vec{P}$ и $\vec{P}'$ ($\vec{P} = -\vec{P}'$); приложим одну из них (например, $\vec{P}'$) в центре приведения (рис. 4.4) и сложим ее с силой $\vec{F}_O$. В результате получим силу $\vec{Q} = \vec{F}_O + \vec{P}'$, уже не лежащую в плоскости действия пары $\left(\vec{P}, \vec{P}'\right)$.

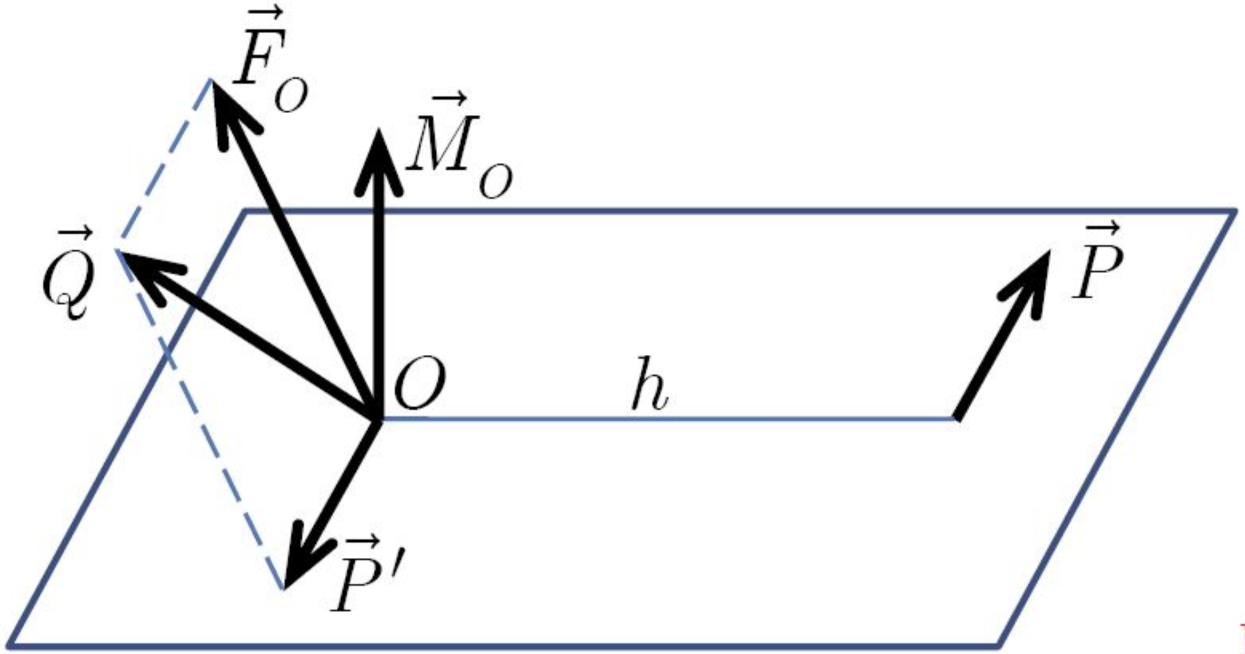

Рис. 4.4

Таким образом, пространственная система сил приведена к двум силам $\vec{Q}$ и $\vec{P}$, которые в общем случае не лежат в одной плоскости.

§ 4.4. Условия равновесия пространственной системы сил

В этом параграфе мы обратимся ко второй задаче статики и установим условия, при которых пространственная система сил эквивалентна нулю, т.е. условия ее равновесия. Докажем теорему.

Теорема: *Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы равнялись нулю.*

Достаточность сформулированных условий вытекает из того, что при $\vec{F}_O = 0$ система сходящихся сил, приложенных в центре приведения O, эквивалентна нулю, а при $\vec{M}_O = 0$ система пар сил эквивалентна нулю. Следовательно, исходная система сил эквивалентна нулю.

Докажем необходимость этих условий. Пусть данная система сил эквивалентна нулю. Приведя систему к двум силам, заметим, что в нашем случае система сил $\vec{Q}$ и $\vec{P}$ (рис. 4.4) должна быть эквивалентна нулю, следовательно, эти две силы должны иметь общую линию действия и, кроме того, должно выполняться равенство $\vec{Q} = -\vec{P}$. Но в рассматриваемом нами случае это может быть, если линия действия силы $\vec{P}$ проходит через точку O, т.е. если $h = 0$. А это значит, что главный момент равен нулю ($\vec{M}_O = 0$). Далее, так как $\vec{Q} + \vec{P} = 0$, а $\vec{Q} = \vec{F}_O + \vec{P}'$, то $\vec{F}_O + \vec{P}' + \vec{P} = 0$, и, следовательно, $\vec{F}_O = 0$.

Итак, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сил будут иметь вид

$$\vec{F}_O = 0, \qquad \vec{M}_O = 0, \tag{4.15}$$

или, в проекциях на координатные оси,

$$
\begin{aligned}
F_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \\
F_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \qquad (4.16) \\
F_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_k\right) = \\
&= M_{Ox}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Ox}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Ox}\left(\vec{F}_n\right) = 0, \\
M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_k\right) = \\
&= M_{Oy}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oy}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oy}\left(\vec{F}_n\right) = 0, \\
M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_k\right) = \\
&= M_{Oz}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oz}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oz}\left(\vec{F}_n\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Таким образом, при решении задач о равновесии пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, мы имеем возможность из уравнений (4.16) и (4.17) определить шесть неизвестных величин.

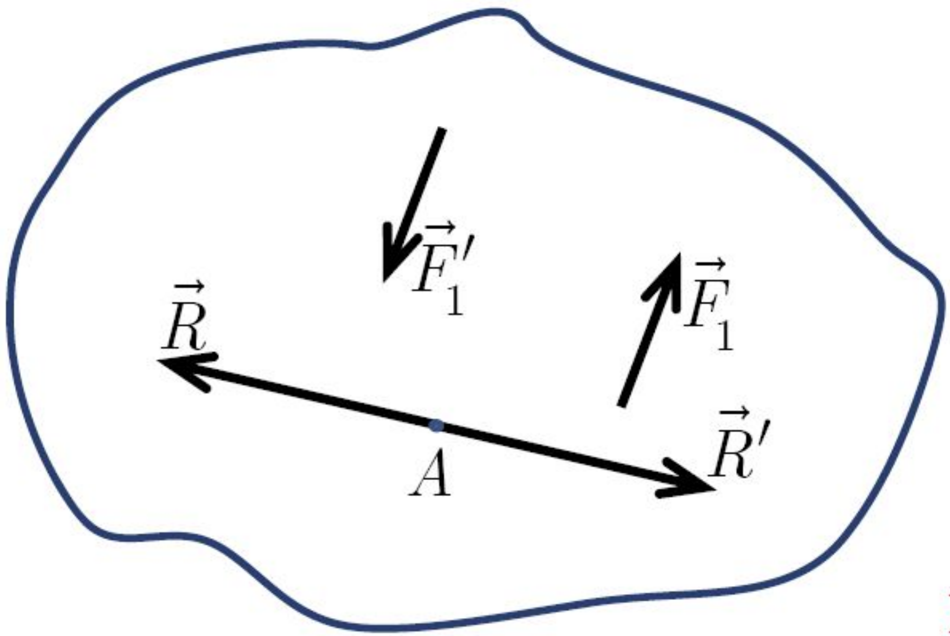

Рис. 4.5

Замечание. О невозможности приведения пары сил к равнодействующей.

Проведем доказательство от противного. Пусть пара сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ приводятся к равнодействующей $\vec{R}$, приложенной к какой-либо точке A тела. Тогда эта пара и сила $\vec{R}'$ ($\vec{R}' = -\vec{R}$), приложенная в точке A, эквивалентны нулю (рис. 4.5). На основании только что доказанного главный вектор и главный момент этой системы должны быть равны нулю. Примем за центр приведения точку A, тогда главный момент $\vec{M}_A \neq 0$ и равен моменту пары $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$; главный вектор тоже не равен нулю ($\vec{F}_A = \vec{R}' \neq 0$). Следовательно, предположение о существовании равнодействующей для пары сил несправедливо.

Уравнения равновесия для более частных систем сил могут быть получены из уравнений (4.16) и (4.17).

1. Равновесие пространственной системы параллельных сил.

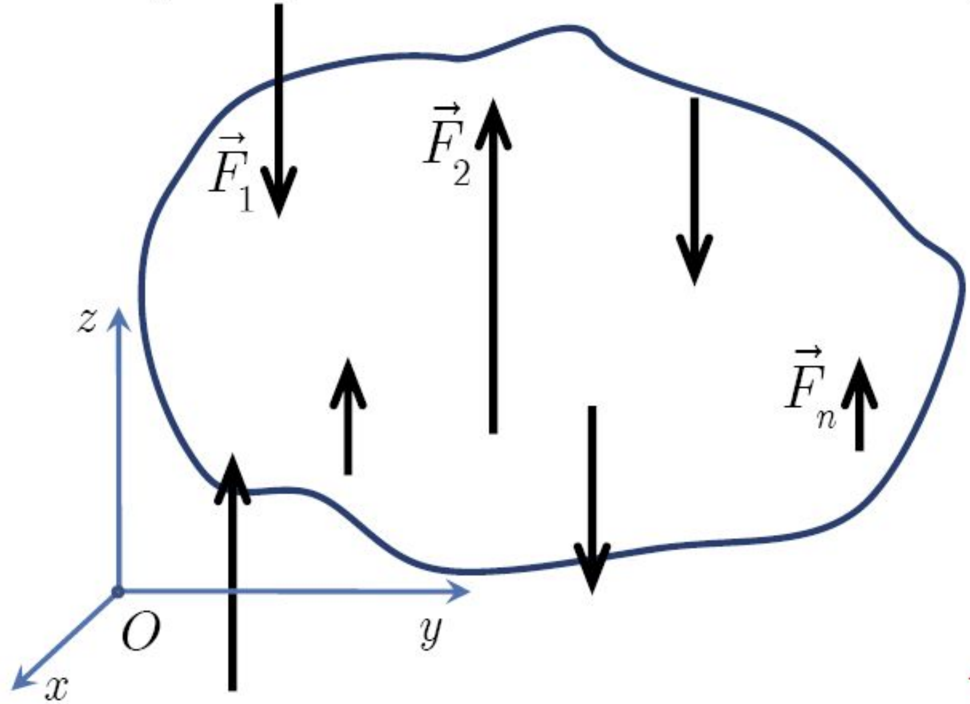

Рис. 4.6

Направим ось z параллельно линиям действия сил (рис. 4.6). Тогда проекции сил $\vec{F}_k$ на оси x и y равны нулю ($F_{kx} \equiv 0$, $F_{ky} \equiv 0$), и остается удовлетворить только одному из уравнений группы (4.16):

$$F_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0. \qquad (4.18)$$

Во второй группе уравнений (4.17) последнее выполняется тождественно, так как силы параллельны оси z ($M_{Oz}\left(\vec{F}_k\right) \equiv 0$), и остаются только два уравнения:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_k\right) = \\ = M_{Ox}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Ox}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Ox}\left(\vec{F}_n\right) = 0,$$

$$M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_k\right) = \\ = M_{Oy}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oy}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oy}\left(\vec{F}_n\right) = 0. \qquad (4.19)$$

2. Равновесие плоской системы сил.

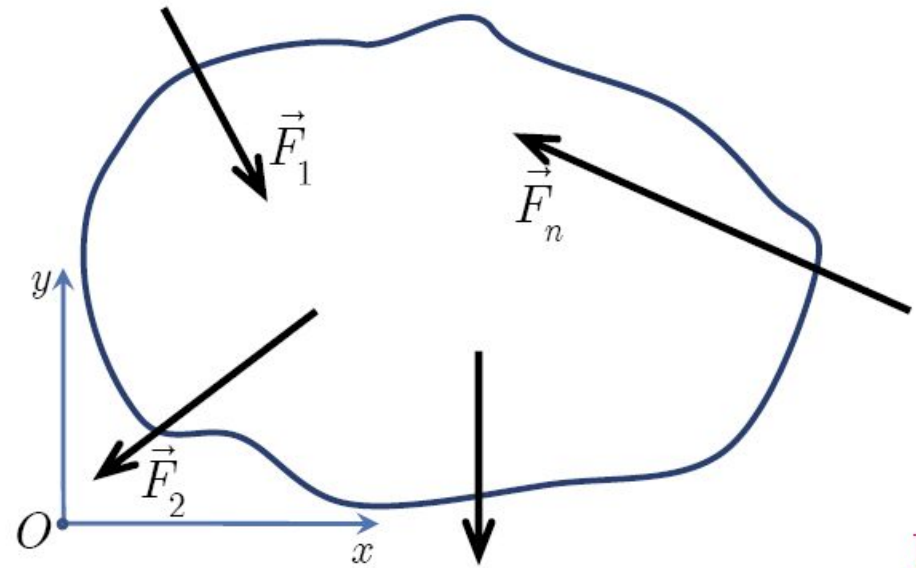

Рис. 4.7

Для плоской системы сил из уравнений первой группы останутся два уравнения:

$$F_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = 0,$$

$$F_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = 0. \qquad (4.20)$$

Из уравнений второй группы два первых удовлетворяются тождественно, так как силы лежат в одной плоскости с осями x и y (рис. 4.7). Остается только третье уравнение:

$$\begin{aligned} M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_k\right) = \\ &= M_{Oz}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oz}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oz}\left(\vec{F}_n\right) = 0 \end{aligned} . \quad (4.21)$$

3. Равновесие плоской системы параллельных сил.

Условия равновесия для этого частного случая следуют из уравнений (4.20) и (4.21). Направим ось у параллельно линиям действия сил (рис. 4.8). Тогда первое из уравнений (4.20) удовлетворяется тождественно (для любой системы параллельных сил на плоскости) и остаются только два уравнения равновесия:

$$F_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0, \qquad (4.22)$$

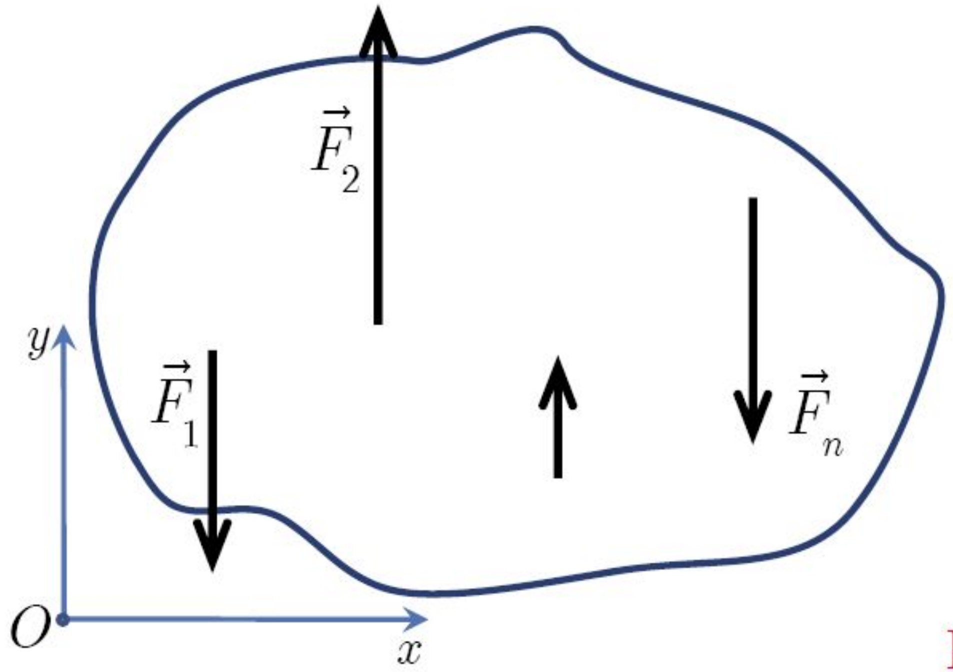

Рис. 4.8

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_k\right) =$$
$$= M_{Oz}\left(\vec{F}_1\right) + M_{Oz}\left(\vec{F}_2\right) + \ldots + M_{Oz}\left(\vec{F}_n\right) = 0.$$

Напомним, что при составлении уравнений равновесия (4.17) за центр приведения может быть выбрана любая точка (см. § 4.3).