ЛЕКЦИЯ №6

СТАТИКА

Глава VI
РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

§ 6.1. Равновесие тела при наличии трения скольжения

Если два тела I и II (рис. 6.1) взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь в точке A, то всегда реакцию $\vec{R}_A$, действующую, например, со стороны тела II и приложенную к телу I, можно разложить на две составляющие: $\vec{N}_A$, направленную по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке A, и $\vec{T}_A$, лежащую в касательной плоскости.

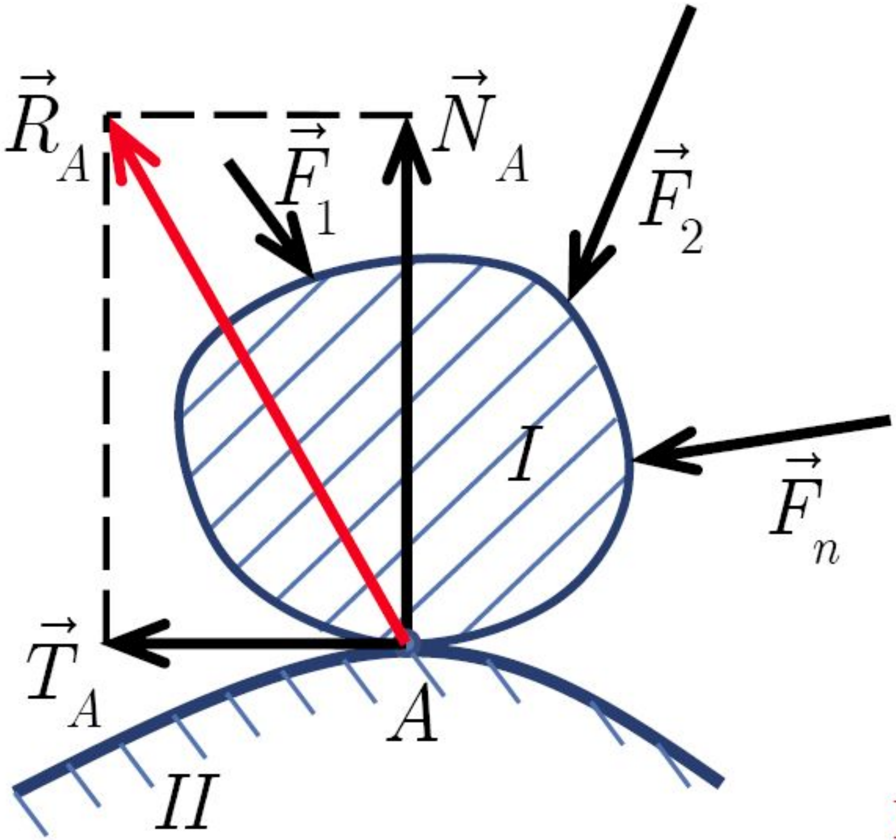

Рис. 6.1

Составляющая $\vec{N}_A$ называется ***нормальной реакцией***, сила $\vec{T}_A$ называется ***силой трения скольжения*** – она препятствует скольжению тела I по телу II. В соответствии с **аксиомой 4** (третьим законом Ньютона) на тело II со стороны тела I действует равная по модулю и противоположно направленная сила реакции. Ее составляющая, перпендикулярная касательной плоскости, называется ***силой нормального давления***. Сила трения $\vec{T}_A = 0$, если соприкасающиеся поверхности идеально гладкие. В реальных условиях поверхности шероховаты и во многих случаях пренебречь силой трения нельзя.

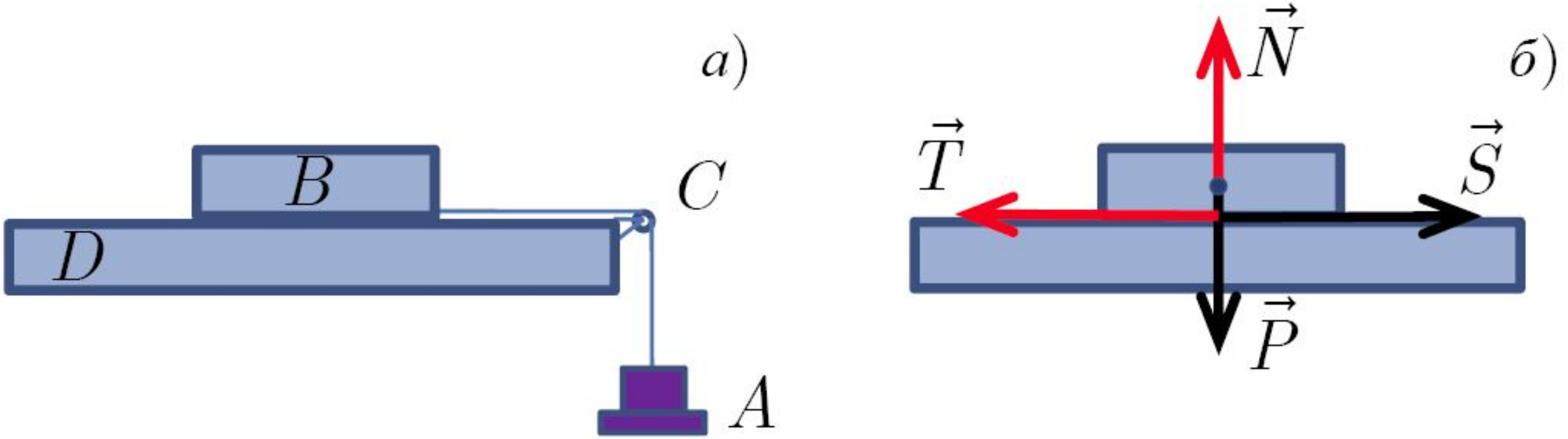

Рис. 6.2.

Для выяснения основных свойств сил трения произведем опыт по схеме, представленной на рис. 6.2, *а*. К телу B, находящемуся на неподвижной плите D, присоединена перекинутая через блок C нить, свободный конец которой снабжен опорной площадкой A. Если площадку A постепенно нагружать, то с увеличением ее общего веса будет возрастать натяжение нити $\vec{S}$, которое стремится сдвинуть тело вправо. Однако пока общая нагрузка не слишком велика, сила трения $\vec{T}$ будет удерживать тело B в покое. На рис. 6.2, *б* изображены действующие па тело B силы, причем через $\vec{P}$ обозначена сила тяжести, а через $\vec{N}$ – нормальная реакция плиты D. Если нагрузка недостаточна для нарушения покоя, то справедливы следующие уравнения равновесия:

$$N - P = 0, \qquad S - T = 0. \tag{6.1}$$

Отсюда следует, что $N = P$ и $T = S$. Таким образом, пока тело находится в покое, сила трения остается равной силе натяжения нити $\vec{S}$. Обозначим через $T_{\max}$, силу трения в критический момент процесса нагружения, когда тело B теряет равновесие и начинает скользить по плите D. Следовательно, если тело находится в равновесии, то

$$T \leq T_{\max}. \tag{6.2}$$

Максимальная сила трения $\vec{T}_{\max}$ зависит от свойств материалов, из которых сделаны тела, их состояния (например, от характера обработки поверхности), а также от нормального давления $\vec{N}$. Как показывает опыт, максимальная сила трения приближенно пропорциональна нормальному давлению, т. е.

$$\vec{T}_{\max} = f\vec{N}. \tag{6.3}$$

Это соотношение носит название ***закона Амонтона—Кулона.***

Безразмерный коэффициент f называется ***коэффициентом трения скольжения.*** Как следует из опыта, его *значение в широких* *пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей*, но зависит от материала и степени шероховатости соприкасающихся поверхностей. Значения коэффициентов трения устанавливаются опытным путем, и их можно найти в справочных таблицах.

Неравенство (6.2) можно теперь записать в виде

$$T \leq fN\,. \tag{6.4}$$

Случай строгого равенства в (6.4) отвечает максимальному значению силы трения. Это значит, что силу трения можно вычислять по формуле $T = fN$ только в тех случаях, когда заранее известно, что имеет место критический случай. Во всех же других случаях силу трения следует определять из уравнений равновесия.

Рассмотрим тело, находящееся на шероховатой поверхности. Будем считать, что в результате действия активных сил и сил реакции тело находится в предельном равновесии.

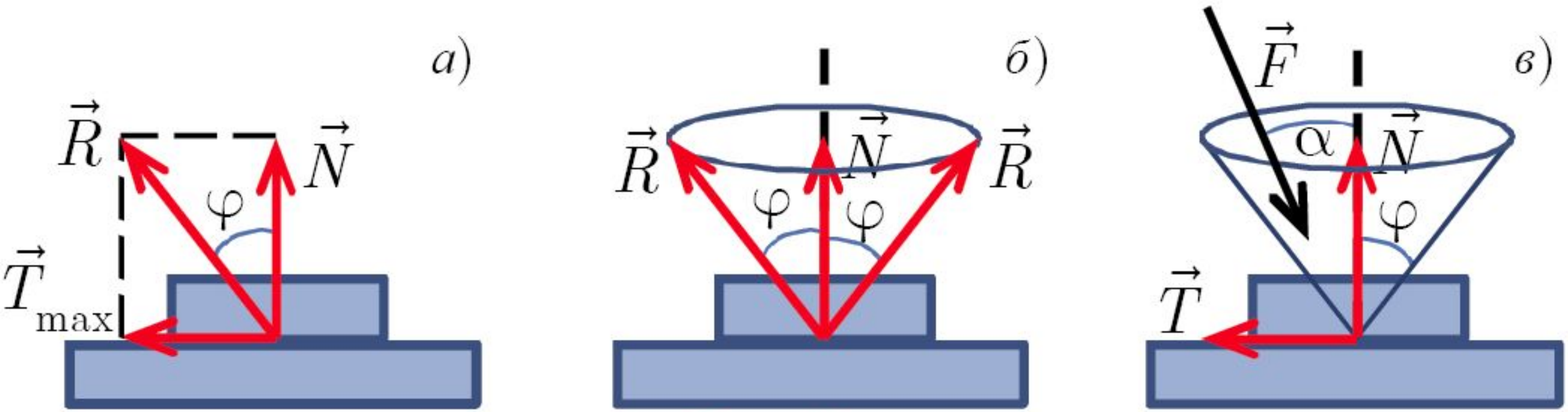

Рис. 6.3.

На рис. 6.3, *а* показана предельная реакция $\vec{R}$ и ее составляющие $\vec{N}$ и $\vec{T}_{\max}$ (в положении, изображенном на этом рисунке, активные силы стремятся сдвинуть тело вправо, максимальная сила трения $\vec{T}_{\max}$ направлена влево). *Угол φ между предельной реакцией $\vec{R}$ и нормалью к поверхности называется* ***углом трения***. Найдем этот угол. Из рис. 6.3, *а* имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{T_{\max}}{N}. \tag{6.6}$$

или, пользуясь выражением (6.4),

$$\operatorname{tg}\varphi = f. \tag{6.7}$$

Из этой формулы видно, что вместо коэффициента трения можно задавать угол трения (в справочных таблицах приводятся обе величины).

В зависимости от действия активных сил направление предельной реакции может меняться. *Геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции* $\vec{R}$ *образует коническую поверхность* — ***конус трения*** (рис. 6.3, *б*). Если коэффициент трения f во всех направлениях одинаков, то согласно формуле (6.7) конус трения будет круговым. В тех случаях, когда коэффициент трения f зависит от направления возможного движения тела, конус трения не будет круговым.

Рассмотрим теперь случай, когда активные силы, действующие на тело, приводятся к одной равнодействующей $\vec{F}$, составляющей угол α с нормалью к поверхности (рис. 6.3, *в*). Такая сила оказывает двоякое действие: во-первых, ее нормальная составляющая $\vec{F}_n$ определяет нормальную составляющую $\vec{N}$ реакции поверхности и, следовательно, предельную силу трения $T_{\max} = fN$, а, во-вторых, ее касательная составляющая $\vec{F}_\tau$ стремится эту силу преодолеть. Если увеличивать модуль силы $\vec{F}$, то пропорционально будут возрастать обе составляющие. Отсюда можно заключить, что состояние покоя или движения тела не зависит от модуля силы $\vec{F}$ и определяется только углом α – чем меньше этот угол, тем меньше тенденция к нарушению равновесия.

Для аналитического решения задачи составим условия равновесия тела:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = T - F\sin\alpha = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = N - F\cos\alpha = 0,$$

$$T \le fN.$$

Из уравнений найдем $T = F\sin\alpha$, $N = F\cos\alpha$ и, подставляя их в неравенство, получим

$$\operatorname{tg}\alpha \le f,$$

или, учитывая (6.7), $\operatorname{tg}\alpha \le \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, при равновесии тела

$$\alpha \le \varphi.$$

Это означает, что если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения, то увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела; ***для того чтобы тело начало движение, необходимо***

(и достаточно), чтобы равнодействующая активных сил $\vec{F}$ находилась вне конуса трения.

Рассмотрим теперь трение гибких тел. Пусть трос охватывает неподвижный круглый цилиндр. Требуется определить силу натяжения троса $\vec{P}$, достаточную для уравновешивания силы $\vec{Q}$, приложенной ко второму концу троса, если между тросом и цилиндром имеется трение (рис. 6.4, *а*).

Опыт показывает, что благодаря трению сила $\vec{P}$ может быть во много раз меньше, чем сила $\vec{Q}$. Задача будет статически определенной лишь в том случае (представляющем наибольший интерес), когда рассматривается *критическое состояние* и силы трения пропорциональны соответствующим нормальным давлениям. Речь идет о критическом состоянии, в котором сила $\vec{Q}$ уже способна вызвать скольжение троса по неподвижному цилиндру (по ходу часовой стрелки).

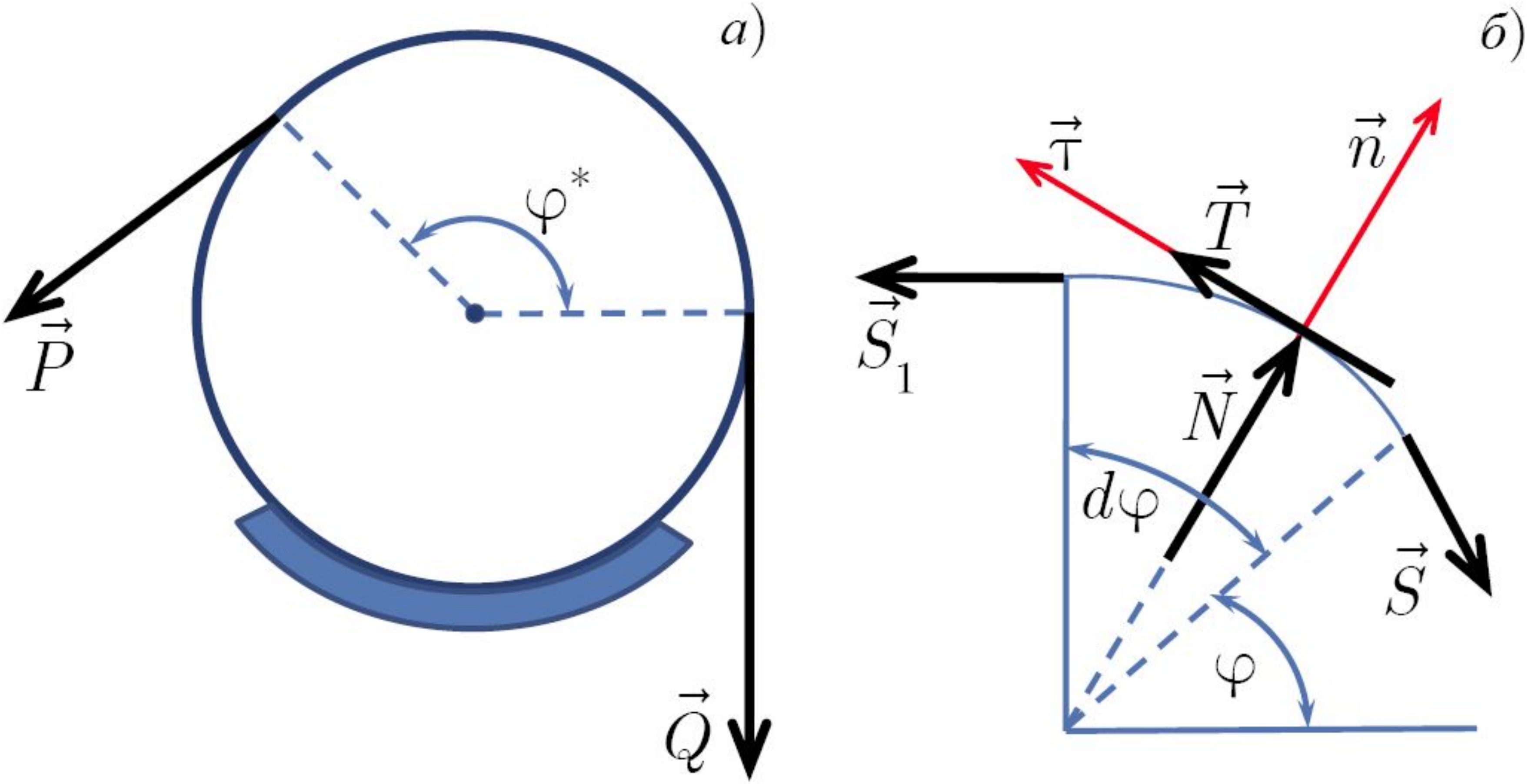

Рис. 6.4.

Нормальное давление и сила трения непрерывно распределены по всей длине охвата φr. Обозначим через N и T значения этих сил, отнесенных к единице длины троса. Эти силы, конечно, являются функциями полярного угла φ, определяющего положение элемента, т.е. $N = N\left(\varphi\right), \quad T = T\left(\varphi\right) = fN\left(\varphi\right).$ Натяжение троса в любой его точке на цилиндре также является функцией от φ, т. е.

$$S = S\left(\varphi\right).$$

Выделим элемент троса длины $ds = rd\varphi$. На этот элемент действуют две реакции шкива: $\vec{T}ds$ и $\vec{N}ds$, а также две силы натяжения, $\vec{S}$ и $\vec{S}_1 = \vec{S} + \mathrm{d}\vec{S}$, приложенные к рассматриваемому элементу в точках рассечения (рис. 6.4, *б*).

Пренебрегая весом троса, запишем условия равновесия выделенного элемента троса, спроектировав силы на направления нормали ($\vec{n}$) и касательной ($\vec{\tau}$), взятые в середине элемента:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kn} = Nds - S_1 \frac{d\varphi}{2} - S \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} = Tds + S_1 - S = 0.$$

При составлении этих уравнений мы воспользовались малостью угла $d\varphi$ и положили

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \qquad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

Подставляя в уравнения равновесия вместо S_1 и ds их значения

$$S_1 = S + dS, \qquad ds = rd\varphi,$$

получаем

$$Nr - S = 0, \qquad Tr + \frac{dS}{d\varphi} = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $S = Nr$, а так как $T = fN$, то второе уравнение можно переписать в виде

$$dS = -fSd\varphi, \text{ или } \frac{dS}{S} = -fd\varphi.$$

Выполняя интегрирование в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi^*$, находим

$$\ln\frac{S^*}{S_0} = -f\varphi^*.$$

Здесь S_0 – натяжение в сечении $\varphi = 0$, равное модулю

силы Q, S^* – натяжение в сечении $\varphi = \varphi^*$, равное модулю силы P. Следовательно,

$$\ln\frac{P}{Q} = -f\varphi^*,. \tag{6.8}$$

и, окончательно,

$$P = Qe^{-f\varphi^*}. \tag{6.9}$$

Эта формула (*формула Эйлера*) позволяет найти наименьшую силу $\vec{P}$, способную уравновесить силу $\vec{Q}$.

Можно поставить обратный вопрос: при каком значении $\vec{P}$ наступит скольжение троса против хода часовой стрелки, т.е. какая сила $\vec{P}$ способна преодолеть сопротивление трения вместе с силой $\vec{Q}$? Для ответа на этот вопрос нет необходимости заново повторить все выкладки; они останутся прежними с тем единственным различием, что сила трения на рис. 6.4, *б* изменит свое направление. Поэтому в окончательном результате, изменяя знак при коэффициенте трения, получаем

$$P = Qe^{f\varphi^*}.. \tag{6.10}$$

Таким образом, если сила $\vec{P}$ удовлетворяет неравенствам

$$Qe^{-f\varphi^*} \le P \le Qe^{f\varphi^*},$$

то трос будет находиться в равновесии.

§ 6.2. Равновесие тела при наличии трения качения

Рассмотрим цилиндр (каток), покоящийся на горизонтальной плоскости, когда на него действует горизонтальная активная сила $\vec{S}$; кроме нее, действуют сила тяжести $\vec{P}$, а также нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{T}$ (рис. 6.5, *а*).

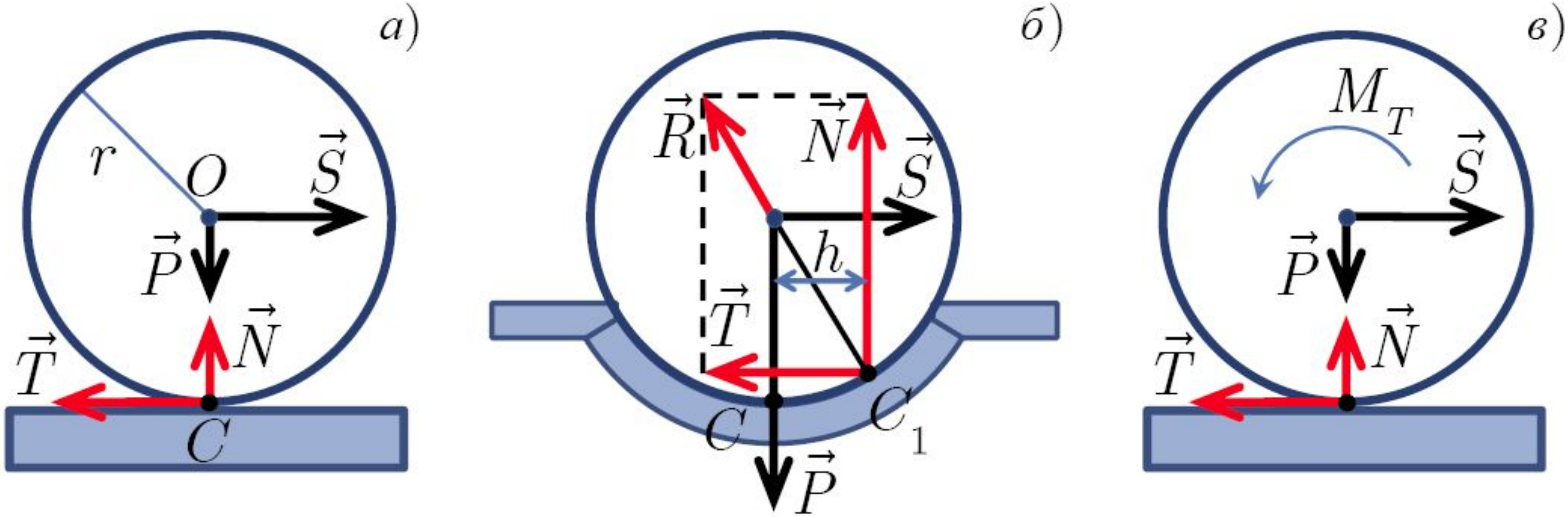

Рис. 6.5.

Как показывает опыт, при достаточно малом модуле силы $\vec{S}$ цилиндр остается в покое. Но этот факт нельзя объяснить, если удовлетвориться введением сил, изображенных на рис. 6.5, *а*. Согласно этой схеме равновесие невозможно, так как главный момент всех сил, действующих на цилиндр $M_{Cz} = -Sr$, отличен от нуля, и одно из условий равновесия не выполняется.

Причина выявившегося несоответствия состоит в том, что в наших рассуждениях мы продолжаем пользоваться представлением об абсолютно твердом теле, и предполагаем касание цилиндра с поверхностью происходящим по образующей. Для устранения отмеченного несоответствия теории с опытом необходимо отказаться от гипотезы абсолютно твердого тела и учесть, что в действительности цилиндр и плоскость вблизи точки C деформируются и существует некоторая площадь соприкосновения конечной ширины. Вследствие этого в ее правой части цилиндр прижимается сильнее, чем в левой, и полная реакция $\vec{R}$ приложена правее точки C (см. точку C_1 на рис. 6.5, *б*).

Полученная теперь схема действующих сил статически удовлетворительна, так как момент пары $\left(\vec{S}, \vec{T}\right)$ может уравновеситься моментом пары $\left(\vec{N}, \vec{P}\right)$. Считая деформацию малой, заменим эту систему сил системой, изображенной на рис. 6.5, *в*. В отличие от первой схемы (рис. 6.5, *а*), к цилиндру приложена пара сил с моментом

$$M_T = Nh. \tag{6.11}$$

Этот момент называется ***моментом трения качения.***

Составим уравнения равновесия цилиндра:

$$\begin{aligned} S - T &= 0, \\ N - P &= 0, \\ -Sr + M_T &= 0. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Первые два уравнения дают $T = S$, $N = P$, а из третьего уравнения можно найти M_T. Затем из (6.11) определяем расстояние между точками C и C_1:

$$h = \frac{Sr}{P}. \tag{6.13}$$

Как видно, с увеличением модуля активной силы $\vec{S}$ растет расстояние h. Но это расстояние связано с площадью поверхности контакта и, следовательно, не может неограниченно увеличиваться. Это значит, что наступит такое состояние, когда увеличение силы $\vec{S}$ приведет к нарушению равновесия. Обозначим максимально возможную величину h буквой δ. Экспериментально установлено, что величина δ пропорциональна радиусу цилиндра и различна для разных материалов.

Следовательно, если имеет место равновесие, то выполняется условие

$$h \leq \delta. \tag{6.14}$$

Величина δ называется ***коэффициентом трения качения***; она имеет размерность длины.

Условие (6.14) можно также записать в виде

$$M_T \leq \delta N,$$

или, учитывая (6.12),

$$S \leq \frac{\delta}{r} N \tag{6.15}$$

Очевидно, что максимальный момент трения качения $M_T^{\max} = \delta N$ пропорционален силе нормального давления.

В справочных таблицах приводится отношение коэффициента трения качения к радиусу цилиндра $\left(\lambda = \delta / r\right)$ для различных материалов.