ЛЕКЦИЯ №7

СТАТИКА
Глава VII
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 7.1. Статические инварианты. Динамический винт.

Ранее было установлено, что главный вектор системы сил, как угодно расположенных в пространстве,

$$\vec{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \tag{7.1}$$

не изменяется при перемене центра приведения.

Главный же момент при этом изменяется и для нового центра приведения определяется формулой

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \overline{O_1 O} \times \vec{F}_O, \tag{7.2}$$

где $\vec{M}_O$ и $\vec{M}_{O_1}$ – главные моменты относительно центров приведения O и O_1. *Второе слагаемое* в правой части формулы (7.2) представляет собой момент главного вектора, приложенного в центре приведения O, относительно нового центра приведения O_1. Умножим скалярно обе части равенства (7.2) на вектор $\vec{F}_O$:

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F}_O = \vec{M}_O \cdot \vec{F}_O + \left(\overline{O_1 O} \times \vec{F}_O\right) \cdot \vec{F}_O.$$

Так как вектор $\overline{O_1 O} \times \vec{F}_O$ перпендикулярен вектору $\vec{F}_O$, то их скалярное произведение равно нулю. Следовательно,

$$\vec{M}_{O_1} \cdot \vec{F}_O = \vec{M}_O \cdot \vec{F}_O, \tag{7.3}$$

т.е. скалярное произведение главного момента $\vec{M}_O$ на главный вектор $\vec{F}_O$ не зависит от центра приведения.

Таким образом, при перемене центра приведения не изменяются главный вектор и скалярное произведение главного момента на главный вектор. Говорят, что эти величины *инвариантны относительно выбора центра приведения.*

Первым статическим инвариантом *называется главный вектор* $\vec{F}_O$. *В более узком смысле этого слова под первым инвариантом понимают квадрат модуля главного вектора*

$$I_1 = F_O^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2. \qquad (7.4)$$

Вторым статическим инвариантом *называется скалярное произведение главного вектора на главный момент:*

$$I_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z. \qquad (7.5)$$

Из второго инварианта вытекает простое геометрическое следствие. Действительно, запишем равенство (7.3) в следующем виде:

$$M_{O_1} F_O \cos\left(\vec{M}_{O_1}, \vec{F}_O\right) = M_O F_O \cos\left(\vec{M}_O, \vec{F}_O\right)$$

Если $F_O \neq 0$, то

$$M_{O_1} \cos\left(\vec{M}_{O_1}, \vec{F}_O\right) = M_O \cos\left(\vec{M}_O, \vec{F}_O\right).$$

Каждое из этих произведений представляет проекцию главного момента на направление главного вектора. Следовательно, при перемене центра приведения проекция главного момента на направление главного вектора не изменяется. Заметим, что при $F_O \neq 0$ это следствие можно принять за определение второго инварианта.

Очевидно, что проекция M^* главного момента на направление главного вектора определяется равенством

$$M^{*} = \frac{\left(\vec{M}_O \cdot \vec{F}_O\right)}{F_O}$$

или, принимая во внимание значения первого и второго инвариантов,

$$M^{*} = \frac{I_2}{\sqrt{I_1}}. \tag{7.6}$$

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется динамическим винтом или динамой. Так как плоскость действия пары перпендикулярна моменту пары, то *динамический винт представляет собой совокупность силы и пары сил, действующей в плоскости, перпендикулярной силе.*

Различают правый и левый динамические винты.

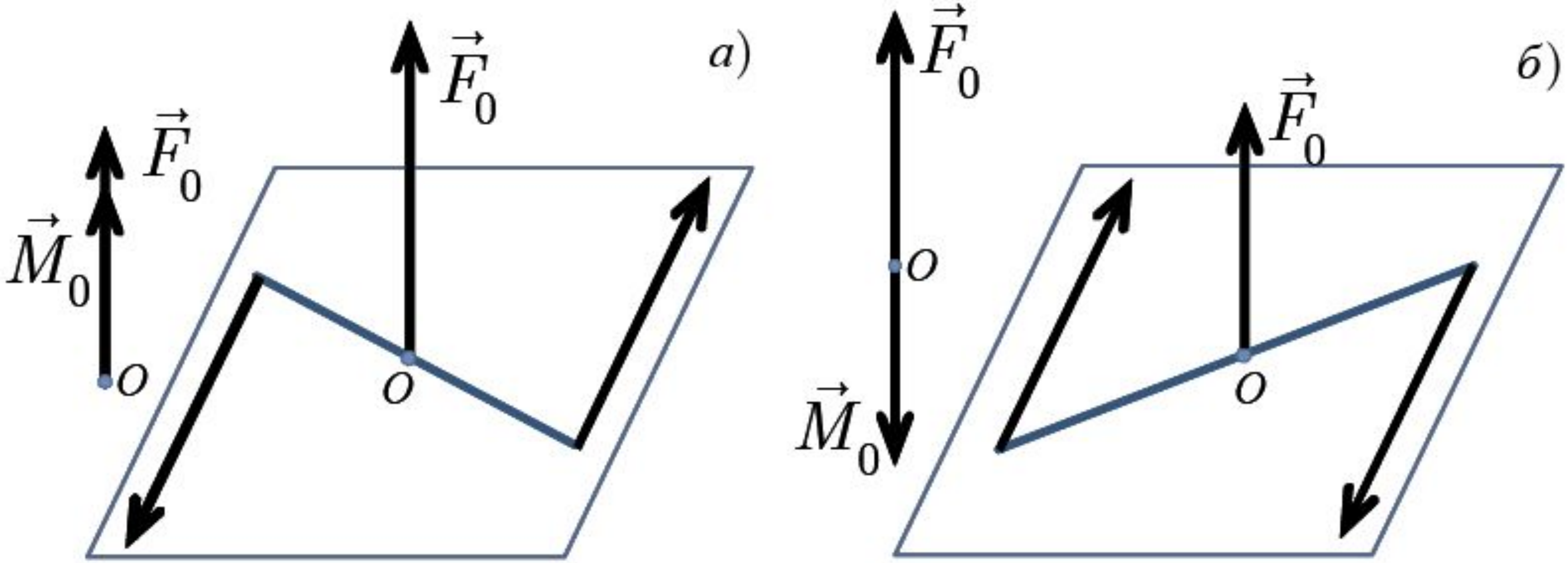

Рис. 7.1

На рис. 7.1, *а* **показан правый динамический винт**, составленный из силы $\vec{F}_{O'}$, равной главному вектору системы, и пары сил с моментом $\vec{M}_{O}$. равным главному моменту; **на рис. 7.1,** *б* **показан левый винт**, составленный из тех же элементов.

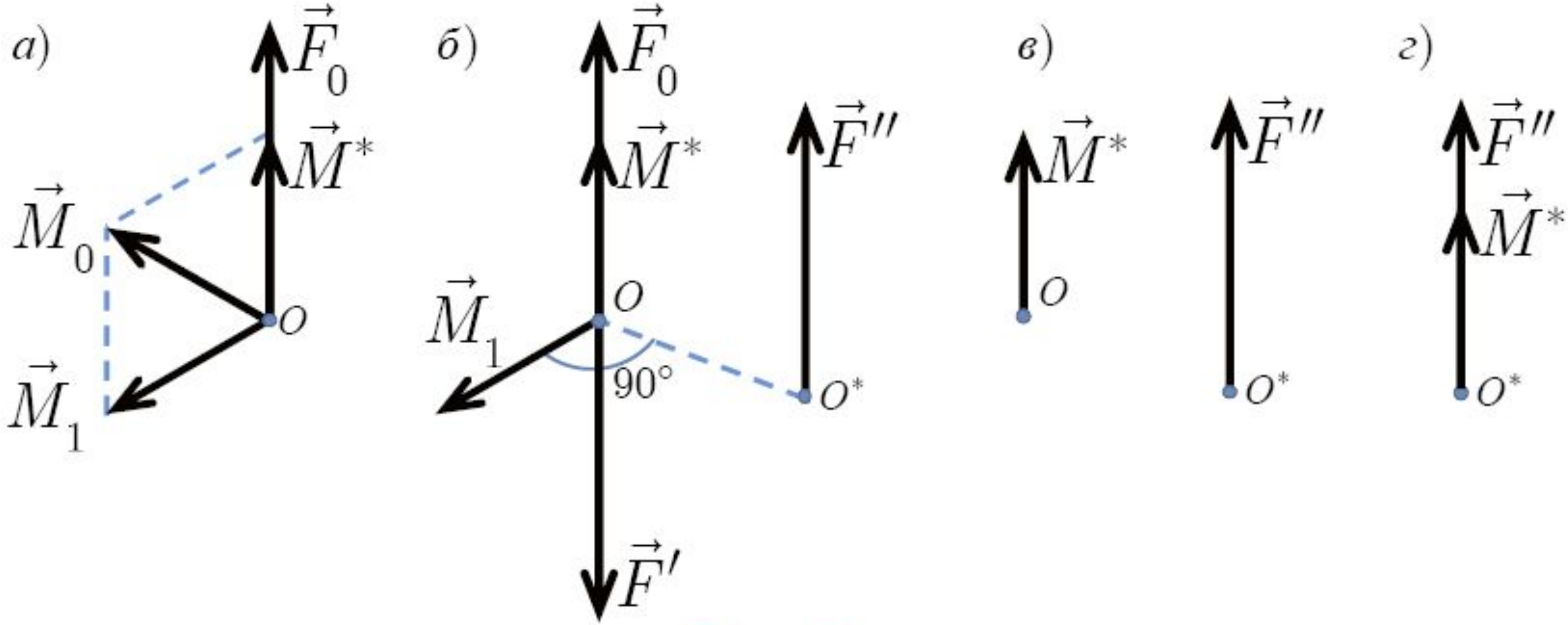

Рис. 7.2.

Может возникнуть вопрос, в каких случаях данную систему сил можно привести к динаме? На этот вопрос отвечает следующая **Теорема**: ***Если второй статический инвариант не равен нулю, то систему сил можно привести к динаме.***

Пусть в произвольной точке O (рис. 7.2, *а*) система приведена к силе, равной главному вектору $\vec{F}_O$, и паре сил с моментом, равным главному моменту $\vec{M}_O$. Так как по условию теоремы $I_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O \neq 0$, то оба вектора, $\vec{F}_O$ и $\vec{M}_O$, не равны нулю и не перпендикулярны между собой. Разложим главный момент на две составляющие: одну $\vec{M}^*$ направим по главному вектору и другую $\vec{M}_1$ направим перпендикулярно главному вектору (рис. 7.2, *а*). Составляющая $\vec{M}_1$ представляет собой момент пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{M}_1$. Выберем силы $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, составляющие эту пару, равными по модулю главному вектору $\vec{F}_O$ и приложим силу $\vec{F}'$ к центру приведения (рис. 7.2, *б*). Система сил $\vec{F}_O$, $\vec{F}'$, как эквивалентная нулю, может быть отброшена (рис. 7.2, *в*). Так как момент $\vec{M}^*$ – вектор свободный, то его можно перенести из точки O в точку O^* (рис. 7.2, *г*). Таким образом, заданная система сил приведена в точке O^* к силе $\vec{F}'' = \vec{F}_O$ и к паре сил с моментом $\vec{M}^*$ (рис. 7.2, *г*), расположенной в плоскости, перпендикулярной силе, т.е. **мы получили динамический винт**.

Из формулы (7.6) видно, **что положительному второму инварианту** $\left(I_2 > 0\right)$ **отвечает правый динамический винт,** а **отрицательному второму инварианту** $\left(I_2 < 0\right)$ – **левый динамический винт**.

Точка O^* не единственная, где система сил приводится к динаме. В самом деле, силу можно переносить вдоль линии ее действия, момент же пары сил есть вектор свободный, следовательно, система сил может быть приведена к динаме во всех точках прямой, проходящей через точку O^* и являющейся линией действия силы $\vec{F}'' = \vec{F}_O$. Эта прямая называется **центральной осью системы сил**. Найдем теперь уравнение центральной оси.

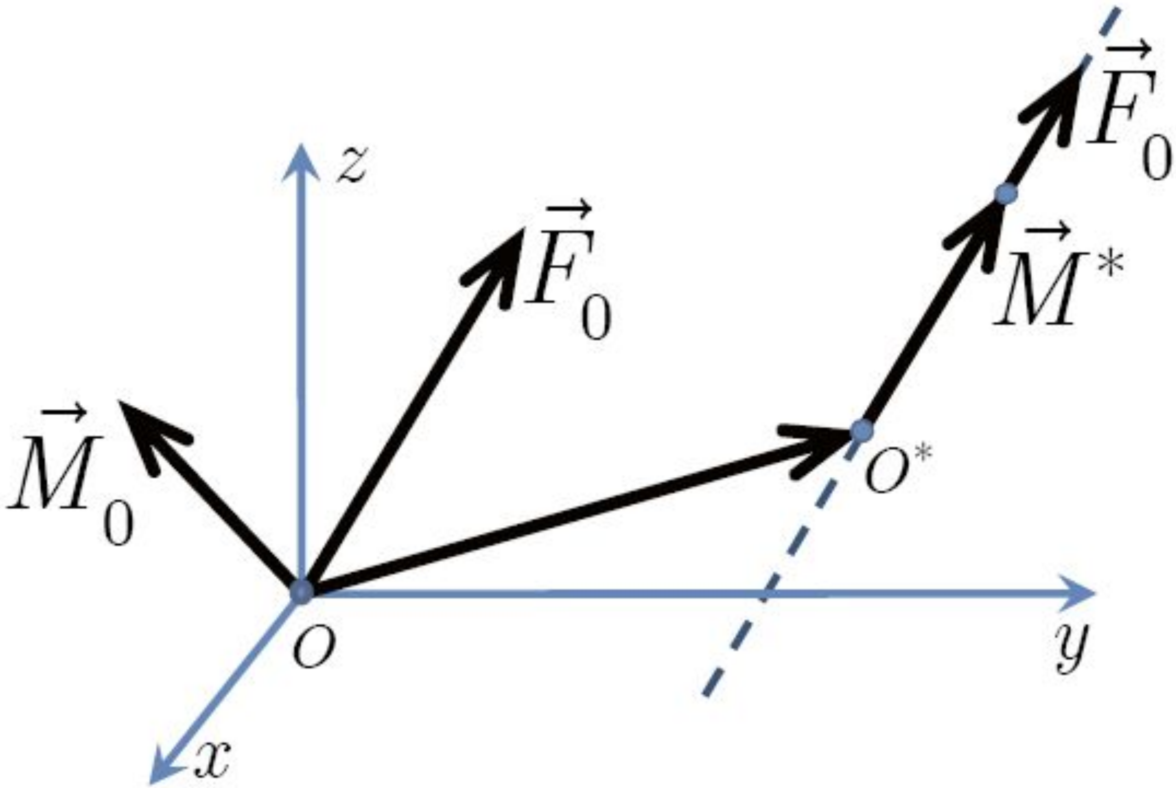

Рис. 7.3.

Пусть O^* (рис. 7.3) – точка центральной оси. Тогда для этой точки главный вектор и главный момент должны быть коллинеарны друг другу. На основании формулы (7.2) главный момент для точки O^* можно записать в виде

$$\vec{M}^* = \vec{M}_O + \overline{O^*O} \times \vec{F}_O = \vec{M}_O - \overline{OO^*} \times \vec{F}_O,$$

Условие коллинеарности главного вектора и главного момента для точки O^* записывается следующим образом:

$$p\vec{F}_O = \vec{M}^*,$$

где p – параметр винта, имеющий размерность длины.

Таким образом,

$$p\vec{F}_O = \vec{M}_O - \overline{OO^*} \times \vec{F}_O. \qquad (7.7)$$

Пусть F_x, F_y, F_z и M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} – соответственно проекции главного вектора и главного момента на оси x, y и z; тогда

$$\vec{F}_O = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \qquad \vec{M}_O = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k}.$$

Пусть координаты какой-либо точки O^* центральной оси будут x, y, z, следовательно,

$$\overline{OO^*} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Подставляя соответствующие выражения в соотношение (7.7), получим

$$p\left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right) = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k} -$$

$$-\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left[M_{Ox} - \left(yF_z - zF_y\right)\right]\vec{i} +$$

$$+\left[M_{Oy} - \left(zF_x - xF_z\right)\right]\vec{j} + \left[M_{Oz} - \left(xF_y - yF_x\right)\right]\vec{k}.$$

Приравнивая коэффициенты при единичных векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, будем иметь

$$pF_x = M_{Ox} - \left(yF_z - zF_y\right),$$
$$pF_y = M_{Oy} - \left(zF_x - xF_z\right),$$
$$pF_z = M_{Oz} - \left(xF_y - yF_x\right).$$

Следовательно,

$$\frac{M_{Ox} - \left(yF_z - zF_y\right)}{F_x} = \frac{M_{Oy} - \left(zF_x - xF_z\right)}{F_y} = \tag{7.8}$$
$$= \frac{M_{Oz} - \left(xF_y - yF_x\right)}{F_z}.$$

Это и есть искомое уравнение центральной оси.

§ 7.2. Частные случаи приведения пространственной системы сил.

Если при приведении системы сил к динамическому винту главный момент динамы оказался равным нулю, а главный вектор отличен от нуля, то это означает, что система сил приведена к равнодействующей, причем центральная ось является линией действия этой равнодействующей.

Выясним, при каких условиях, относящихся к главному вектору $\vec{F}_O$ и главному моменту $\vec{M}_O$, это может быть. Поскольку главный момент динамы $\vec{M}^*$ равен составляющей главного момента $\vec{M}_O$, направленной по главному вектору, то рассматриваемый случай $\vec{M}^* = 0$ означает, что главный момент $\vec{M}_O$ перпендикулярен главному вектору, т.е. $I_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O = 0$. Отсюда непосредственно вытекает, что если главный вектор $\vec{F}_O$ не равен нулю, а второй инвариант равен нулю,

$$\vec{F}_O \neq 0, I_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O = 0, \qquad (7.9)$$

то рассматриваемая *система приводится к равнодействующей*.

В частности, если для какого-либо центра приведения $\vec{F}_O \neq 0$, а $\vec{M}_O = 0$, то это означает, что система сил приведена к равнодействующей, проходящей через данный центр приведения; при этом условие (7.9) также будет выполнено.

Докажем теорему о моменте равнодействующей.

Теорема Вариньона: ***Если пространственная система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно произвольной точки равен геометрической сумме моментов всех сил относительно той же точки.***

Пусть система сил имеет равнодействующую $\vec{R}$ и точка O лежит на линии действия этой равнодействующей. Если приводить заданную систему сил к этой точке, то получим, что главный момент равен нулю.

Возьмем какой-либо другой центр приведения O_1; тогда

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_k\right). \tag{7.10}$$

С другой стороны, на основании формулы (4.14) имеем

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_O\right) = \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_O\right), \tag{7.11}$$

так как $\vec{M}_O = 0$. Сравнивая выражения (7.10) и (7.11) и учитывая, что в данном случае $\vec{F}_O = \vec{R}$, получаем

$$\vec{M}_{O_1}\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{O_1}\left(\vec{F}_k\right). \tag{7.12}$$

Таким образом, теорема доказана.

Пусть при каком-либо выборе центра приведения $\vec{F}_O = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$. Так как главный вектор не зависит от центра приведения, то он равен нулю и при любом другом выборе центра приведения. Поэтому главный момент тоже не меняется при перемене центра приведения, и, следовательно, в этом случае система сил приводится к паре сил с моментом, равным $\vec{M}_O$. Составим таблицу всех возможных случаев приведения пространственной системы сил:

№	$I_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O$	$\vec{F}_O$	$\vec{M}_O$	Случай приведения
1	$I_2 \neq 0$	$\vec{F}_O \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	**Динамический винт**
2	$I_2 = 0$	$\vec{F}_O \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0, \vec{M}_O = 0$	**Равнодействующая**
3	$I_2 = 0$	$\vec{F}_O = 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	**Пара сил**
4	$I_2 = 0$	$\vec{F}_O = 0$	$\vec{M}_O = 0$	**Система сил эквивалентна нулю**

§ 7.3. Уравнения равновесия пространственной системы сил.

Как было выяснено в § 4.4, необходимые и достаточные условия равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, можно записать в виде трех уравнений проекций (4.16) и трех уравнений моментов (4.17):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \tag{7.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}\left(\vec{F}_k\right) = 0. \tag{7.14}$$

Если тело полностью закреплено, то действующие на него силы находятся в равновесии и уравнения (7.13) и (7.14) служат для определения опорных реакций. Конечно, могут встретиться случаи, когда этих уравнений недостаточно для определения опорных реакций; такие статически неопределимые системы мы рассматривать не будем.

Для пространственной системы параллельных сил уравнения равновесия принимают следующий вид (§ 4.4):

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Ox}\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}\left(\vec{F}_k\right) = 0. \qquad (7.15)$$

Рассмотрим теперь случаи, когда тело закреплено лишь частично, т.е. связи, которые наложены на тело, не гарантируют равновесия тела. **Можно указать четыре частных случая.**

1. Твердое тело имеет одну неподвижную точку. Иначе говоря, оно прикреплено к неподвижной точке при помощи идеального сферического шарнира.

Поместим в эту точку (см. точку A на рис. 7.4) начало неподвижной системы координат. Действие связи в точке A заменим реакцией; так как она неизвестна по модулю и направлению, то мы ее представим в виде трех неизвестных составляющих $X_{A'}$, $Y_{A'}$, $Z_{A'}$, направленных соответственно вдоль осей x, y, z.

Уравнения равновесия (7.13) и (7.14) в этом случае запишутся в таком виде:

$$1)X_A+\sum_{k=1}^{n}F_{kx}=0, \qquad 2)Y_A+\sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0,$$

$$3)Z_A+\sum_{k=1}^{n}F_{kz}=0, \qquad 4)\sum_{k=1}^{n}M_{Ax}\left(\vec{F}_k\right)=0, \qquad (7.16)$$

$$5)\sum_{k=1}^{n}M_{Ay}\left(\vec{F}_k\right)=0, \qquad 6)\sum_{k=1}^{n}M_{Az}\left(\vec{F}_k\right)=0.$$

Последние три уравнения не содержат составляющих реакции, так как линия действия этой силы проходит через точку A. Следовательно, эти уравнения устанавливают зависимости между активными силами, необходимые для равновесия тела, причем три первых уравнения могут быть использованы для определения составляющих реакции.

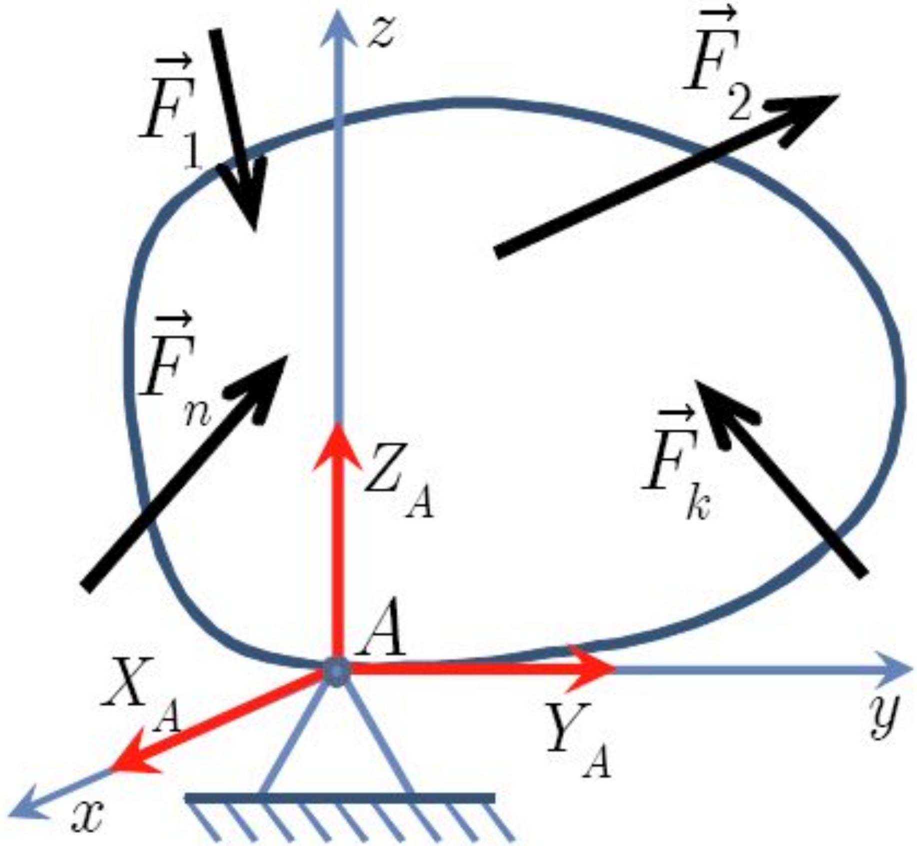

Рис. 7.4.

Условием равновесия твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, является равенство нулю каждой из алгебраических сумм моментов всех активных сил системы относительно трех осей, пересекающихся в неподвижной точке тела.

2. Тело имеет две неподвижные точки. Это, например, будет иметь место, если оно прикреплено к двум неподвижным точкам при помощи шарниров (рис. 7.5).

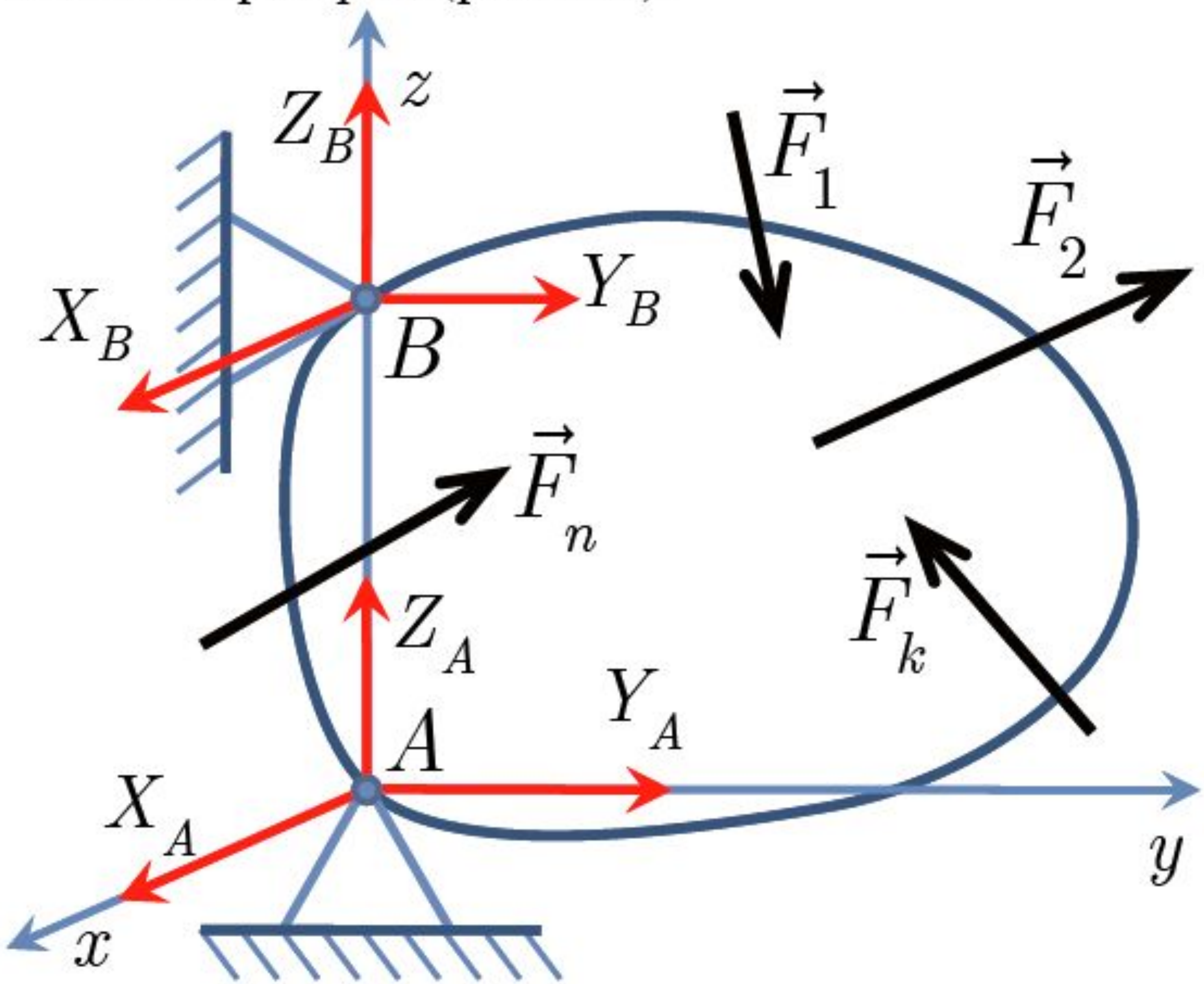

Рис. 7.5.

Выберем начало координат в точке A и направим ось z вдоль линии, проходящей через точки A и B. Заменим действие связей реакциями, направив составляющие реакций вдоль координатных осей (рис. 7.5). Обозначим расстояние между точками A и B через a; тогда уравнения равновесия (7.13) и (7.14) запишутся в следующем виде:

$$1) X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad 2) Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,$$

$$3) Z_A + Z_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$4) - aY_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}\left(\vec{F}_k\right) = 0,$$

$$5) aX_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}\left(\vec{F}_k\right) = 0, \qquad 6) \sum_{k=1}^{n} M_{Az}\left(\vec{F}_k\right) = 0. \qquad (7.17)$$

Последнее уравнение не содержит составляющих сил реакций и устанавливает связь между активными силами, необходимую для равновесия тела. Следовательно, ***условием равновесия твердого тела, имеющего две неподвижные точки, является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех активных сил, приложенных к телу, относительно оси, проходящей через неподвижные точки.*** Первые пять уравнений служат для определения неизвестных составляющих реакций $X_{A'}, Y_{A'}, Z_{A'}, X_{B'}, Y_{B'}, Z_{B}$.

Заметим, что составляющие Z_A и Z_B не могут быть определены в отдельности. Из третьего уравнения определяется только сумма $Z_A + Z_{B'}$ и, следовательно, задача в отношении каждого из этих неизвестных для твердого тела является статически неопределенной. Однако, если в точке B находится не сферический, а цилиндрический шарнир (т.е. подшипник), не препятствующий продольному скольжению тела вдоль оси вращения, то $Z_B = 0$ и задача становится статически определенной.

3. Тело имеет неподвижную ось вращения, вдоль которой оно может скользить без трения. Это значит, что в точках A и B находятся цилиндрические шарниры (подшипники), причем составляющие их реакций вдоль оси вращения равны нулю.

Следовательно, уравнения равновесия примут вид

$$1) X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,$$

$$2) Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad 3) \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$4) -aY_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ax}\left(\vec{F}_k\right) = 0,$$

$$5) aX_B + \sum_{k=1}^{n} M_{Ay}\left(\vec{F}_k\right) = 0, \qquad 6) \sum_{k=1}^{n} M_{Az}\left(\vec{F}_k\right) = 0. \qquad (7.18)$$

Два из уравнений (7.18), а именно третье и шестое, накладывают ограничения на систему активных сил, а остальные уравнения служат для определения реакций.

4. Тело опирается в трех точках на гладкую плоскость, причем точки опоры не лежат на одной прямой. Обозначим эти точки через A, B и C и совместим с плоскостью ABC координатную плоскость Axy (рис. 7.6). Заменив действие связей вертикальными реакциями $N_{A'}$, N_B и $N_{C'}$ запишем условия равновесия (7.13) и (7.14) в виде:

$$1)\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad 3) N_A + N_B + N_C + \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$2)\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad 4)\sum_{k=1}^{n} M_{Ax}\left(\vec{F}_k\right) - bN_C = 0, \qquad (7.19)$$

$$5)\sum_{k=1}^{n} M_{Ay}\left(\vec{F}_k\right) - aN_B - cN_C = 0, \quad 6)\sum_{k=1}^{n} M_{Az}\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

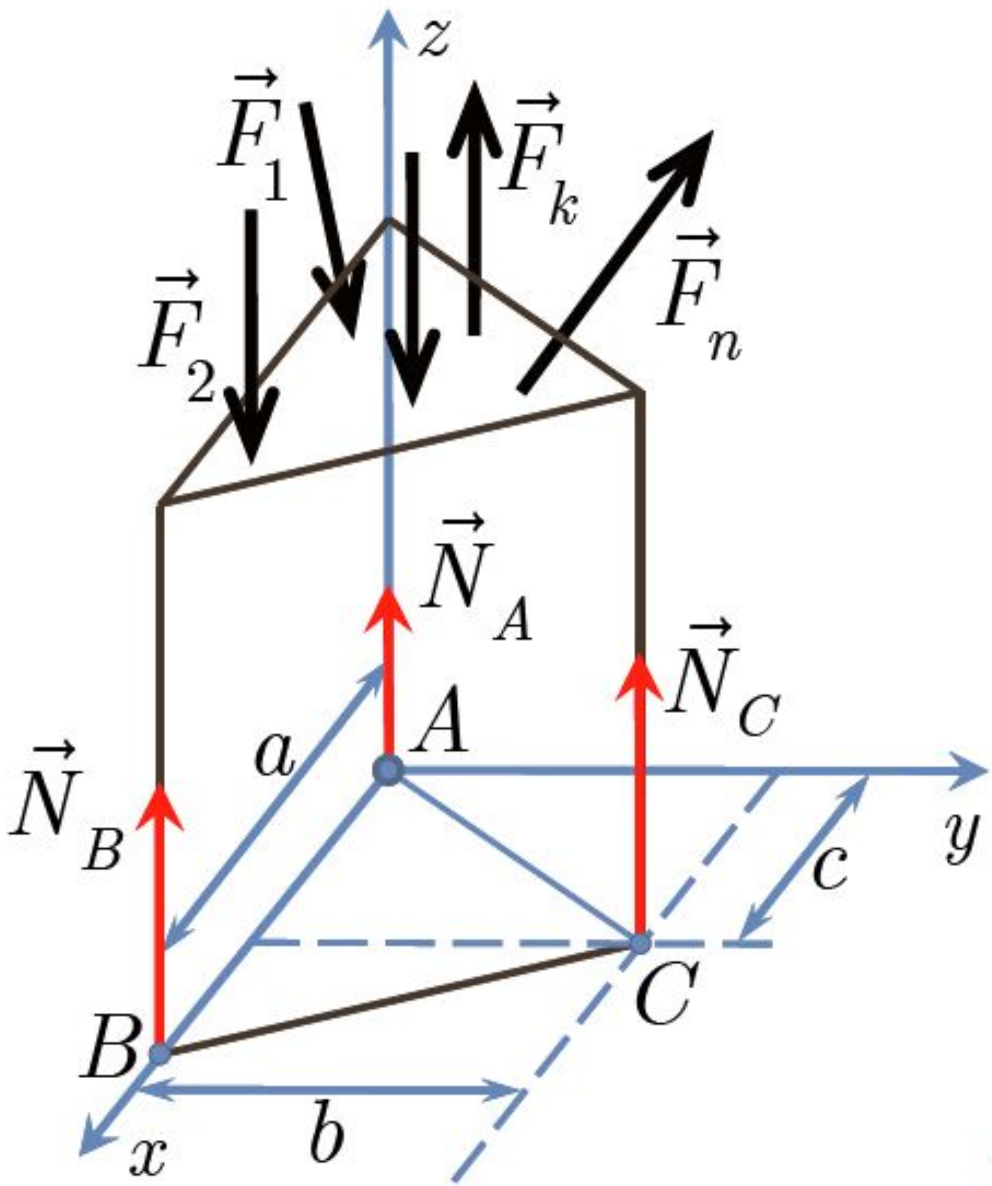

Рис. 7.6.

Третье – пятое уравнения могут служить для определения неизвестных реакций, а первое, второе и шестое уравнения представляют собой условия, связывающие активные силы и необходимые для равновесия тела. Конечно, для равновесия тела необходимо выполнение условий $N_A \geq 0$, $N_B \geq 0$, $N_C \geq 0$, так как в точках опоры могут возникнуть только реакции принятого выше направления.

Если тело опирается на горизонтальную плоскость более чем в трех точках, то задача становится статически неопределенной, так как при этом реакций будет столько, сколько точек, а уравнений для определения реакций остается по-прежнему только три.