

СТАТИКА

Глава VIII

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 8.1. Центр параллельных сил

Рассмотрим систему параллельных сил, которая приводятся к равнодействующей. Прежде всего, нужно отметить, что условия приведения системы параллельных сил к равнодействующей сводятся к одному неравенству $\vec{F} \neq 0$. Действительно, уже было показано, что второй инвариант системы параллельных сил тождественно равен нулю. Поэтому единственным условием приведения пространственной системы параллельных сил к

равнодействующей является неравенство нулю главного вектора этой системы

$$\vec{F} \neq 0. \quad (8.1)$$

Считая это условие выполненным, выясним, что происходит с равнодействующей \vec{R} при одновременном повороте линий действия данных параллельных сил на один и тот же угол, если точки приложения этих сил сохраняются неизменными и повороты линий действия сил происходят вокруг параллельных осей.

При этих условиях равнодействующая заданной системы сил также одновременно поворачивается на тот же угол, причем поворот происходит вокруг некоторой фиксированной точки, которая называется *центром параллельных сил*. Перейдем к доказательству этого утверждения.

Предположим, что для рассматриваемой системы параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ главный вектор не равен нулю, следовательно,

данная система сил приводится к равнодействующей. Пусть точка O_1 есть какая-либо точка линии действия этой равнодействующей. Пусть теперь \vec{r} – радиус-вектор точки O_1 относительно выбранного полюса O , а \vec{r}_k – радиус-вектор точки приложения силы \vec{F}_k (рис. 8.1).

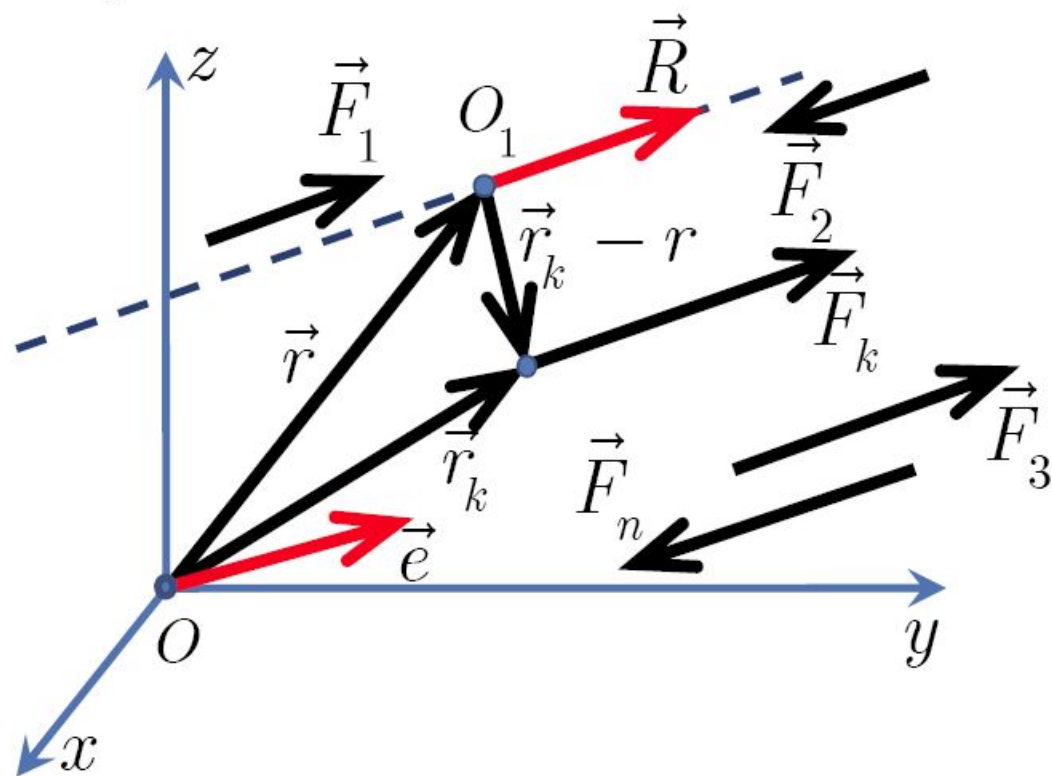


Рис. 8.1

Согласно теореме Вариньона сумма моментов всех сил системы относительно точки O_1 равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}) \times \vec{F}_k = 0, \quad (8.2)$$

так как точка O_1 , лежит на линии действия равнодействующей.

Полученное равенство можно переписать в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k - \sum_{k=1}^n \vec{r} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k - \vec{r} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0. \quad (8.3)$$

Введем теперь в рассмотрение единичный вектор \vec{e} , параллельный линиям действия сил. Тогда любая сила \vec{F}_k может быть представлена в виде

$$\vec{F}_k = F_k^* \vec{e}, \quad (8.4)$$

где $F_k^* = F_k$ если направление силы \vec{F}_k и вектора \vec{e} совпадают, и $F_k^* = -F_k$, если \vec{F}_k и \vec{e} направлены противоположно друг другу. Очевидно, что при этом

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{e} \sum_{k=1}^n F_k^*. \quad (8.5)$$

Подставляя выражения (8.4) и (8.5) в соотношение (8.3), получим

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times F_k^* \vec{e} - \vec{r} \times \vec{e} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0,$$

откуда

$$\left[\sum_{k=1}^n \vec{r}_k F_k^* - \vec{r} \sum_{k=1}^n F_k^* \right] \times \vec{e} = 0. \quad (8.6)$$

Последнее равенство удовлетворяется при любом направлении сил (т.е. направлении единичного вектора \vec{e}) только при условии,

что первый множитель равен нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k F_k^* - \vec{r} \sum_{k=1}^n F_k^* = 0. \quad (8.7)$$

В свою очередь это равенство имеет единственное решение относительно радиуса-вектора \vec{r} , определяющего такую точку приложения равнодействующей, которая не меняет своего положения при повороте линий действия сил. Такой точкой и является *центр параллельных сил*, чем и доказывается его существование. Обозначив радиус-вектор центра параллельных сил через \vec{r}_c из равенства (8.7) получим

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*} = \frac{\vec{r}_1 F_1^* + \vec{r}_2 F_2^* + \dots + \vec{r}_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}. \quad (8.8)$$

Пусть x_c, y_c, z_c – координаты центра параллельных сил, а x_k, y_k, z_k – координаты точки приложения произвольной силы \vec{F}_k ; тогда координаты центра параллельных сил найдутся из формул:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*} = \frac{x_1 F_1^* + x_2 F_2^* + \dots + x_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*},$$
$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*} = \frac{y_1 F_1^* + y_2 F_2^* + \dots + y_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}, \quad (8.9)$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^n F_k^*} = \frac{z_1 F_1^* + z_2 F_2^* + \dots + z_n F_n^*}{F_1^* + F_2^* + \dots + F_n^*}.$$

Выражения

$$\sum_{k=1}^n x_k F_k^*, \quad \sum_{k=1}^n y_k F_k^*, \quad \sum_{k=1}^n z_k F_k^*,$$

называются *статическими моментами* заданной системы сил соответственно относительно координатных плоскостей yOz , xOz , xOy .

Отметим, что если начало координат выбрано в центре параллельных сил, то

$$x_c = y_c = z_c = 0,$$

и статические моменты заданной системы сил равны нулю.

§ 8.2. Центр тяжести

Тело произвольной формы, находящееся в поле сил тяжести, можно разбить сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объемы (рис. 8.2).

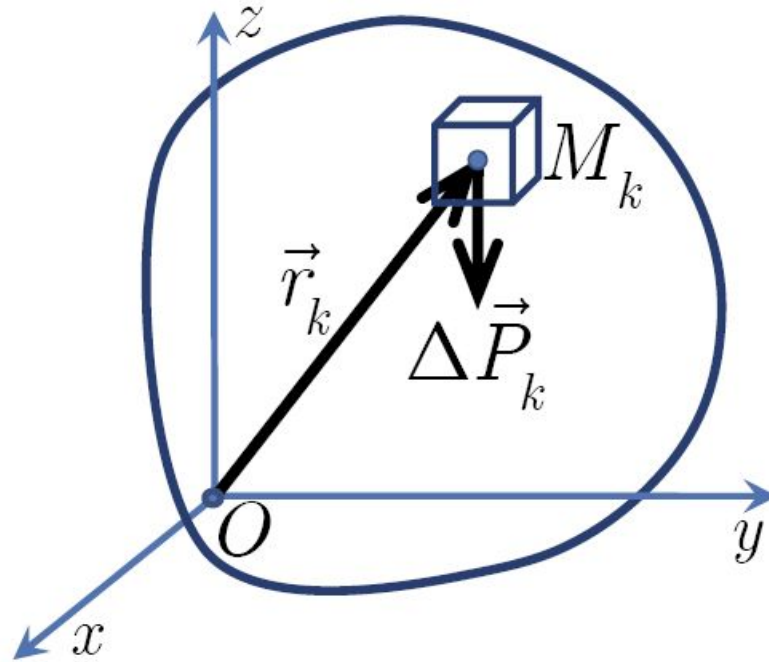


Рис. 8.2.

Если пренебречь размерами тела по сравнению с радиусом Земли, то силы тяжести, действующие на каждый элементарный объем,

можно считать параллельными друг другу. Обозначим через ΔV_k объем элементарного куба с центром в точке M_k (см. рис. 8.2), а силу тяжести, действующую на этот элемент, – через $\Delta \vec{P}_k$. Тогда *средним удельным весом* элемента объема называется отношение $\Delta P_k / \Delta V_k$. Стягивая параллелепипед в точку $M_{k'}$, получим *удельный вес в данной точке тела*, как предел среднего удельного веса

$$\gamma(x_k, y_k, z_k) = \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}. \quad (8.10)$$

Таким образом, удельный вес является функцией координат, т.е. $\gamma = \gamma(x_k, y_k, z_k)$. Будем считать, что вместе с геометрическими характеристиками тела задан также и удельный вес в каждой точке тела.

Вернемся к разбиению тела на элементарные объемы. Если

исключить объемы тех элементов, которые граничат с поверхностью тела, то можно получить ступенчатое тело, состоящее из совокупности кубов. Приложим к центру каждого куба силу тяжести $\Delta P_k = \gamma_k \Delta V_{k'}$, где γ_k – удельный вес в точке тела, совпадающей с центром куба. Для системы n параллельных сил тяжести, образованной таким образом, можно найти центр параллельных сил

$$\vec{r}^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \Delta P_k}{\sum_{k=1}^n \Delta P_k} = \frac{\vec{r}_1 \Delta P_1 + \vec{r}_2 \Delta P_2 + \dots + \vec{r}_n \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n}. \quad (8.11)$$

Формула (8.11) определяет положение некоторой точки C_n .

Центром тяжести тела называется точка, являющаяся предельной для точек C_n при $n \rightarrow \infty$. Другими словами, центром

тяжести тела называется такая точка, радиус-вектор которой определяется следующим пределом:

$$\vec{r}_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \Delta P_k}{\sum_{k=1}^n \Delta P_k}, \quad (8.12)$$

или, переходя к удельному весу,

$$\vec{r}_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \vec{r}_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta V_k} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma_k \vec{r}_k \Delta V_k}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta V_k}. \quad (8.13)$$

При таком предельном переходе предполагается, что размеры всех кубов стремятся к нулю. Пределы знаменателей в формулах (8.12) и

(8.13) равны весу тела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta P_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta V_k = P.$$

Поскольку пределы интегральных сумм в числителе и знаменателе формулы (8.13) представляют собой определенные интегралы, распространенные по объему тела, то \vec{r}_c можно представить в следующем виде:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{P} \iiint_{(V)} \gamma(x_k, y_k, z_k) \vec{r} dx dy dz.$$

Координаты центра тяжести определяются формулами

$$x_c = \frac{1}{P} \iiint_{(V)} x \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad (8.14)$$

$$y_c = \frac{1}{P} \iiint_{(V)} y\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$z_c = \frac{1}{P} \iiint_{(V)} z\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$
(8.14)

Тело называется *однородным*, если $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$. В этом случае величина γ выносится в формулах (8.14) за знаки интегралов в числителе и знаменателе и сокращается. Знаменатели в формулах (8.14) после сокращения их на V равны объему тела V , таким образом, полагая $dV = dx dy dz$ получим

$$x_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x dV, y_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y dV, z_c = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z dV. \text{ (8.15)}$$

Центр тяжести однородного тела часто называют *центром тяжести объема*.

В ряде случаев тело можно считать тонкой пластиной или оболочкой (рис. 8.3, а).

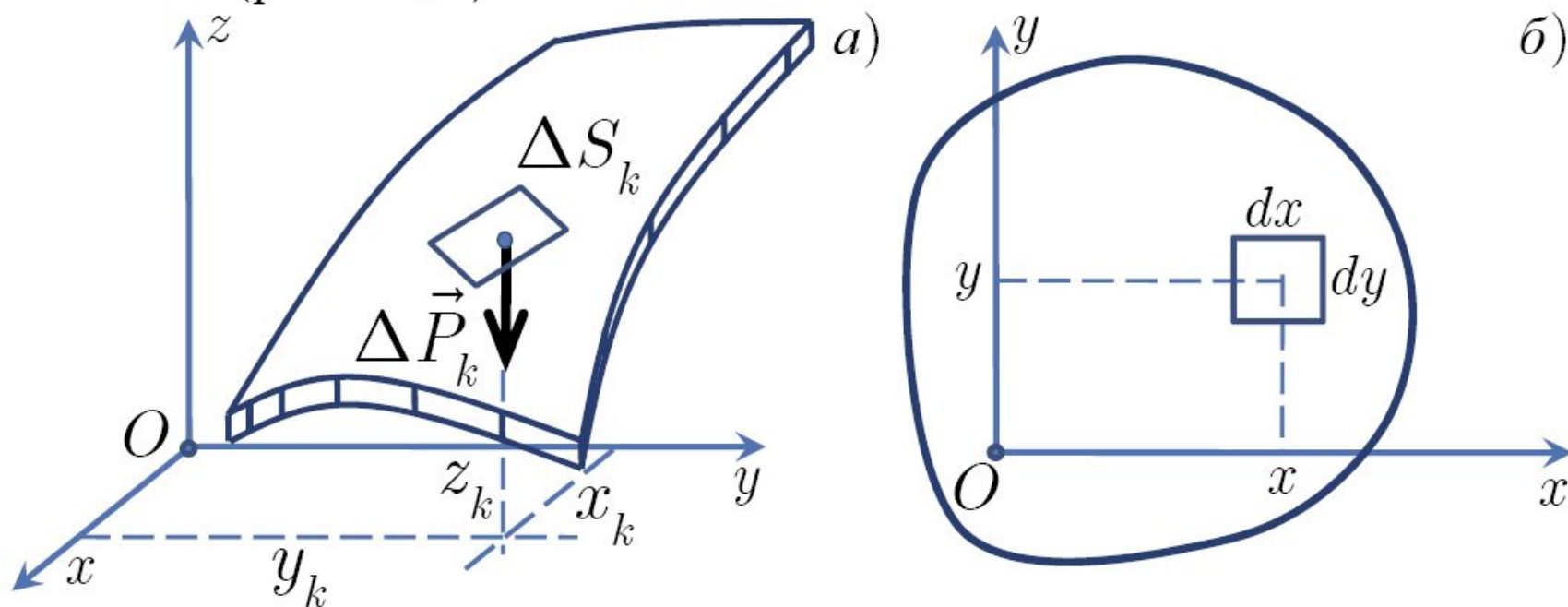


Рис. 8.3.

Найдем центр тяжести однородной оболочки, предполагая, что вес элемента ее поверхности пропорционален площади этого

элемента

$$\Delta P_k = \gamma' \Delta S_k,$$

и, следовательно, вес тела $P = \gamma' S$ (γ' – удельный и поверхностный вес; S – площадь рассматриваемой части поверхности).

Из определения центра тяжести в соответствии с формулами (8.15) получим при $\gamma' = \text{const}$

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dS, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dS, \quad z_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} z dS. \quad (8.16)$$

Центр тяжести однородной оболочки называют *центром тяжести поверхности*.

Как следует из формул (8.16), определение координат центра тяжести поверхности связано с вычислением интегралов по поверхности.

Для плоской однородной пластины (рис. 8.3, *a*) получим

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} x dx dy, \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_{(S)} y dx dy. \quad (8.17)$$

Наконец, рассмотрим криволинейный стержень – тело удлиненной формы, один из характерных размеров которого значительно больше двух других (рис. 8.4).

Полагая, что вес элемента такого стержня, заключенного между двумя сечениями, нормальными к его оси, пропорционален длине Δl дуги этой оси, получим

$$\Delta P_k = \gamma'' \Delta l_k, \quad P = \gamma'' L,$$

где L – длина стержня.

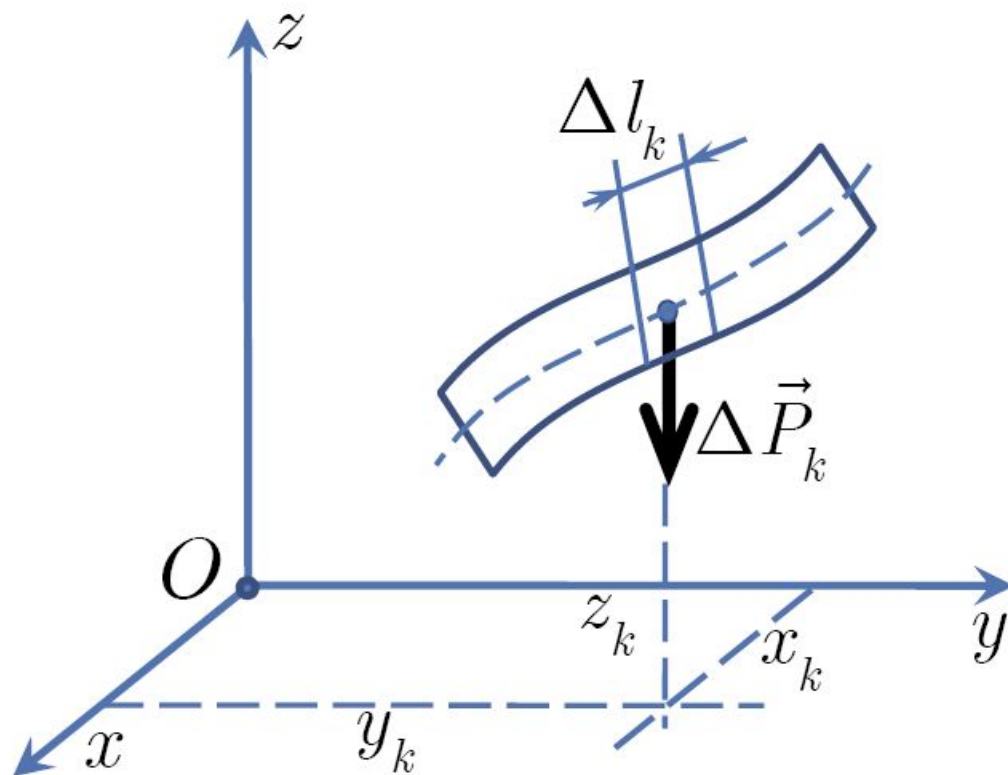


Рис. 8.4.

Величину γ'' называют «**ПОГОННЫМ**» весом. При сделанном предположении γ'' – величина постоянная. Тогда в соответствии с формулами (8.15) координаты центра тяжести однородного стержня имеют вид

$$x_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl, \quad z_c = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl. \quad (8.18)$$

Центр тяжести однородного криволинейного стержня называют *центром тяжести линии*.

§ 8.3. Методы нахождения центра тяжести

Во многих случаях центр тяжести тела можно определить с помощью весьма простых методов. Мы рассмотрим некоторые из них.

Симметрия. Если тело однородно и имеет плоскость симметрии (рис. 8.5, *a*), то задача определения центра тяжести несколько упрощается. Совместим с этой плоскостью симметрии

координатную плоскость xOy . Тогда каждому элементу объема тела $\Delta V_{k'}$, положение которого определяется координатами $x_{k'}$, $y_{k'}$, $z_{k'}$ будет соответствовать элемент объема тела ΔV_j с координатами $x_{j'}$, $y_{j'}$, $z_{j'}$, причем

$$\Delta V_j = \Delta V_{k'}, x_j = x_{k'}, y_j = y_{k'}, z_j = -z_{k'}.$$

Следовательно,

$$z_c = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k}{V} = 0,$$

так как в сумме $\sum_{k=1}^n z_k \Delta V_k$ все члены попарно уничтожаются.

Поэтому, если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.

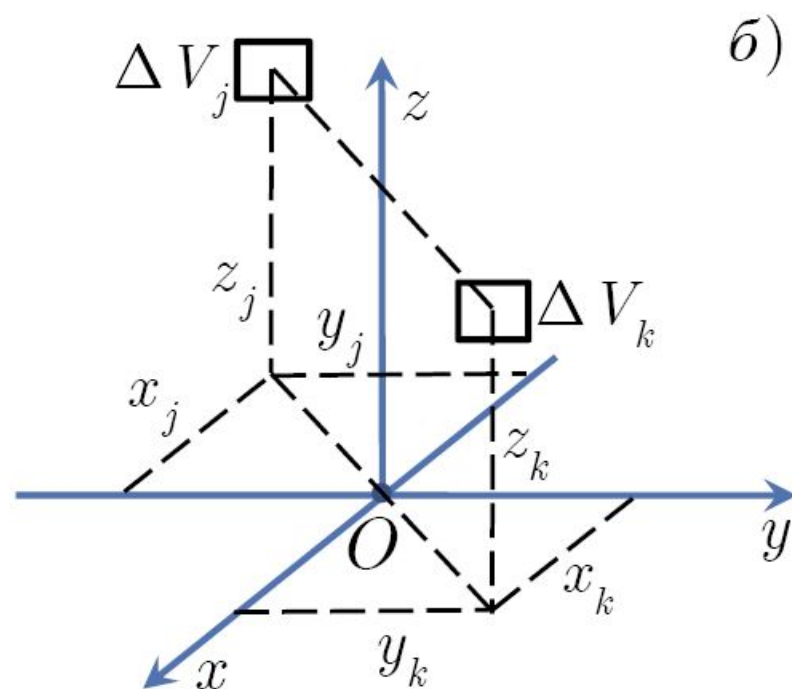
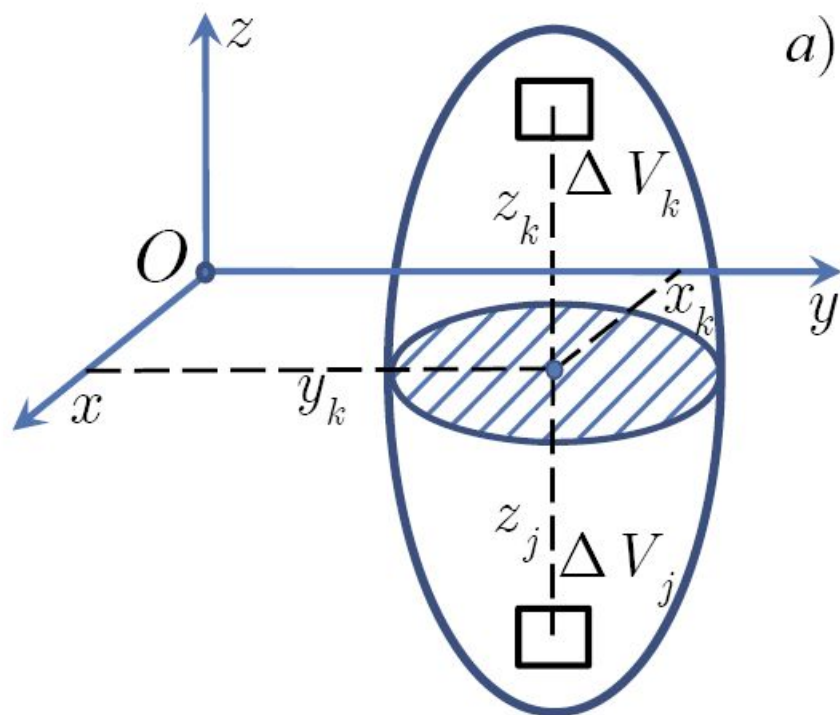


Рис. 8.5.

Пусть, далее, однородное тело имеет ось симметрии. Выберем эту ось за ось z (рис. 8.5, б); тогда каждому элементу объема тела ΔV_k с координатами x_k, y_k, z_k будет соответствовать элемент объема тела

ΔV_j с координатами $x_{j'}, y_{j'}, z_{j'}$, причем

$$\Delta V_j = \Delta V_{k'}, x_j = -x_{k'}, y_j = -y_{k'}, z_j = z_{k'}.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{1}{V} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \Delta V_k = 0, y_c = \frac{1}{V} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k \Delta V_k = 0,$$

так как в суммах $\sum_{k=1}^n x_k \Delta V_k$ и $\sum_{k=1}^n y_k \Delta V_k$ все члены попарно уничтожаются.

Таким образом, *если однородное тело имеет ось симметрии, то его центр тяжести лежит на этой оси.*

Аналогично можно показать, что если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела будет совпадать с этой точкой. Так, например, для пластинки, имеющей прямоугольную форму, центр тяжести лежит в центре прямоугольника.

Разбиение. Иногда представляется возможным разбить тело на такие части, для которых вес и положение центра тяжести заранее известны. Пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ – радиусы-векторы центра тяжести каждой части, а P_1, P_2, \dots, P_n – веса соответствующих частей. Из формулы (8.8) следует, что

$$\vec{r}_c = \frac{P_1 \vec{r}_1 + P_2 \vec{r}_2 + \dots + P_n \vec{r}_n}{P}, \quad (8.19)$$

где

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Для однородной пластинки, например, из формулы (8.19) следует

$$x_c = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n x_k S_k, \quad y_c = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^n y_k S_k, \quad (8.20)$$

где S_k – площади частей плоской фигуры; x_k, y_k – координаты центров тяжести этих частей.

Отрицательные веса. Этот способ применяют при нахождении центра тяжести тела, имеющего свободные (т.е. пустые) полости. Пусть дано тело, у которого имеется k свободных полостей (рис. 8.6), причем P_c – вес тела, \vec{r}_c – искомый радиус-вектор, определяющий положение центра тяжести этого тела.

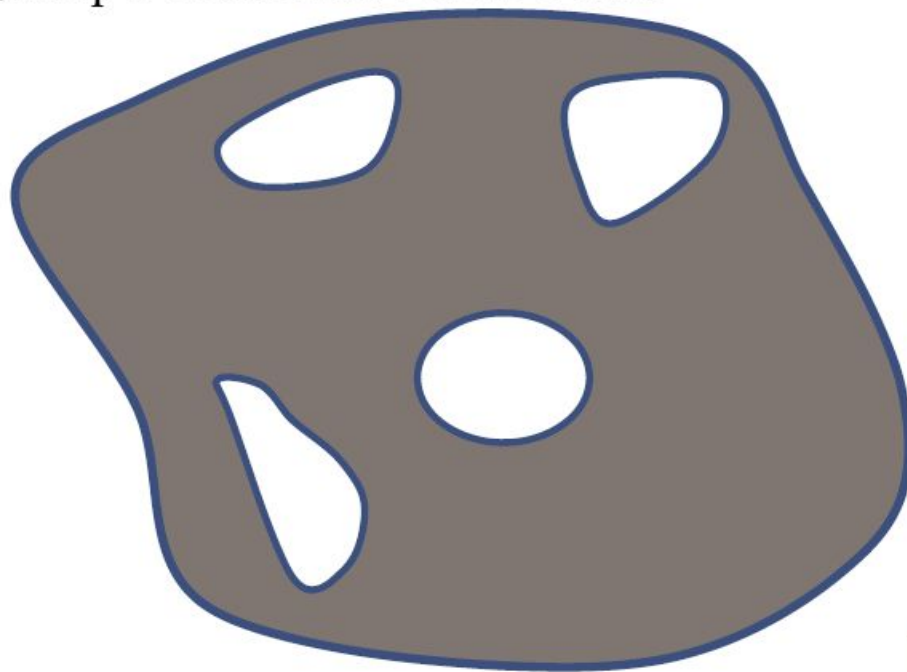


Рис. 8.6.

Если бы тело не имело полостей, то его вес P , очевидно, равнялся бы сумме

$$P = P_c + P_1 + P_2 + \dots + P_k,$$

где P_1, P_2, \dots, P_k – веса частей тела, которыми мы мысленно заполняем полости.

Обозначим через \vec{r} – радиус-вектор, определяющий положение центра тяжести тела, не имеющего полостей, а через $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k$ – радиусы-векторы, определяющие соответственно центры тяжести частей тела, заполняющих полости. На основании формулы (8.19) для тела, не имеющего полостей, можно записать

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_c P_c + \vec{r}_1 P_1 + \vec{r}_2 P_2 + \dots + \vec{r}_k P_k}{P_c + P_1 + P_2 + \dots + P_k}.$$

Находя из этой формулы радиус-вектор \vec{r}_c центра тяжести тела,

имеющего полости, получим

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}P - \vec{r}_1P_1 - \vec{r}_2P_2 - \dots - \vec{r}_kP_k}{P - P_1 - P_2 - \dots - P_k}. \quad (8.21)$$

Таким образом, при нахождении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять способ разбиения, но считать, что полости имеют отрицательные веса.

§ 8.4. Центры тяжести простейших фигур

Центр тяжести треугольника. Воспользуемся способом разбиения и разделим треугольник ABC (рис. 8.7) на элементарные полоски, проведя линии, параллельные стороне AC треугольника. Каждую такую полоску можно принять за прямоугольник; центры тяжести этих прямоугольников находятся в их серединах, т.е. на медиане BD треугольника. Следовательно,

центр тяжести треугольника должен лежать на этой же медиане BD .

Разбивая теперь треугольник на элементарные полоски линиями, параллельными стороне AB , заключаем, что центр тяжести треугольника должен быть расположен на медиане EC .

Следовательно, центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Эта точка, как известно, делит каждую из медиан на отрезки в отношении $1 : 2$, т.е. $OD : BD = 1 : 2$.

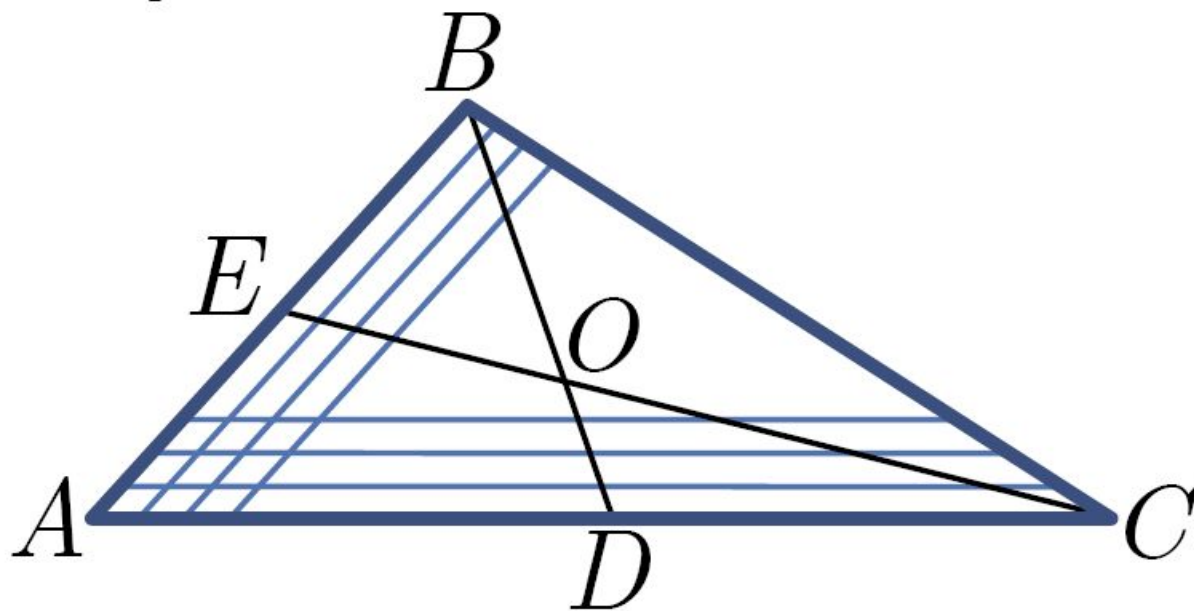


Рис. 8.7.

Центр тяжести трапеции. Аналогично предыдущему, разобьем трапецию $ABCD$ (рис. 8.8) на элементарные полоски, параллельные основаниям BC и AD .

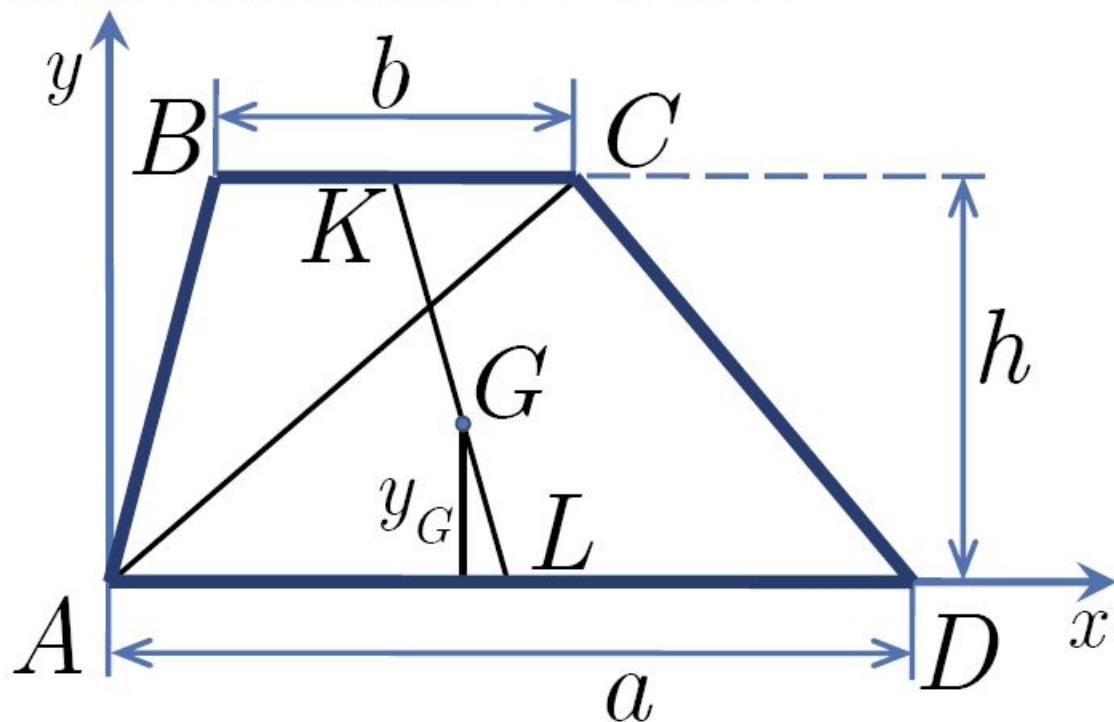


Рис. 8.8.

Центры тяжести полосок расположатся на прямой KL , соединяющей середины оснований трапеции. Следовательно, и центр тяжести трапеции лежит на этой прямой. Для того чтобы

найти его расстояние y_G от нижнего основания, разобьем трапецию на треугольники ABC и ACD . Для этих треугольников соответственно имеем

$$y_1 = \frac{2}{3}h, \quad S_1 = \frac{bh}{2},$$
$$y_2 = \frac{1}{3}h, \quad S_2 = \frac{ah}{2}.$$

Используя формулу (8.20), получаем

$$y_G = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}.$$

Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу ADB окружности радиуса R с центральным углом 2α . Поместим начало координат в центре окружности и направим ось x перпендикулярно хорде AB (рис. 8.9).

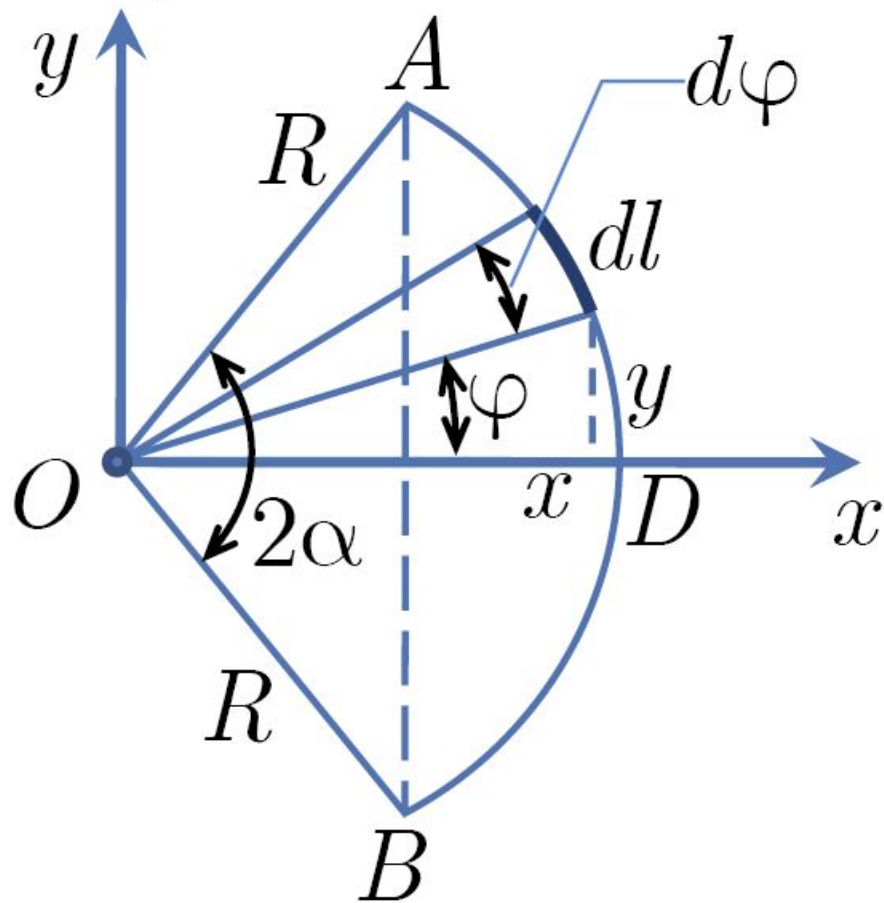


Рис. 8.9.

Так как вследствие симметрии фигуры относительно оси x центр тяжести будет лежать на этой оси x , т.е. $y_c = 0$, то остается найти только абсциссу центра тяжести x_c ; для этого воспользуемся формулой (8.18). Согласно рис. 8.9 имеем $x = R \cos \varphi$, $dl = R d\varphi$, $l = 2R\alpha$ и, следовательно,

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi}{2\alpha R} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}, \quad (8.22)$$

где α – половина центрального угла в радианах.

В частности, для дуги полуокружности ($\alpha = \pi/2$) будем иметь

$$x_c = \frac{2R}{\pi}.$$

Центр тяжести кругового сектора. Для определения положения центра тяжести кругового сектора разобьем его на элементарные секторы, как показано на рис. 8.10.

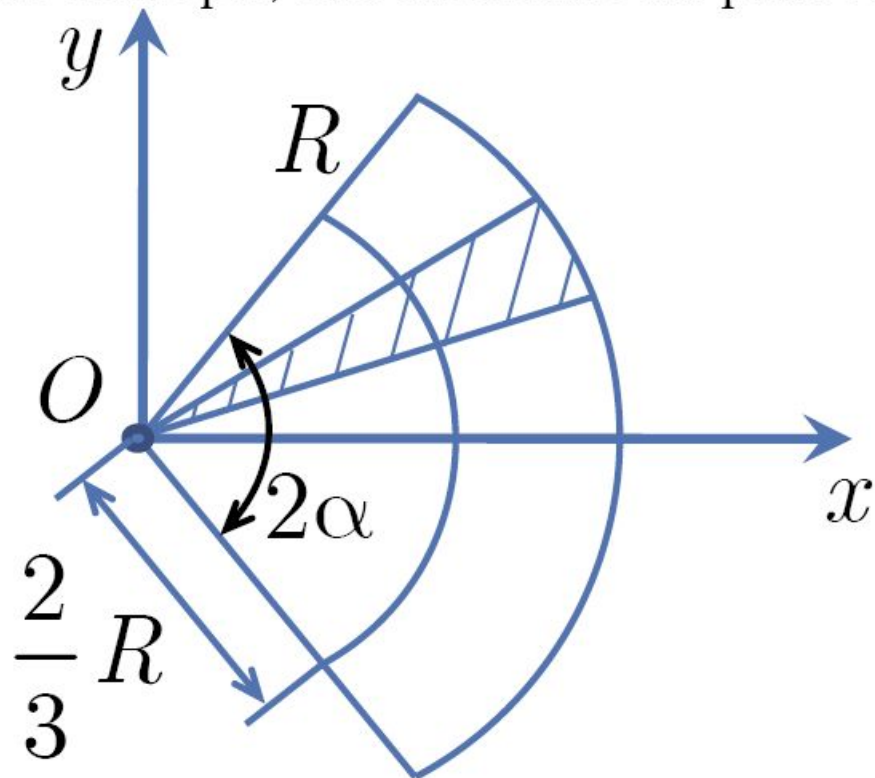


Рис. 8.10.

Каждый элементарный сектор можно принять за равнобедренный треугольник с высотой, равной R . Но высота в равнобедренном

треугольнике является также и медианой; следовательно, центр тяжести каждого элементарного треугольника лежит на расстоянии $2R / 3$ от начала координат O . Соответственно геометрическим местом центров тяжести всех элементарных треугольников является дуга окружности радиуса $2R / 3$.

Это означает, что центр тяжести площади кругового сектора можно искать как центр тяжести материальной линии, по которой непрерывно и равномерно распределен вес этого сектора. Применяв формулу (8.22), получим координату центра тяжести площади сектора

$$x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \quad (8.23)$$

где α – половина центрального угла в радианах. В частности, для сектора в виде полукруга ($\alpha = \pi/2$) получим

$$x_c = \frac{4R}{3\pi}. \quad (8.24)$$

Приведем без вывода формулы, определяющие положения центров тяжести некоторых простейших однородных тел.

Поверхность шарового сегмента

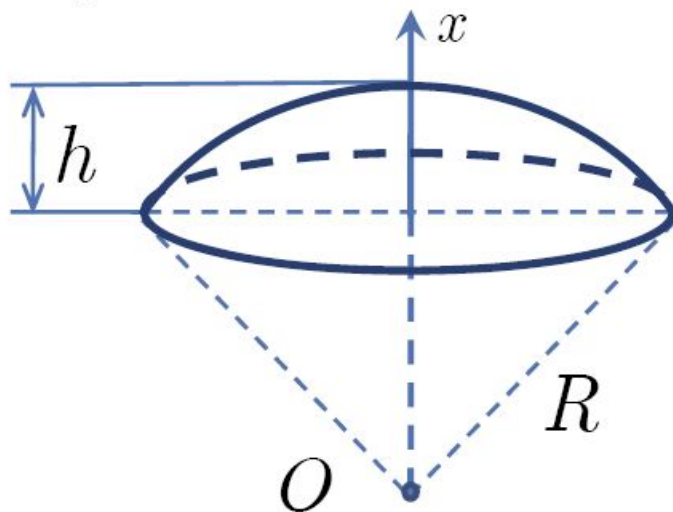


Рис. 8.13.

$$x_c = R - \frac{h}{2}. \quad (8.25)$$

Пирамида и конус

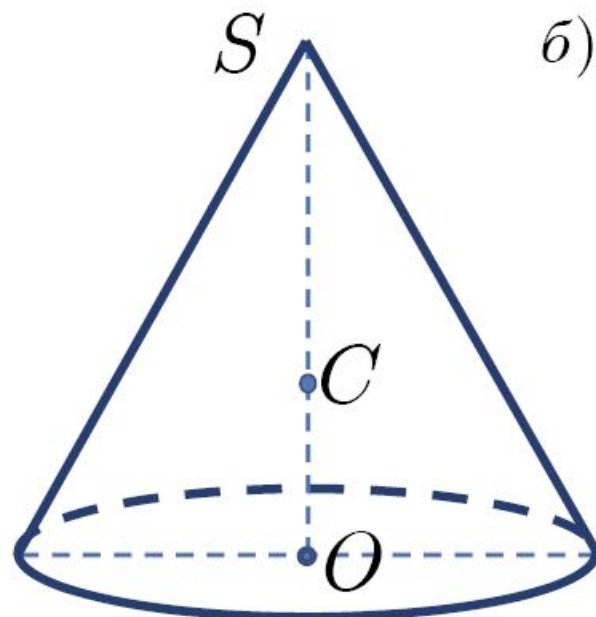
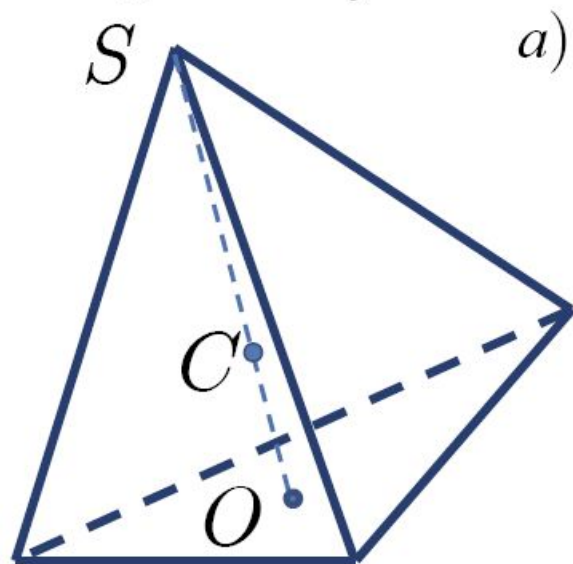


Рис. 8.14.

Центр тяжести находится на прямой, соединяющей вершину с центром тяжести P площади основания, на расстоянии $1/4$ ее длины, считая от основания

$$OC = \frac{1}{4} OS. \quad (8.26)$$

Шаровой сектор

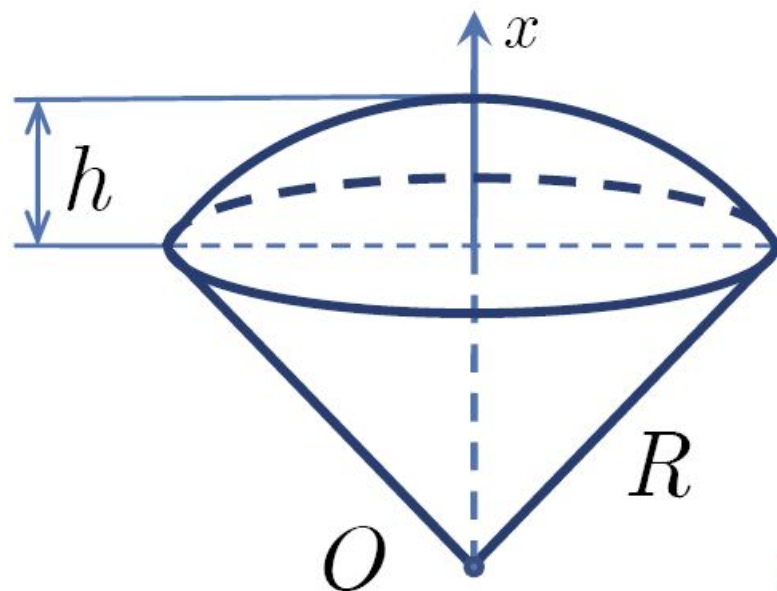


Рис. 8.15.

$$x_c = \frac{3}{4} \left(R - \frac{h}{2} \right), \quad (8.27)$$

где R – радиус шара и h – высота сферической части сектора.