Практика

Комбинаторика

1. Шифр замка состоит из 4-х букв, на каждой позиции может оказаться любая из 32-х букв. Сколько неудачных попыток может сделать грабитель, не знающий шифра?
2. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не смогла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или на одной вертикали шахматной доски).
3. Тридцать человек разбиты на три группы I, II и III по 10 человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?
4. Сколько четырехзначных чисел, составленных, из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

Комбинаторика

5. В поезд метро на начальной остановке вошли 100 пассажиров. Сколькими способами могут выйти все пассажиры на последующих 16 остановках поезда?
6. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материалами между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?
7. На плоскости отметили точку. Из нее провели 9 лучей. Сколько получилось при этом углов?

Комбинаторика

5. В поезд метро на начальной остановке вошли 100 пассажиров. Сколькими способами могут выйти все пассажиры на последующих 16 остановках поезда?
6. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материалами между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?
7. На плоскости отметили точку. Из нее провели 9 лучей. Сколько получилось при этом углов?

8. Решить уравнение $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$.
9. Решить уравнение $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$.
10. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?
11. Шесть ящиков различных материалов доставляют на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж будет доставлен какой-либо один материал?
12. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв модно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?
13. Сколькими способами можно разместить 5 одинаковых шаров по трем ящикам?
14. Сколькими способами можно распределить 5 учеников по трем параллельным классам?
15. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура? (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии, цвет фигур и номер доски не учитываются).

Классическое определение вероятности

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.
2. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что он дозвонится.
3. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают 1 деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Классическое определение вероятности

4. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».
5. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.
6. При перевозке ящика, в котором содержалась 21 стандартная деталь и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем, неизвестно какая. Наудачу извлеченная деталь оказалась стандартной (после перевозки). Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь, б) нестандартная деталь.

Классическое определение вероятности

7. Библиотека состоит из 10 различных книг, причем пять из них стоят по 4 рубля каждая, три книги – под 1 рублю и две книги – по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.
8. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1,2,…, 10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что окажется: а) деталь №1, б) детали №1 и №2.
9. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, среди отобранных лиц окажутся три женщины.

Классическое определение вероятности

10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну, б) две, в) три.
11. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающих между собой (и не равные шести).
12. В коробке шесть одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в порядке возрастания.

Геометрические вероятности

- 1) Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством: P = Длина l / Длина L.
- 2) Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g, то вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством P = Площадь g / ПлощадьG.
- 3) Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, которая составляет часть фигуры V: P = Объем v / Объем V.

Геометрические вероятности

4. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Какова вероятность того, что расстояние точки от центра окажется меньше R/2?
5. Шар радиуса R брошен в проволочную сетку, образующую квадраты со стороной 6R. Какова вероятность того, что шар не заденет сетки?
6. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 11 и 12 часами, причем каждый пришедший должен ждать другого 20 минут. Какова вероятность того, что встреча состоится?
7. Электрический провод, соединяющий пункты A и B, порвался в неизвестном месте. Чему равна вероятность того, что разрыв произошел не далее 500 м от пункта A, если расстояние между пунктами 2 км?

Геометрические вероятности

8. В квадрат с вершинами в точках (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y < 2x$?
9. На отрезок OA длины L числовой оси OX наудачу поставлена точка B. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, меньшую, чем 2/3. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
10. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его рас положения относительно круга.

Геометрические вероятности

11. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания очки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.
12. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии 2a. На плоскость наудачу брошена монета радиусом $r < a$. Найти вероятность тог, что монета не пересечет ни одну из прямых.
13. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

Простейшие свойства вероятностей. Теорема сложения.

Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей.

1) Если А и В несовместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

2) Если А и В совместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

3) Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: $P(A)+P(\overline{A})=1$ или $p+q=1$.

4) Условная вероятность $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

5) Если А и В несовместны, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

6) Если А и В совместны, то $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

Простейшие свойства вероятностей. Теорема сложения.

1. События А, В, С и Д образуют полную группу. Вероятности событий: Р(А)=0,1, Р (В) = 0,4, Р (С) = 0,3. Чему равна вероятность события Д?
2. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность для владельца лотерейного билета (безразлично какого выигрыша)?
3. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1, вероятность выбить 9 очков равна 0,3, вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.
4. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная.

5. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца, 3 из-за неисправности привода, 2 из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки по другим причинам.

6. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них – в переплете. Библиотекарь наудачу берет 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете.

7. Военный летчик получил задание уничтожить три рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв и остальных складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

8. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) – 0,7.

9. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая и обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

10. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

11. Брошена монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения (совместного появления) события «появился герб», «появилось 6 очков».

12. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартных), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

13. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

14. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей, 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)?

15. Предприятие изготовляет 95% стандартных изделий, причем из них 86% первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, окажется первого сорта.

16. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что студент знает каждый из двух вопросов, заданных ему экзаменатором?

17. Игральная кость брошена 4 раза. Найти вероятность того, что каждый раз выпадала цифра 1?

18. Имеется две колоды по 36 карт. Из каждой колоды наудачу выбрали по карте. Найти вероятность того, что это были два туза.

19. Какова вероятность того, что 2 карты, вынутые из колоды в 36 карт, окажутся одной масти?

20. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наудачу вынуты 2 шара. Какова вероятность того, что шары будут разного цвета?

21. В семье четверо детей. Считая, что рождение мальчика и девочки равновероятны (в действительности, вероятность рождения мальчика 0,515), найти вероятность того, что среди детей:

а) все мальчики;

б) все одного пола;

в) хотя бы один мальчик.

22.Поданным переписи (1891 г.) Англии и Уэльса было установлено, что темноглазые отцы и темноглазые сыновья составили 5% обследованных, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья составили 8% обследованных, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья составили 9% обследованных, а светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья составили 78% обследованных. Определить вероятность рождения светлоглазого сына у темноглазого отца.

Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} p(A|H_i)\,p(H_i),\ \text{где}\ \sum_{i=1}^{n} p(H_i)=1.$$

1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) стандартная.

2. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

3. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету: не было белых, 1 белый, 2 белых).

4. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых, во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу выбрали один шар. Найти вероятность того, что выбрали белый шар.

5. С первого станка на сборку поступает 40% изготовленных деталей, со второго – 30% и с третьего – 30%. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01, 0,03, 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.

6. При помещении в урну тщательно перемешанных n шаров (m белых и $n-m$ черных) один шар неизвестного цвета затерялся. Из оставшихся в урне $n-1$ шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?
7. В цехе работают 20 станков. Из них 10 марки А, 6 марки В и 4 марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным для этих станков соответственно равна 0,9, 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?
8. Вероятность того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах относятся как 3:2:5. Вероятность обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8, 0,9, 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

9. Из двух колод по 36 карт и одной в 52 карты наудачу выбрана колода, а из колоды наудачу взята карта. Какова вероятность того, что это окажется туз?

10. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

Формула Байеса

Необходимо найти условную вероятность наступления гипотезы H_j при условии, что событие А наступило

$P(H_j|A)=\dfrac{p(A|H_j)\cdot p(H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(A|H_i)\cdot p(H_i)}$, где H_j образуют полную группу

Или $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)}$

1. Детали, изготовленные цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность попадания к первому контролеру равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

2. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

4. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса 4 студента, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятность того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную института, соответственно равны 0,9, 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот студент?

5. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

6. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% - с заболеванием L, 20% - с заболеванием M. Вероятность полного излечения Л равна 0,7, болезней L и M – равны соответственно 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал заболеванием K.

7. Событие A может появиться при условии появления лишь одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т.е. были найдены условные вероятности $P(B_i|A)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Доказать, что $\sum_{i=1}^{n} P(B_i|A) = 1$.

8. Событие А может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, B_3, образующих полную группу событий. После появления события А были переоценены вероятности гипотез, т.е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем оказалось, что $P(B_1|A)=0{,}6$ и $P(B_2|A)=0{,}3$. Чему равна условная вероятность $P(B_3|A)$ гипотезы B_3?

9. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, первое орудие дало попадание, если вероятность попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}5$.

10. Два из трех независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятность отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,2, 0,4 и 0,3.

Теорема об опытах (биномиальное распределение)

Вероятность того, что в n независимых испытаниях успех наступит ровно m раз, выражается формулой Бернулли

$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$, где p - вероятность успеха в каждом испытании, $q = 1 - p$ - вероятность неудачи.

Наивероятнейшее значение должно удовлетворять условию $(n+1) \cdot p - 1 \le m_0 \le (n+1) \cdot p$

Поскольку $p = 1 - q$, то $np - q \le m_0 \le np + p$.

1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент:

а) включены 4 мотора;

б) выключены все моторы;

в) включены все моторы.

2. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,1. Найти вероятность того, что событие А появится хотя бы 2 раза.

3. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет:

а) менее двух раз,

б) не менее двух раз.

4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия $p = 0{,}9$. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если сделано два выстрела, а вероятность поражения цели при k попаданиях $(k \geq 1)$ равна $1 - q^k$.

5. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:

а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех?

б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

Ничьи во внимание не принимаются.

6. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди детей:

а) два мальчика;

б) не более двух мальчиков;

в) более двух мальчиков;

г) не менее двух и не более трех мальчиков.

Вероятность рождения мальчика $p = 0{,}51$.

7. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

8. В части А ЕГЭ по математике 16 заданий, к каждому их них предлагается 4 варианта ответа, из которых один верный. Успехом назовем выбор верного варианта ответа, неудачей – выбор неверного ответа. Какова вероятность, отвечая наудачу, «правильно ответить» хотя бы на одно задание?

9. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий:

а) нет ни одного испорченного;

б) будет два испорченных.

10. Подводная лодка атакует вражеский крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой равна $\frac{3}{4}$. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков, который в результате попадания наполняется водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

Теорема Муавра-Лапласа

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функций

$$P_n(k) = y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Причем $\varphi(x) = \varphi(-x)$ (четная функция).

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна определенному интегралу

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ или } P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') \text{, где}$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{, причем } \Phi(-x) = -\Phi(x) \text{ - нечетная функция.}$$

<u>Замечание</u>. Обозначим через m число появлений события A при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна и равна p. Если число m изменяется от k_1 до k_2, то дробь $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ изменяется от $\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=x'$ до $\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=x''$. Следовательно, интегральную теорему Лапласа можно записать и так

$$P\left(x' \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le x''\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Для $x>5$ $\Phi(x)=0{,}5$.

1. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

2. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.
3. Найти вероятность того, что событие А наступить ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.
4. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.
5. Монета брошена 2N раз (N велико!). Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно N раз.
6. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p=0,8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

7. Вероятность встретить на улице знакомого равна 0,2. Сколько среди первых 100 случайных прохожих можно надеяться встретить знакомых с вероятностью 0, 95?

8. Монета брошена 2N раз (N велико!) Найти вероятность того, что число выпадений «герба» будет заключено между числами $N-\sqrt{2N}/2$ и $N+\sqrt{2N}/2$.

9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

10. Вероятность появления события в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

`Формула Пуассона

В случае, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0{,}1,\ npq \le 9$) вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$ где $\lambda = np$

1.Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретёнах.

2.Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна 100. На пробу берется 2 $дм^3$ воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружен хотя бы один микроб.

3.Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

4.Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов.

5. Среди 100 человек приблизительно 8 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

6. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

7. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. (Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365).

8. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету p=0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95.

9. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98.

10. Доказать, что сумма вероятностей числа появлений события в независимых испытаниях, вычисленных по закону Пуассона, равна единице. Предполагается, что испытания производятся бесчисленное количество раз.

Законы распределения, функции распределения, плотность распределения случайных величин

Геометрическое распределение. Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0<p<1)$ и, следовательно, вероятность его непоявления $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-ом испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось. Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1=1,\ x_2=2,...$

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k–ом испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых испытаний:

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p \qquad (*)$$

Гипергеометрическое распределение. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных. Из партии случайно отбирают n изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращаются в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через X - случайную величину – число m стандартных изделий среди n отобранных. Очевидно, возможные значения таковы: 0, 1, 2,…, $\min(M, n)$.

Найдем вероятность того, что $X = m$, т.е. что среди n отобранных изделий ровно m стандартных (классическое определение вероятностей):

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

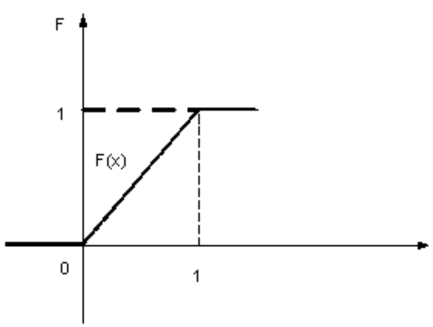
Равномерное распределение

Рассмотрим единичный отрезок [0, 1]. «Навернем» его на ободок диска-рулетки с неподвижной стрелкой – указателем. Диск раскручивают и тормозят, после его остановки снимают показание стрелки. Получаемая величина X называется равномерно распределенной на отрезке [0, 1]: X ~R [0, 1]

Функция распределения для заданного между 0 и 1 числа x:

$F(x)=P\{X<x\}=\dfrac{\text{длина отрезка } [0,\mathrm{x}]}{\text{длина отрезка } [0,1]}=x$ – вероятность получить на рулетке значение меньше x равна x.

Ее график



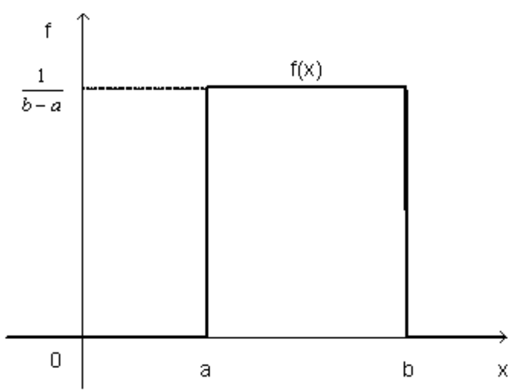
Если на диске вместо 0 и 1 взять интервал (a, b), то равномерно распределенная на интервале (a, b) величина имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\ x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a<x<b \\ 1, x \ge b \end{cases}$$

Дифференцируя F, получим плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, x \le a или\ x>b \\ \dfrac{1}{b-a}, a<x<b \end{cases}$$

График плотности f имеет вид прямоугольника:



Это распределение характеризуется тем, что плотность вероятности на этом интервале постоянна.

Краткая запись: X ~ R [a, b] – случайная величина X распределена равномерно на [a, b].

1. Для случайной величины X ~ R [1, 7]. Найти $f(2)$, $F(2)$, $P\{2 < X < 4\}$ и медиану d.

2. Найти дисперсию и среднеквадратичное отклонение для стандартного равномерного распределения с f(x)=1 при 0<x<1.

3. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

4.После ответа студента все вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос, равна 0,9. Требуется:

а) составить закон распределения случайной дискретной величины X – числа дополнительных вопросов, заданных студенту;

б) найти наивероятнейшее число k_0 заданных студенту дополнительных вопросов.

5.Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, вторым -0,8. Вначале сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X – числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками (ограничиться возможными значениями X, равными 1, 2, 3, 4).

6.Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, \textit{при}\ x \le -1, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}, \textit{при}\ -1 < x \le 3, \\ 1, \textit{при}\ x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0; 2): $P(0 < X < 2)$.

7. Дискретная случайная величина задана законом

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

8. Допустим, рост X мужчины подчиняется закону $N(172, 6^2)$. Найти

а)долю мужчин , чей рост лежит между 190 и 200 см

б) долю мужчин с ростом < 180 см.

9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x\le 0, \\ x^2, \text{при } 0<x\le 1, \\ 1, \text{при } x>1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет, значение, принадлежащее интервалу (0,25; 0,75).

10. Даны две независимые случайные величины X ~ $N(18,4^2)$ и Y ~ $N(8,3^2)$. Для величины Z=X-Y найти ее мат. ожидание, дисперсию, вероятность ее попадания в интервал (10, 20).

11. Даны две независимые нормальные случайные величины X ~ $N(3,2)$ и Y ~ $N(4,1)$. Найти

а) плотность вероятности случайной величины Z=2X+1

б) функцию распределения случайной величины V=2X-Y

12. Случайная величина x задана на всей оси OX функцией распределения $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{x}{2}\right)$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью 1/4 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

1.Найти плотность распределения $p_\eta(y)$ новой случайной величины $\eta = e^\xi$, когда старая случайная величина распределена нормально, т.е. $\xi\, N(x|\mu,\sigma^2)$.

Решение. Прямое преобразование φ здесь есть $y=e^x$, а обратное ему φ^{-1} имеет вид $x=\ln y$. Причем последняя функция имеет положительную производную $x'_y = \dfrac{1}{y}$.

Тогда $p_\eta(y) = x'_y \cdot N\left(x(y)|\mu,\sigma^2\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\dfrac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), y>0 \\ 0,\ y\le 0 \end{cases}$

2. Найти плотность распределения $p_\eta(y)$ новой случайной величины $\eta = \xi_1+\xi_2$, когда слагаемые стохастически независимы и каждое распределено по экспоненциальному закону с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x},\ x\ge 0 \\ 0,\quad x<0 \end{cases}$.

Указание: воспользоваться вспомогательным невырожденным преобразованием $\begin{cases} y = x_1+x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$.

Решение. Совместная плотность распределения системы исходных случайных величин (ξ_1,ξ_2) в задаче образуется как произведение плотностей компонент и имеет вид

$$p_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{-x_1-x_2},\ x_1\ge 0\, u\, x_2\ge 0 \\ 0,\quad else \end{cases}.$$

Рассмотрим обратное преобразование к советуемому:

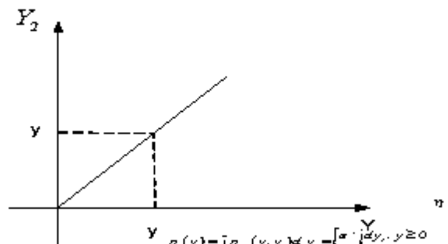
$$\begin{cases} x_1 = y - y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases},$$

причем модуль якобиана этого преобразования равен 1.

Совместная плотность распределения системы новых случайных величин имеет вид:

$$p_{\eta\eta_2}(y, y_2) = p_{\xi_1\xi_2}(y - y_2, y_2) = \begin{cases} e^{-y}, \; y \ge y_2 \; и \; y_2 \ge 0 \\ 0, \quad else \end{cases},$$

причем область на плоскости YOY_2, в которой плотность отлична от нуля, имеет треугольный вид



Требуемая безусловная плотность распределения компоненты   в виде римановского интеграла

.

Окончательно получаем

.

3.С точностью до 5-ти значащих цифр вычислить вероятность, с которой значения нормальной случайной величины $\xi\, N(x|\mu,\sigma^2)$ оказываются в пределах от $\mu-3\sigma$ до $\mu+3\sigma$. В расчетах воспользоваться значением $\Phi(3)\approx 0.9986$.

4.Каким должно быть преобразование $\tau=\varphi(x)$, чтобы по значениям x равномерной в [0, 1] случайной величины ξ можно было смоделировать значения τ новой случайной величины η с плотностью экспоненциального закона распределения $p_\eta(\tau)=\frac{1}{T}e^{-\frac{\tau}{T}}$?

5.Пусть некоторая система дискретных случайных величин (ξ,η) со значениями (x,y) имеет совместный ряд распределения $P_{\xi\eta}(x,y)$, представленный в таблице 1:

$P_{\xi\eta}(x,y)$	$y_1=-1$	$y_2=1$
$x_1=0$	$1/4$	$1/2$
$x_2=1$	$1/4$	0

Построить безусловные и условные ряды распределений компонент ξ и η.

6. Пусть дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения $P_\xi(x)$, представленный в таблице

x	-3	-2	-1	0	1	2
$P_\xi(x)$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Каков ряд распределения $P_\eta(y)$ у новой дискретной случайной величины $\eta = |\xi|$?

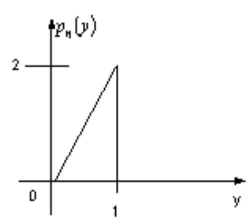
7. Какую функцию распределения $F_\eta(y)$ и плотность распределения $p_\eta(y)$ имеет новая случайная величина $\eta = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\xi_i\}$, если $\forall i = \overline{1,n}$ старые случайные величины ξ_i все одинаково и независимо распределены с функцией распределения $F_\xi(x)$ и плотностью $p_\xi(x)$?

8. Какую функцию распределения $F_\eta(y)$ и плотность распределения $p_\eta(y)$ имеет новая случайная величина $\eta = \min\limits_{1 \le i \le n} \{\xi_i\}$, если $\forall i = \overline{1,n}$ старые случайные величины ξ_i все одинаково и независимо распределены с функцией распределения $F_\xi(x)$ и плотностью $p_\xi(x)$?

9. Для экспоненциальной случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)=\begin{cases}\alpha\, e^{-\alpha x}, x\ge 0\\ 0, \qquad x<0\end{cases}$ найти вероятность выполнения события $\xi\le\dfrac{1}{\alpha}$.

10. Найти плотность распределения $p_\eta(y)$ новой случайной величины $\eta=\xi_1+\xi_2$, когда слагаемые стохастически независимы и каждое распределено по нормальному закону с плотностью $N_\xi\left(x|0,\sigma^2\right)$. Указание: воспользоваться невырожденным преобразованием $\begin{cases}y=x_1+x_2\\ y_2=x_2\end{cases}$.

Учесть, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-Az^2+2Bz-C\right\}dz=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\exp\left\{-\dfrac{AC-B^2}{A}\right\}$.

11. Каким должно быть преобразование $y=\varphi(x)$, чтобы по значениям x равномерной в [0, 1] случайной величины можно было смоделировать значения y новой случайной величины η с плотностью $p_\eta(y)$, имеющей график: 

12. Пусть плотность распределения случайной величины имеет вид, показанный на рисунке задачи 11. Какова вероятность события ?