Типовые динамические звенья САУ

- Объект называется типовым динамическим звеном, если его передаточная функция содержит полиномы небольшой степени (не выше второй) комплексной переменной *p* в числителе или в знаменателе.

Классификация типовых динамических звеньев

- Минимально фазовые звенья –это звенья, передаточные функции которых могут содержать в своей структуре как нули, так и полюсы, причем полюсы могут иметь отрицательные вещественные части, быть нулевыми или чисто мнимыми.

Для минимально фазовых звеньев $-\pi \leq \varphi(\omega) < \frac{\pi}{2}$

- Неминимально фазовые звенья бывают:
- устойчивыми – их передаточные функции содержат положительные нули и отрицательные полюсы;
- неустойчивыми – их передаточные функции содержат положительные полюсы и отрицательные нули.
- Трансцендентные звенья – это звенья, передаточные функции (ПФ) которых содержат трансцендентные выражения. Пример – звено чистого запаздывания, его ПФ $W(p) = ke^{-p\tau}$.
- Иррациональные звенья – это звенья передаточные функции (ПФ) которых содержат иррациональные выражения. Пример: $W(p) = \dfrac{k}{\sqrt{p}}$

МИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

- **Звенья нулевого и первого порядка**
- **<u>Пропорциональное (безынерционное) звено</u>**

Уравнение звена и его передаточная функция

$$y(t) = k \cdot x(t) \qquad W(p) = k.$$

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

АФЧХ $W(j\omega) = k$ ВЧХ $P(\omega) = k$

МЧХ $Q(\omega) = 0$ АЧХ $A(\omega) = k$

ФЧХ $\varphi(\omega) = 0$ ЛАЧХ $G(\omega) = 20\lg k,$

Переходная функция $h(t) = k \cdot 1(t)$

Импульсная переходная функция $w(t) = k \cdot \delta(t)$

Идеальное интегрирующее звено

- Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k\int_0^t x(t)dt \qquad W(p) = \frac{k}{p}.$$

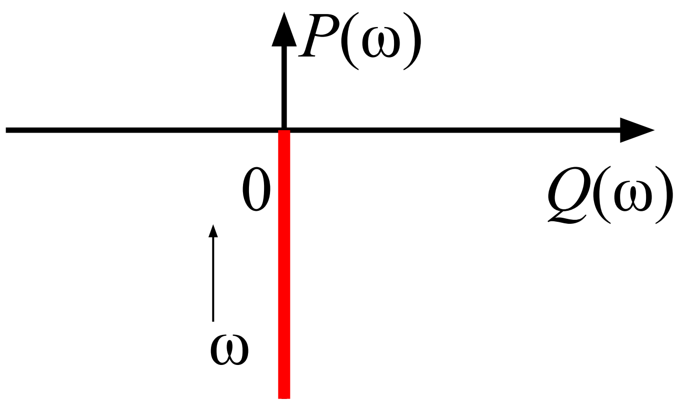
Параметр k является коэффициентом передачи звена по скорости и имеет размерность $с^{-1}$.

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

АФЧХ $\quad W(j\omega) = -j\dfrac{k}{\omega}$

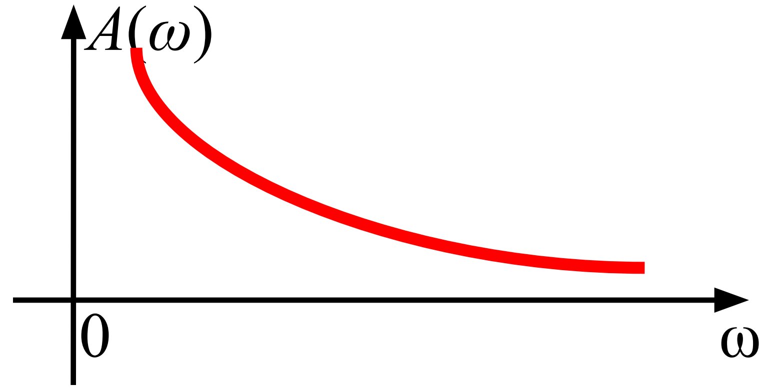
ВЧХ $\quad P(\omega) = 0$

МЧХ $\quad Q(\omega) = -\dfrac{k}{\omega}$



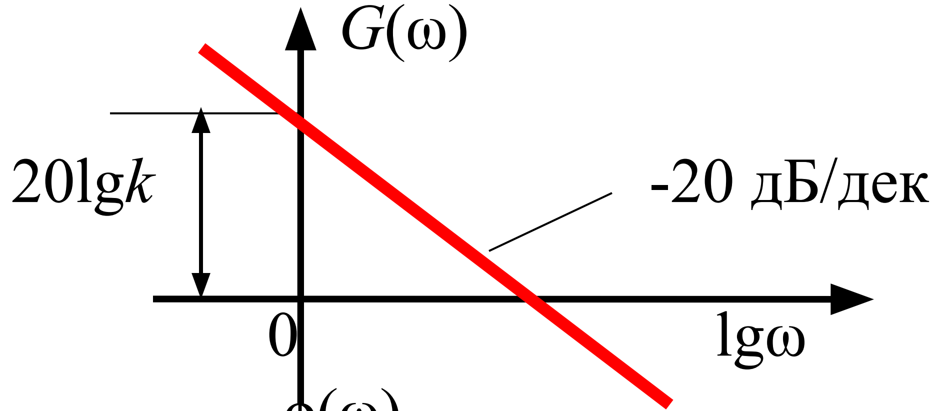
АЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega},$$



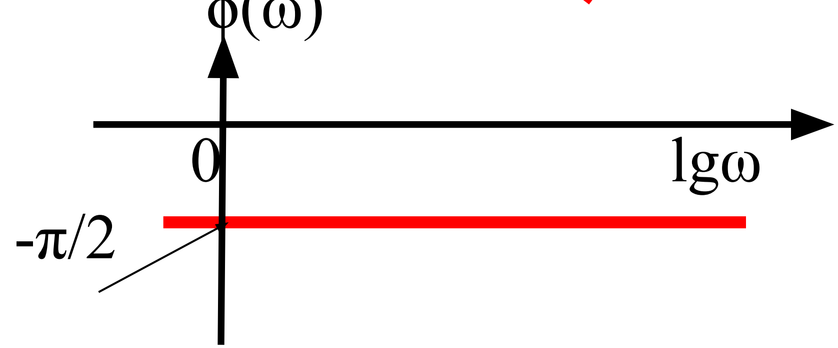
ЛАЧХ

$$G(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega,$$



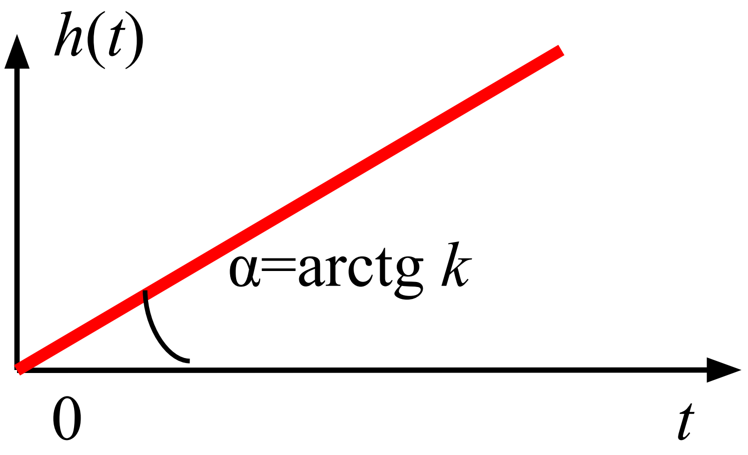
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2},$$



Переходная функция и характеристика

$$h(t) = k \cdot t,$$



Идеальное дифференцирующее звено

- Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}, \qquad W(p) = k \cdot p.$$

Если входная и выходная величины имеют одинаковую размерность, то коэффициент передачи k измеряется в секундах

- Частотные и временные функции (характеристики) звена:

АФЧХ $W(j\omega) = jk\omega,$

ВЧХ $P(\omega) = 0,$

МЧХ $Q(\omega) = \omega k,$

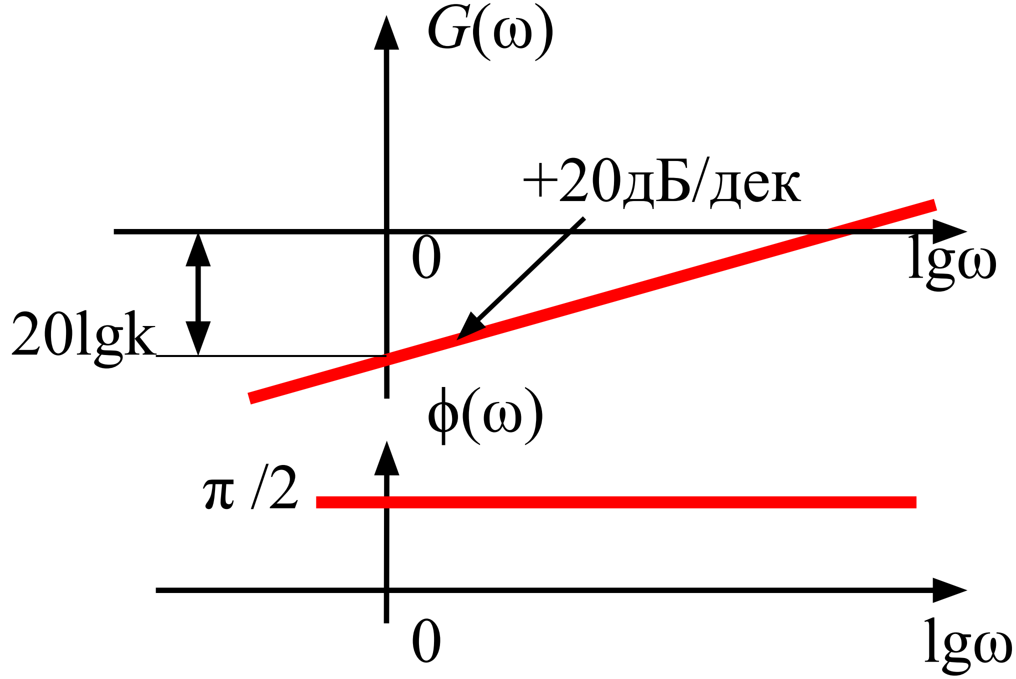
АЧХ $A(\omega) = \omega k,$

ЛАЧХ

$$G(\omega) = 20\lg k + 20\lg \omega,$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2},$$



Инерционное звено (апериодическое звено первого порядка)

Дифференциальное уравнение звена в оригиналах и изображениях:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t) \qquad (Tp+1)Y(p)=kX(p)$$

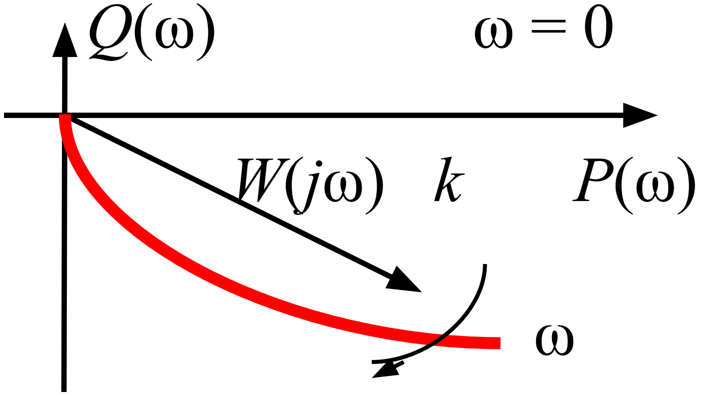
T – постоянная времени

Передаточная функция

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{k}{Tp+1}$$

Частотная передаточная функция и годограф АФЧХ

$$W(j\omega)=\frac{k}{j\omega T+1}=\frac{k(1-j\omega T)}{1+\omega^2T^2}$$



ВЧХ

$$P(\omega)=\operatorname{Re}W(j\omega)=\frac{k}{1+\omega^2T^2};$$

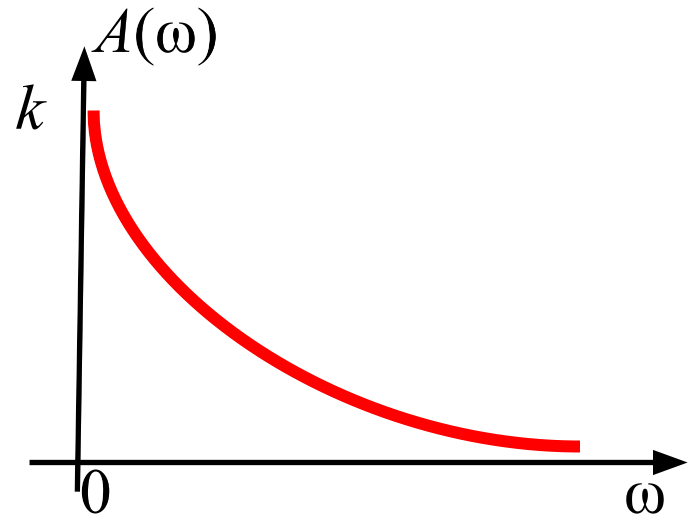
МЧХ

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = -\frac{kT\omega}{1+\omega^2 T^2};$$

АЧХ

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$



Точная ЛАЧХ

$$G(\omega) = 20\lg A(\omega) =$$

$$= 20\lg k - 20\lg\sqrt{1+\omega^2 T^2}$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\operatorname{arctg}\omega T;$$

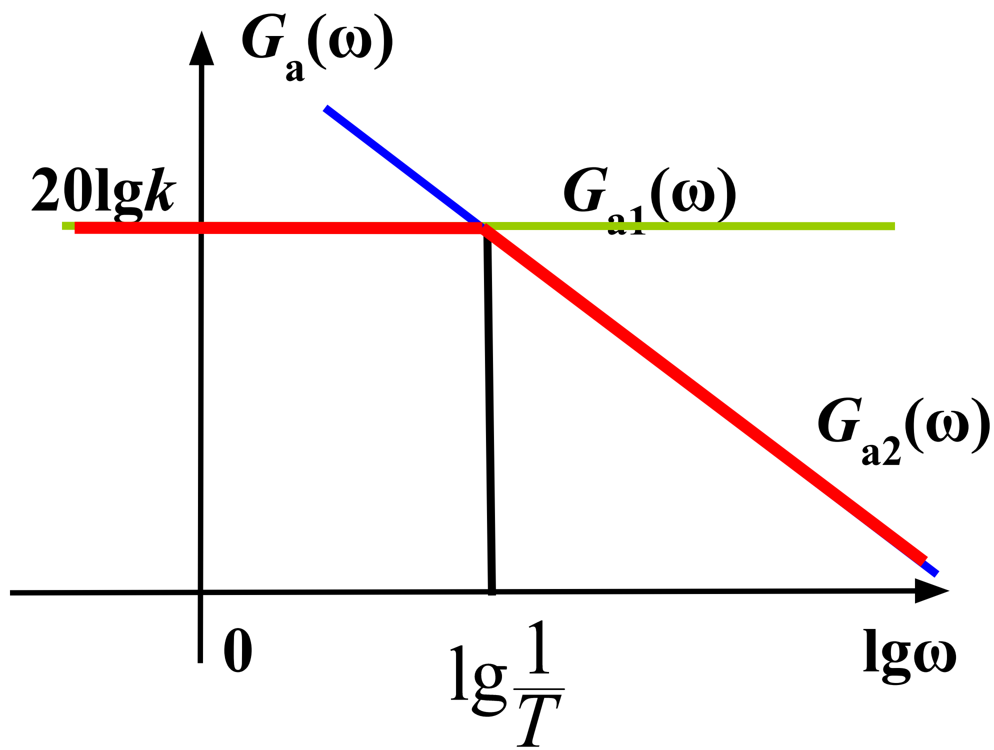
Построение асимптотической ЛАЧХ

- Пусть $\omega \to 0$, тогда $\omega^2 T^2 << 1$ и $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx 1$,

следовательно $G_{a1}(\omega) \approx 20\lg k.$

- Пусть $\omega \to \infty$, тогда $\omega^2 T^2 >> 1$ и $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \approx \omega T$,

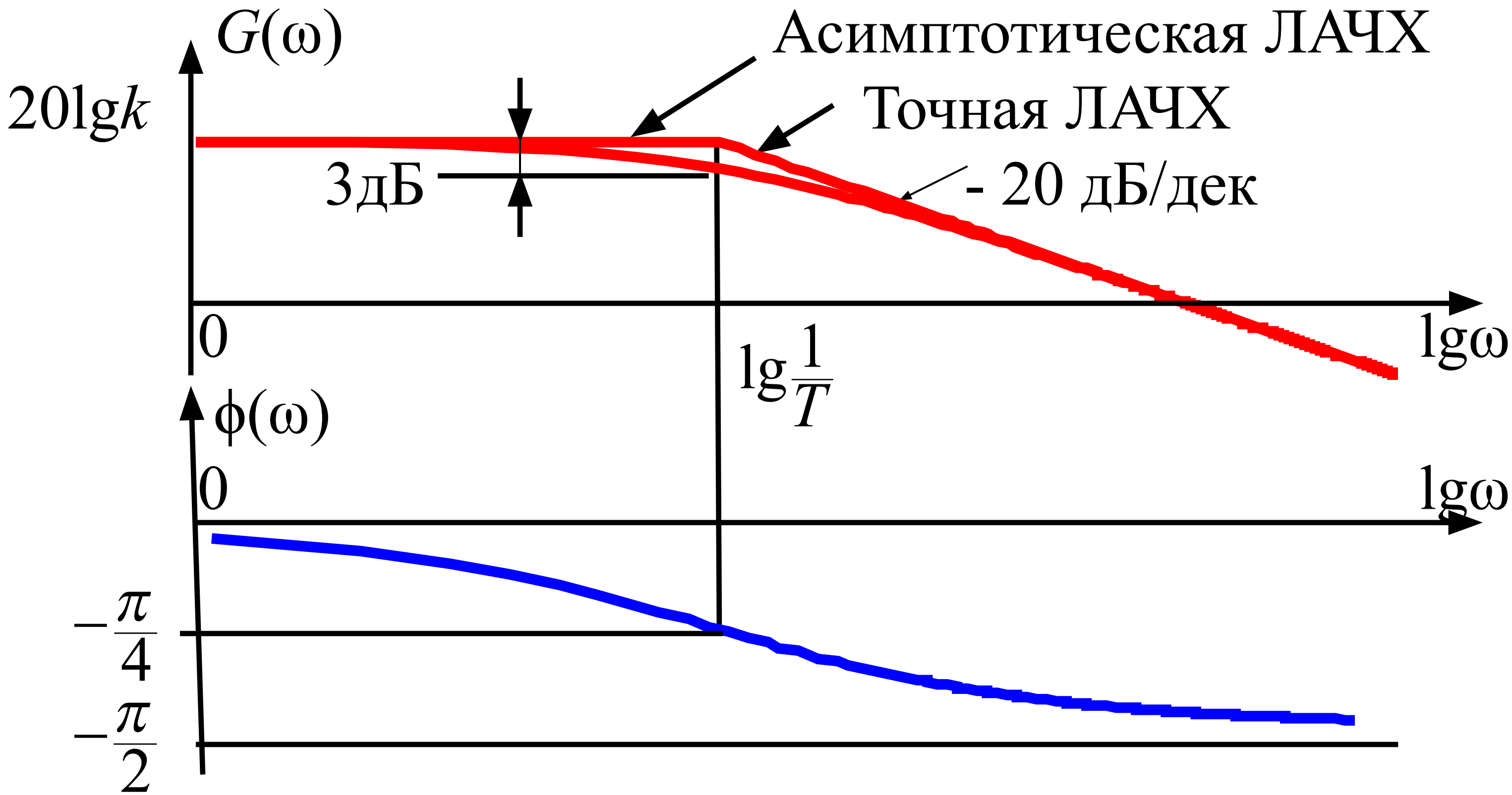
следовательно $G_{a2}(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega T.$



- Частота $\omega_c = \dfrac{1}{T}$ называется частотой сопряжения

На частоте сопряжения $G(\omega) - G_a(\omega) = 20\lg\sqrt{2} = 3$ дБ

- Точная, асимптотическая ЛАЧХ и ЛФЧХ

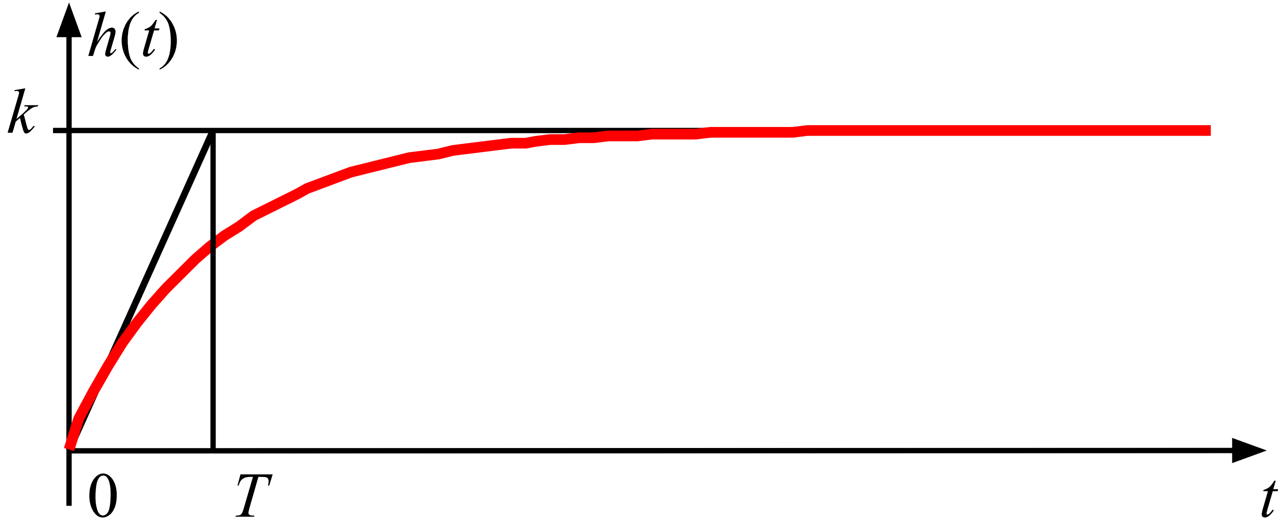


Переходная функция и переходная характеристика звена

- Переходная функция инерционного звена

$$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

- Переходная характеристика инерционного звена



Форсирующее звено

Передаточная функция

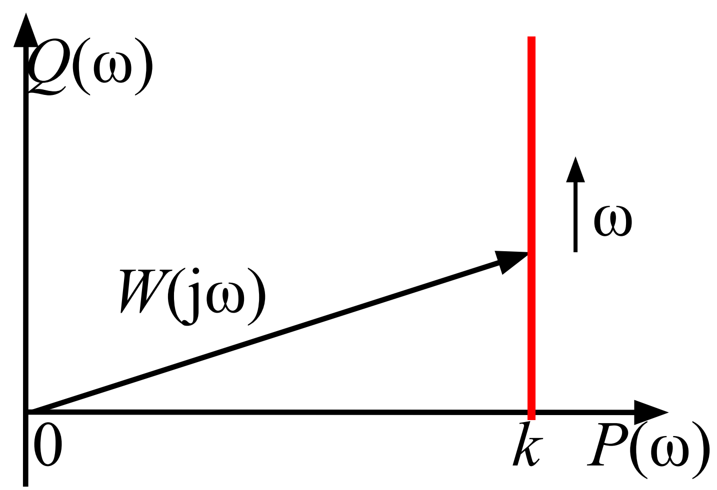
$$W(p) = k(\tau p + 1)$$

где **τ** – постоянная времени (с)

Частотные функции и характеристики

Частотная передаточная функция и годограф АФЧХ

$$W(j\omega) = k(j\tau\omega + 1)$$



ВЧХ

$$P(\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega)] = k$$

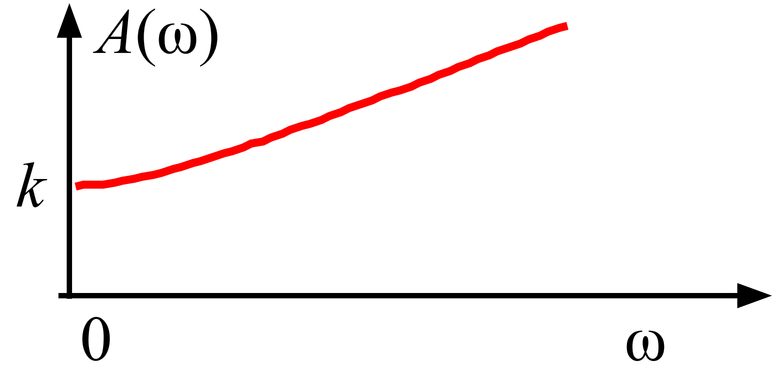
МЧХ

$$Q(\omega) = \mathrm{Im}[W(j\omega)] = k\omega\tau$$

АЧХ

$$A(\omega) = |W(j\omega)| =$$

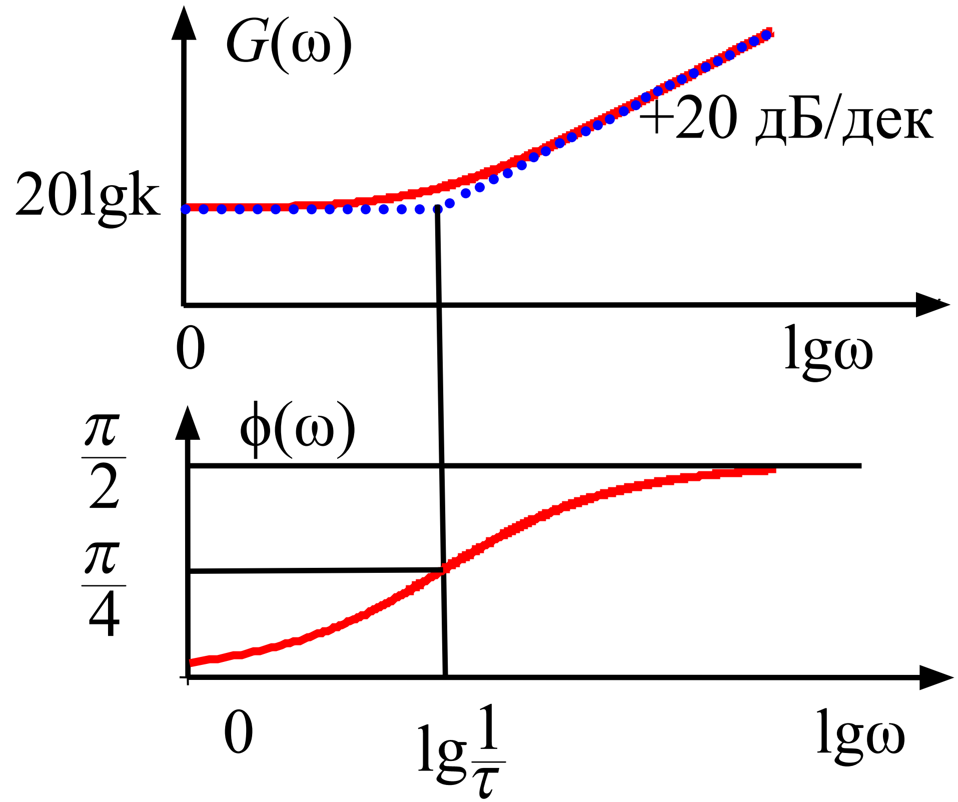
$$= k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}$$



ЛАЧХ

$$G(\omega) = 20\lg A(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}$$



ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} =$$

$$= \operatorname{arctg}\omega\tau$$

Переходная функция форсирующего звена

$$h(t) = k\left[\tau\delta(t) + 1\right]$$

Инерционное форсирующее звено

Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{ин}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{Tp + 1}$$

АЧХ

$$A(\omega) = A_{\text{ин}}(\omega) \cdot A_{\text{форс}}(\omega) = \frac{k\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}}$$

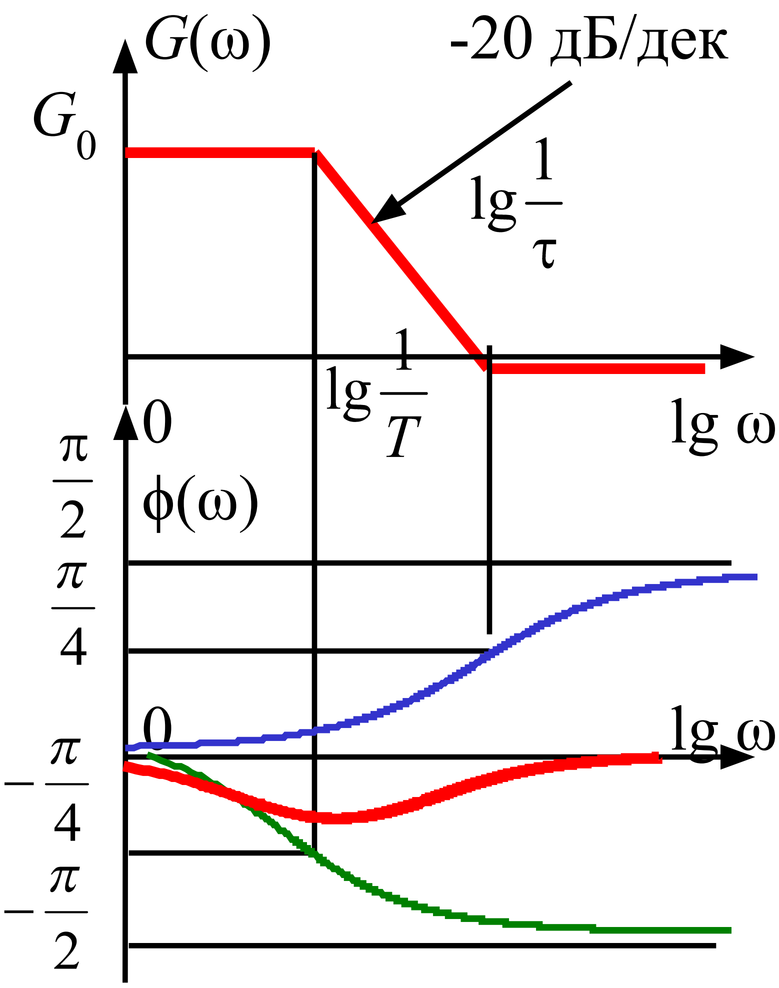
ЛАЧХ

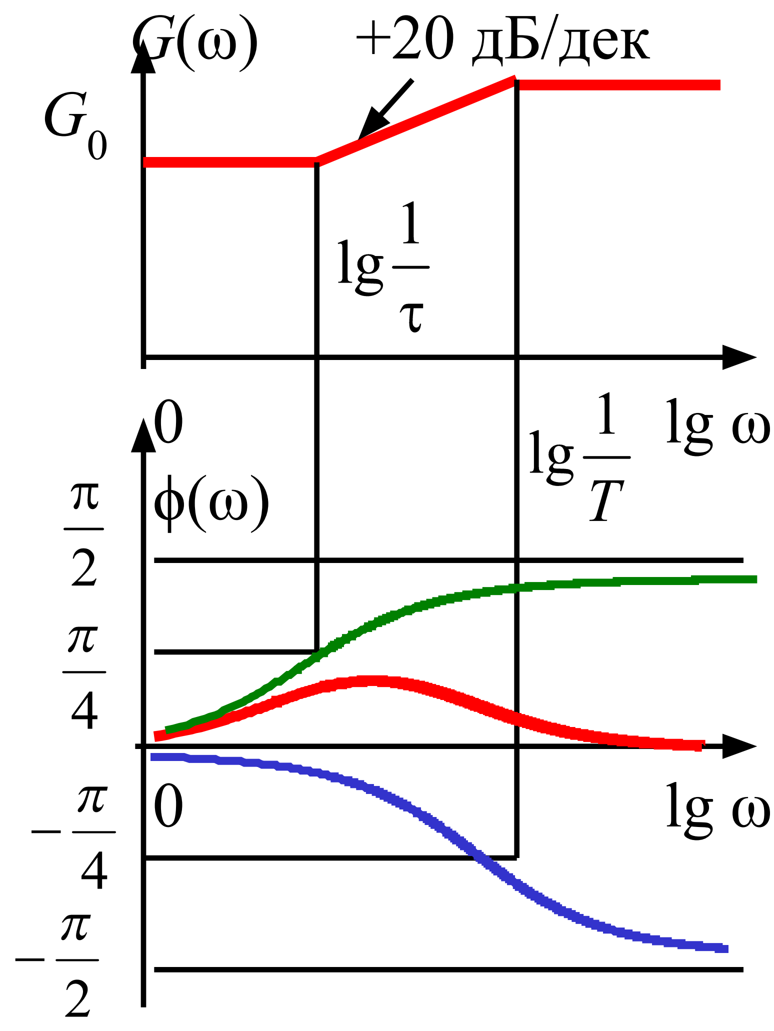
$$G(\omega) = G_{\text{ин}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} - 20\lg\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$$

ФЧХ $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ин}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega \cdot \tau) - \operatorname{arctg}(\omega \cdot T)$

$\tau < T$ $\tau > T$

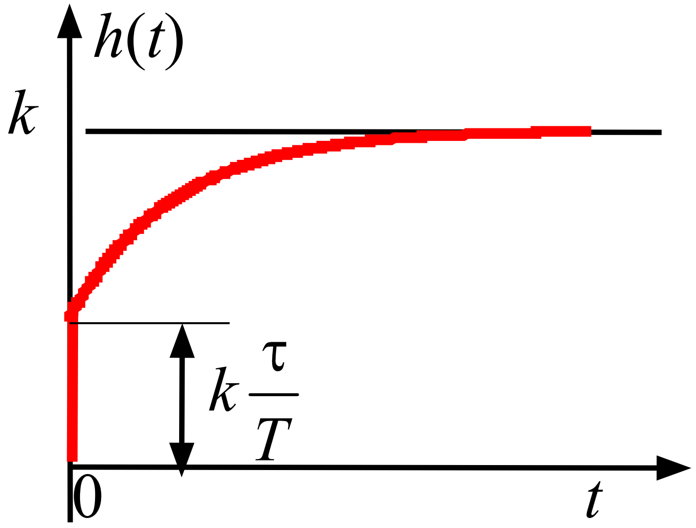




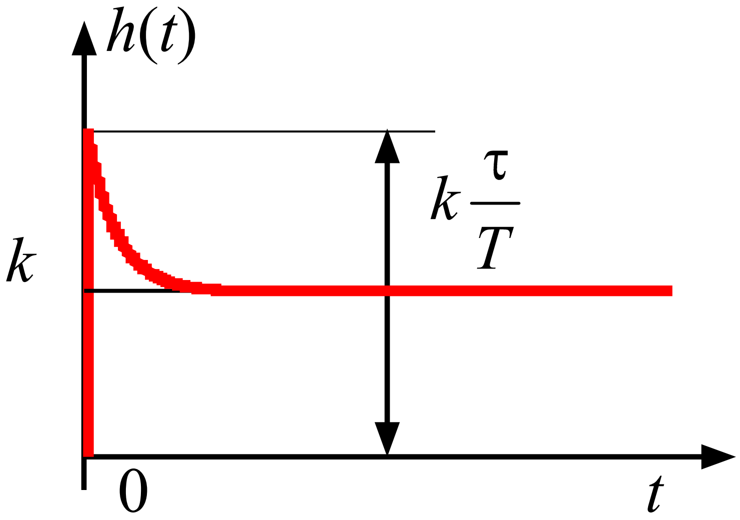
Переходная функция и переходные характеристики инерционного форсирующего звена

$$h(t) = k\left[1 + \left(\frac{\tau}{T} - 1\right)e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

$\tau < T$



$\tau > T$



Изодромное звено

Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{инт}}(p) \cdot W_{\text{форс}}(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p}$$

ЛАЧХ

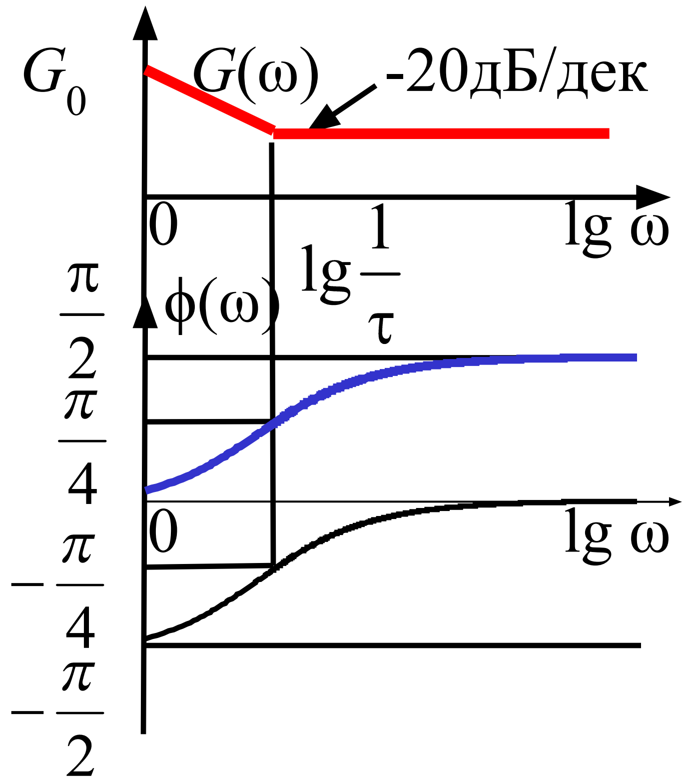
$$G(\omega) = G_{\text{инт}}(\omega) + G_{\text{форс}}(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} - 20\lg\omega$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{инт}}(\omega) + \varphi_{\text{форс}}(\omega) =$$

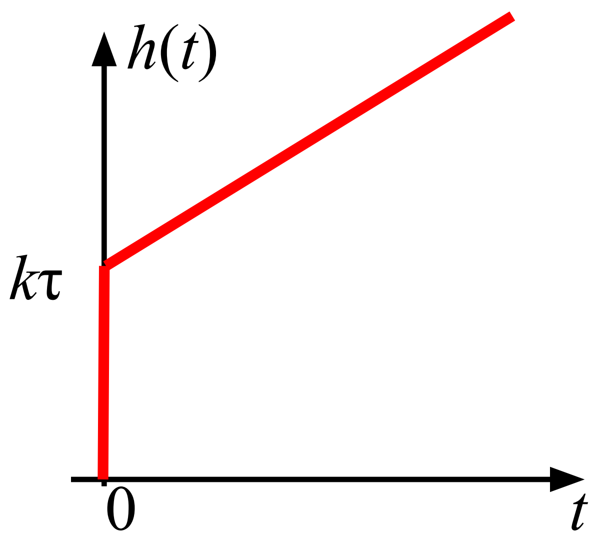
$$= \operatorname{arctg}(\omega \cdot \tau) - \frac{\pi}{2}$$



Переходная функция и переходная характеристика изодромного звена

$$Y(p) = X(p) \cdot W(p) = \frac{k(\tau p + 1)}{p \cdot p} = \frac{B(p)}{p^2}$$

$$h(t) = \frac{d}{dp}\left[B(p)e^{pt}\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{d}{dp}\left[k(\tau p + 1)e^{pt}\right]\Bigg|_{p=0} = k(\tau + t)$$



Реальное дифференцирующее звено

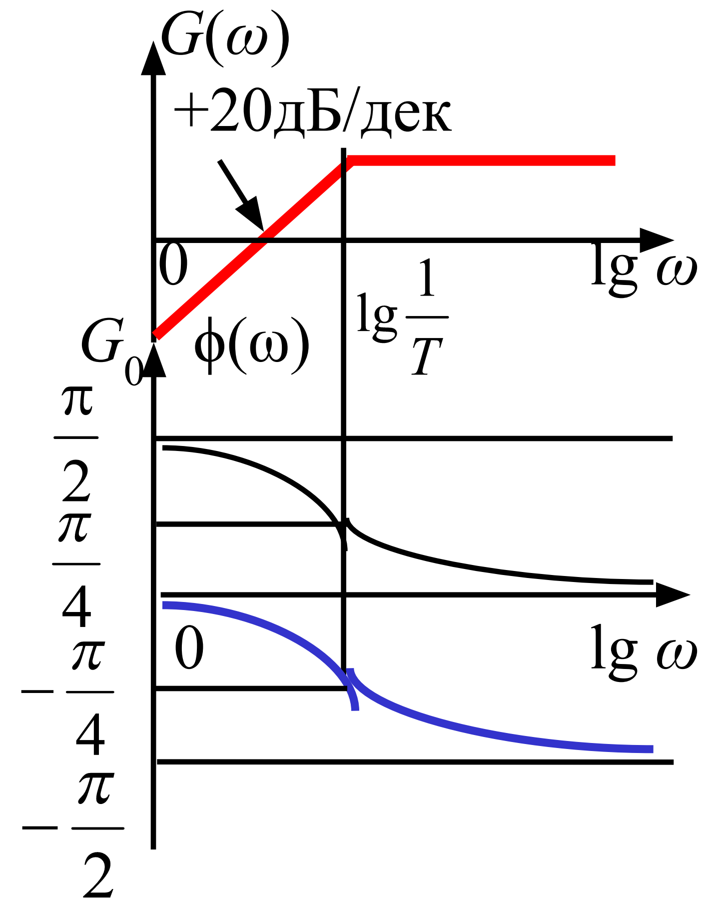
Передаточная функция

$$W(p) = W_{\text{дифф}}(p) \cdot W_{\text{ин}}(p) = \frac{kp}{Tp+1}$$

ЛАЧХ

$$G(\omega) = G_{\text{дифф}}(\omega) + G_{\text{ин}}(\omega) =$$

$$= 20\lg k + 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{\omega^2T^2+1}$$



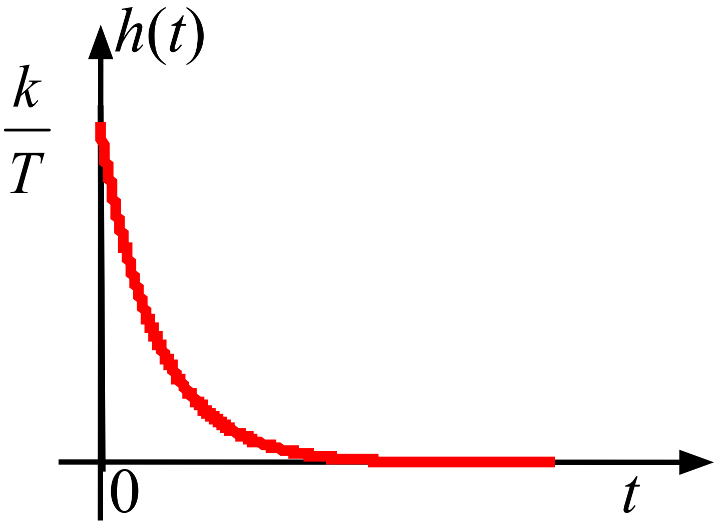
ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \varphi_{\text{дифф}}(\omega) + \varphi_{\text{ин}}(\omega) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega \cdot T)$$

Переходная функция и переходная характеристика реального дифференцирующего звена

$$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



Звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение звена в оригиналах и изображениях:

$$T_1 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

$$(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)Y(p) = kX(p).$$

T_1, T_2 – постоянные времени

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Пусть p_1, p_2 – корни характеристического уравнения

$$T_1^2 p^2 + T_2 p + 1 = 0$$

Апериодическое звено второго порядка

- p_1, p_2 – вещественные отрицательные корни

Передаточная функция

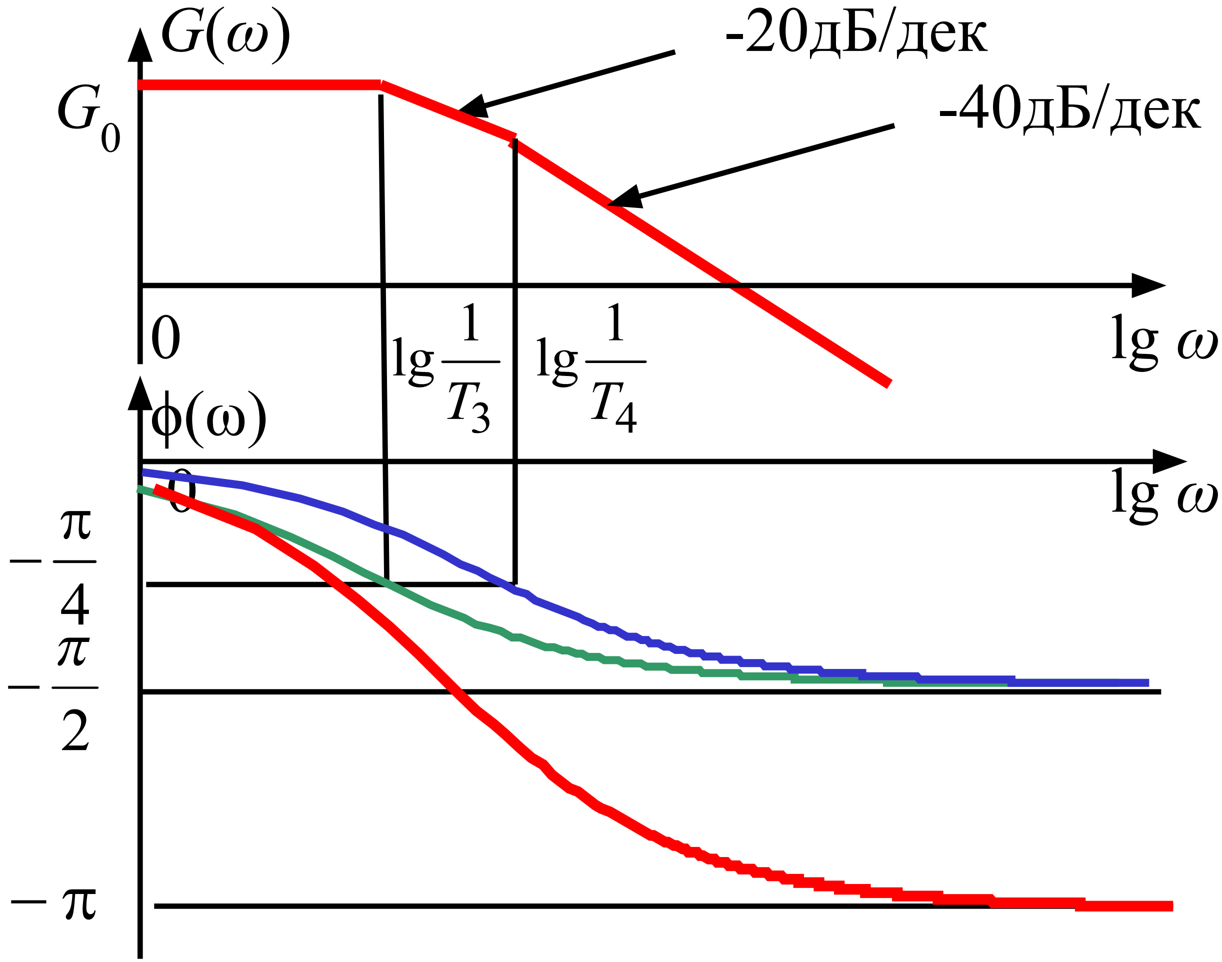
$$W(p) = \frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

где эквивалентные постоянные времени

$$T_{3,4} = \frac{T_2}{2} \pm \sqrt{\frac{T_2^2}{4} - T_1^2}$$

- Апериодическое звено второго порядка есть <u>последовательное соединение двух инерционных звеньев</u> с постоянными времени T_3, T_4, поэтому его ЛАЧХ и ЛФЧХ – *сумма* ЛАЧХ и ЛФЧХ этих звеньев

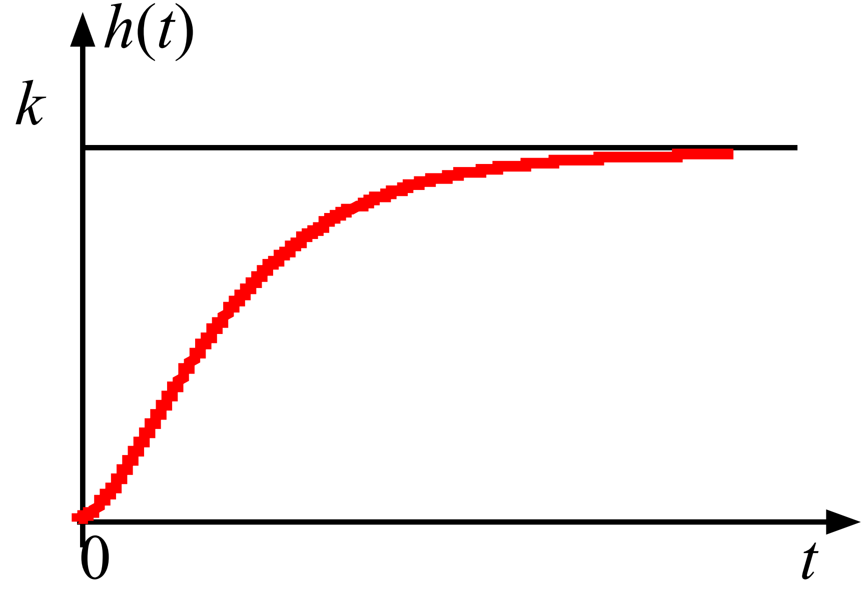
ЛАЧХ и ЛФЧХ



$G(\omega)$
-20дБ/дек
-40дБ/дек
G_0
0
$\lg \frac{1}{T_3}$
$\lg \frac{1}{T_4}$
$\lg \omega$
$\phi(\omega)$
0
$\lg \omega$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

Переходная функция и переходная характеристика апериодического звена второго порядка

$$h(t) = k\left[1 + \frac{T_3}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} - \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_4}}\right].$$



Колебательное звено

- p_1, p_2 – комплексные сопряжённые корни с отрицательными вещественными частями

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

Здесь $T = T_1$

Параметр $\xi = \dfrac{T_2}{2T_1}$ называется коэффициентом демпфирования

Для колебательного звена $0 < \xi < 1$

Для апериодического звена второго порядка $\xi \geq 1$ и корни p_1, p_2 становятся вещественными

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega)=\frac{k}{1-\omega^2T^2+2j\xi\omega T}=\frac{k\left(1-\omega^2T^2-2j\xi\omega T\right)}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\xi^2\omega^2T^2}$$

ВЧХ

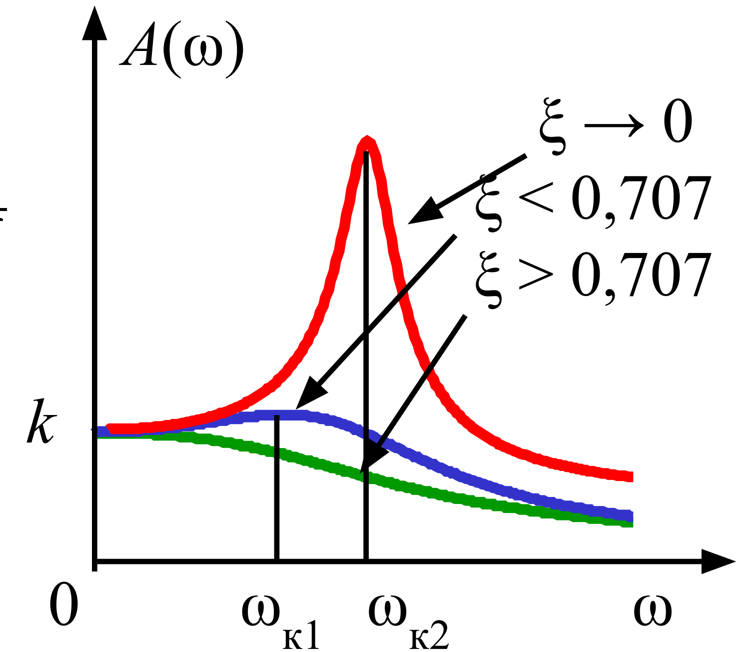
$$P(\omega)=k\frac{1-\omega^2T^2}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\xi^2\omega^2T^2}$$

МЧХ

$$Q(\omega)=-k\frac{2\xi\omega T}{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\xi^2\omega^2T^2},$$

АЧХ

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\frac{k}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\xi^2\omega^2T^2}}$$



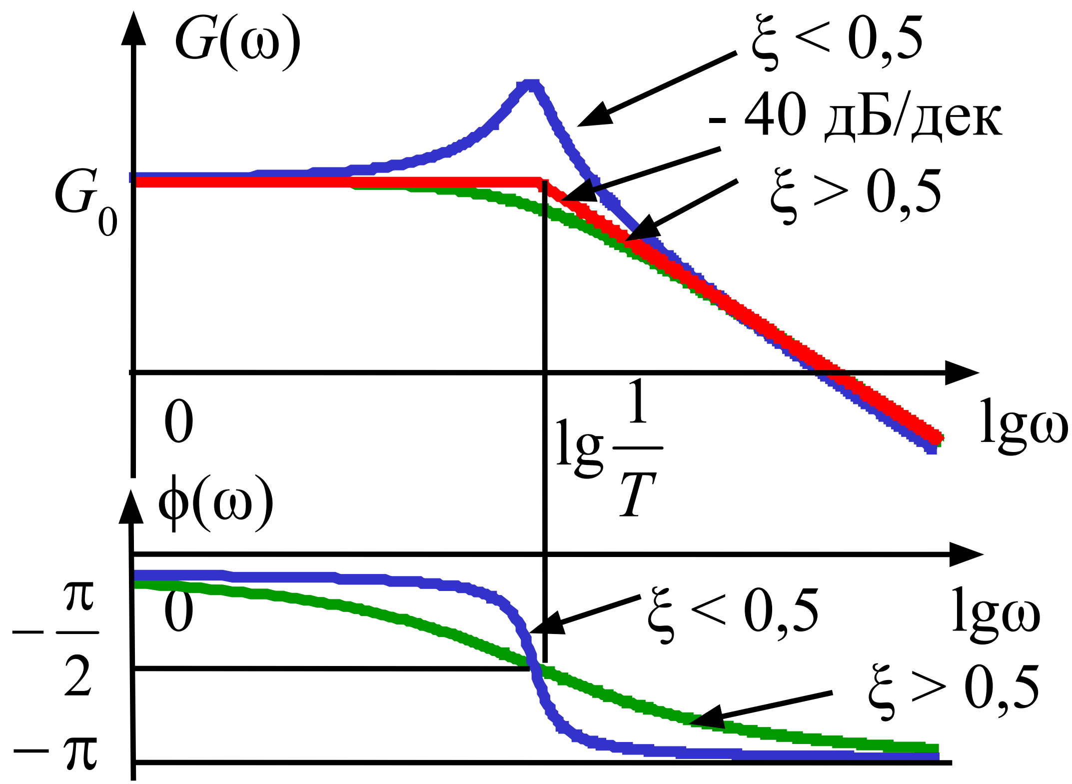
Частота собственных колебаний $\omega_к = \dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$

ЛАЧХ $G(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2 + 4\xi^2\omega^2T^2}$

ФЧХ

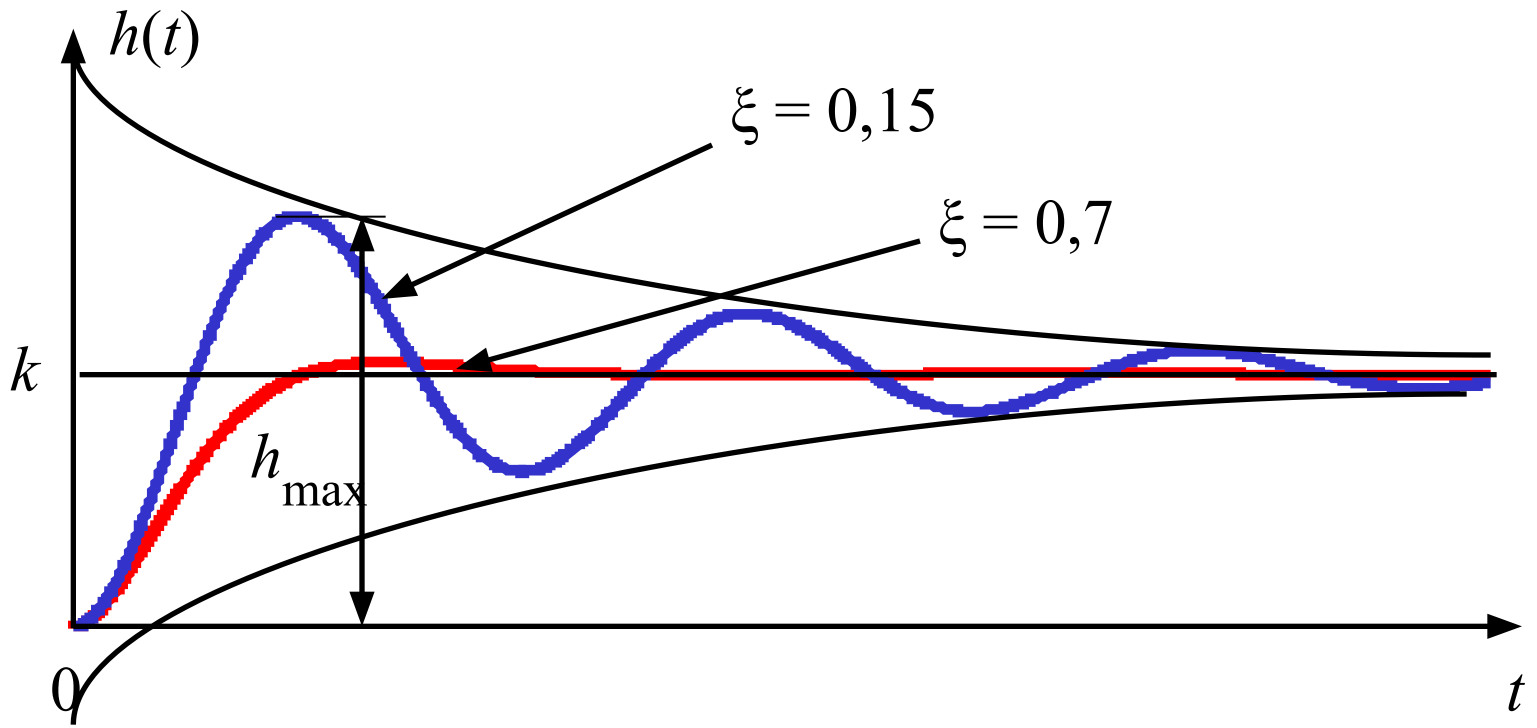
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T}{1-\omega^2T^2}$$



Переходная функция и переходная характеристика колебательного звена

$$h(t) = k\left[1 - e^{-\frac{\xi \cdot t}{T}}\left(\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right]$$



Консервативное звено

- p_1, p_2 – мнимые сопряжённые корни, что соответствует $\xi = 0$

Передаточная функция $$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}$$

Частотная передаточная функция $$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$$

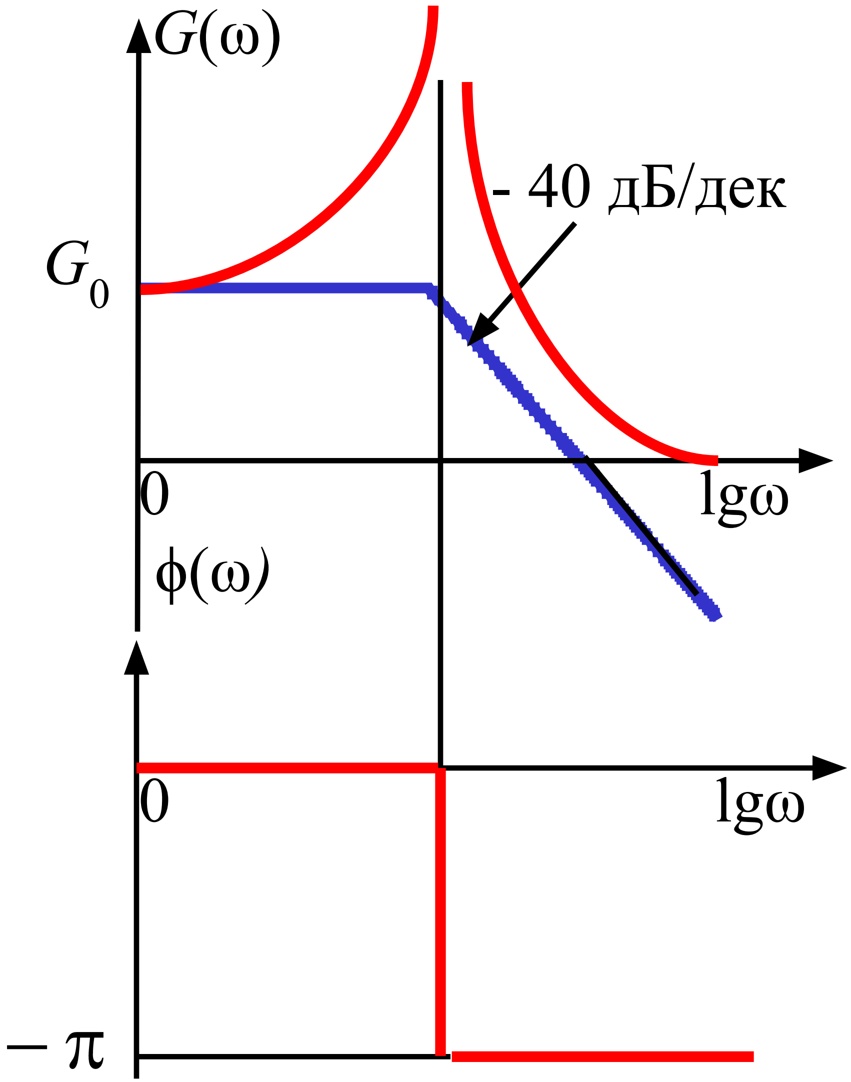
АЧХ $$W(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 T^2}$$ ЛАЧХ $$G(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{1 - \omega^2 T^2}$$

ФЧХ

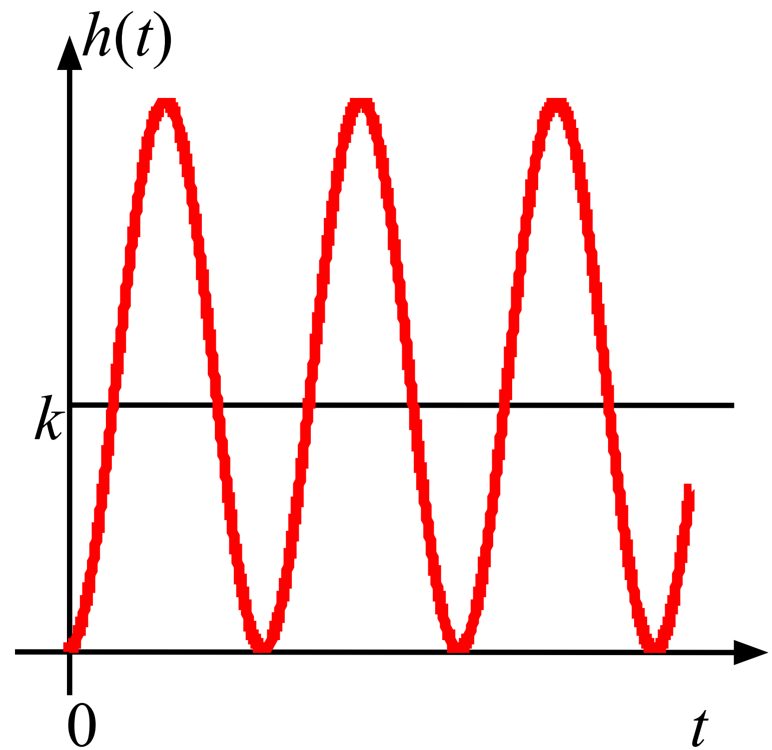
$$\varphi(\omega) = -\lim_{\xi \to 0}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}\right) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \omega < \dfrac{1}{T}, \\ -\pi \quad \text{при} \quad \omega \geq \dfrac{1}{T}. \end{cases}$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ

Переходная функция и переходная характеристика



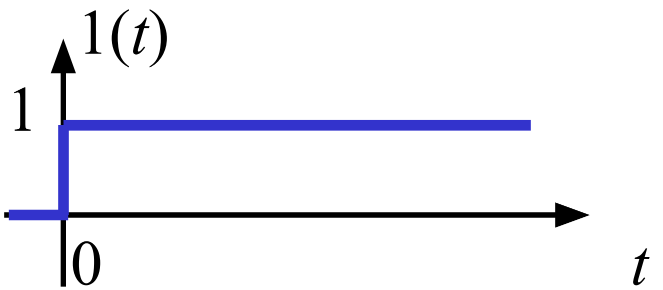
$$h(t) = k\left(1 - \cos\frac{t}{T}\right)$$

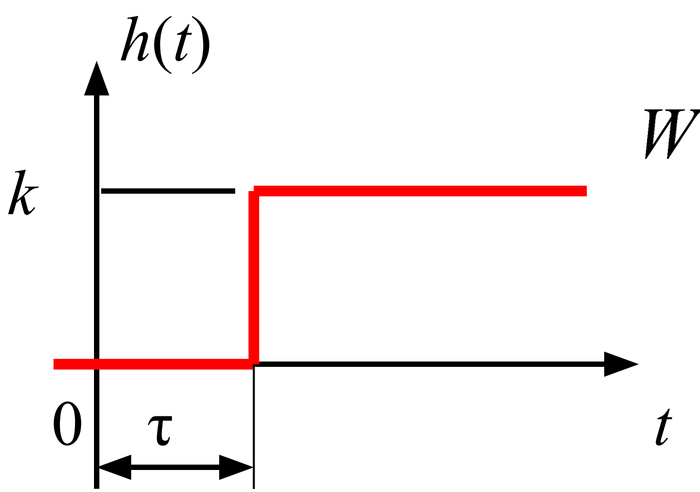


Звено чистого запаздывания

Понятие запаздывания и переходная характеристика звена

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau)$$





Передаточная функция

$$W(p) = ke^{-p\tau}.$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = ke^{-j\omega\tau} = k\left[\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)\right]$$

ВЧХ МЧХ

$$P(\omega) = k\cos(\omega\tau) \qquad Q(\omega) = -k\sin(\omega\tau)$$

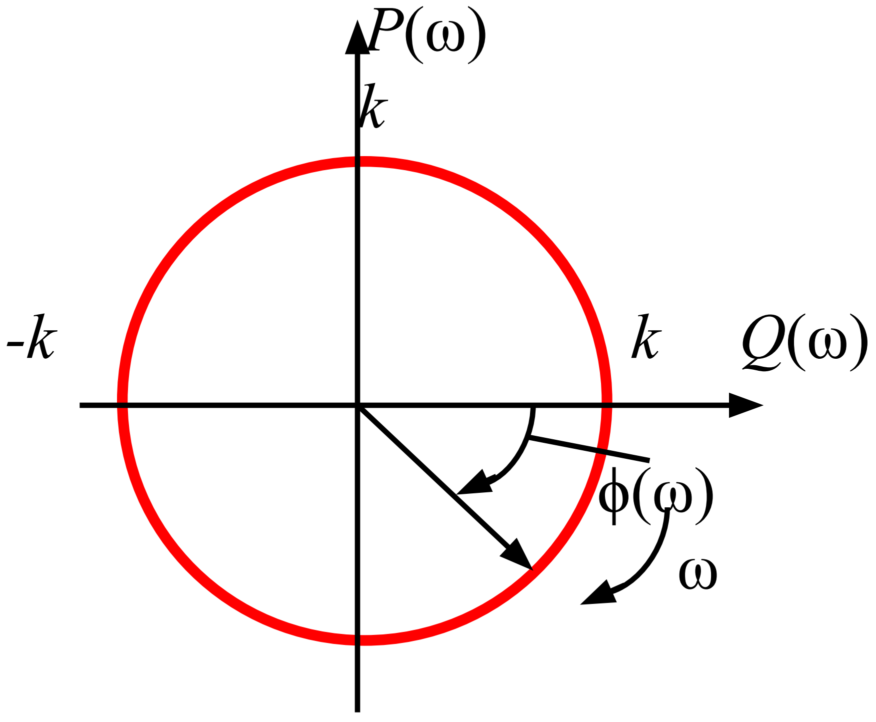
АЧХ

$$A(\omega) = k\sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = k,$$

ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{-\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = -\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}(\omega\tau)\right] = -\omega\tau.$$

Годограф АФЧХ



ЛФЧХ