Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

Поле прямого тока

Модуль dB определяется формулой

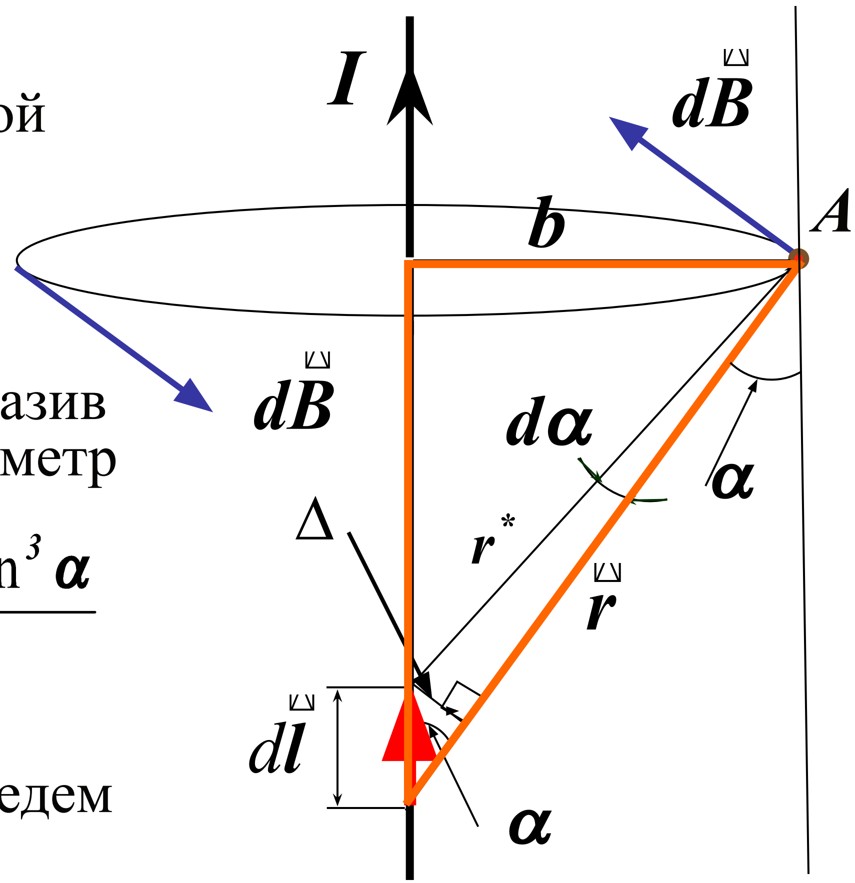
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\sin\alpha}{r^2}$$

Преобразуем формулу, выразив переменные $\vec{r}$ и $d\vec{l}$ через один параметр – угол α.

$$r = \frac{b}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\sin^3\alpha}{b^2}$$

Выразим $d\vec{l}$ через угол α.

Для этого дополним рисунок и введем новые обозначения.



Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

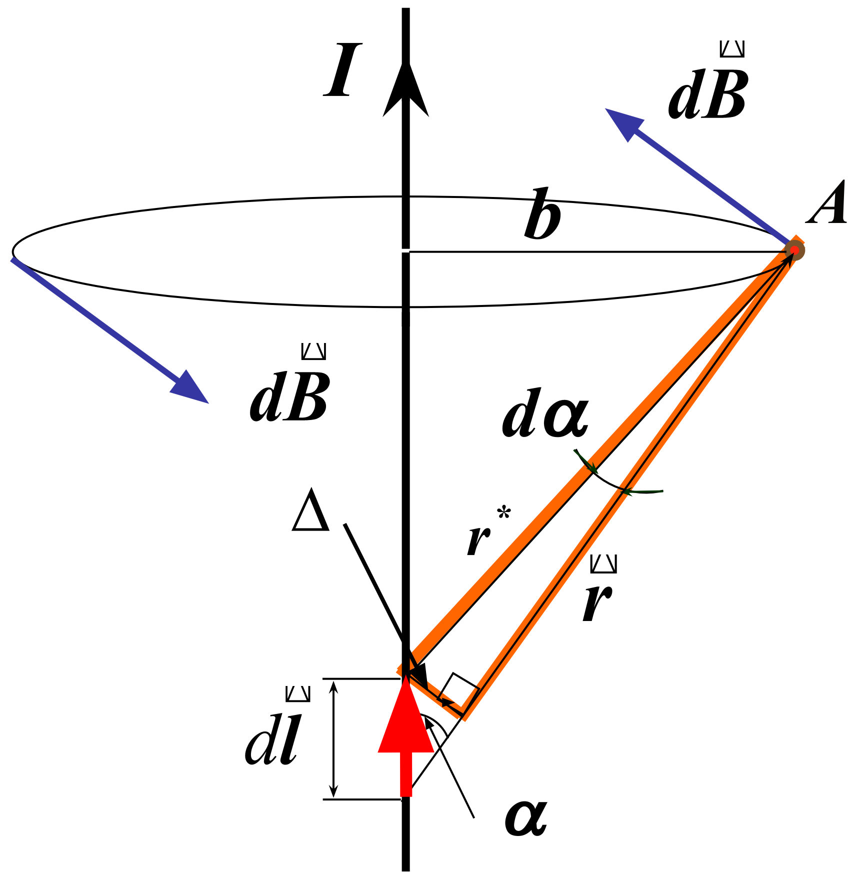
<u>Поле прямого тока</u>

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin^3\alpha}{b^2}$$

$$dl = \frac{\Delta}{\sin\alpha} \rightarrow ?$$

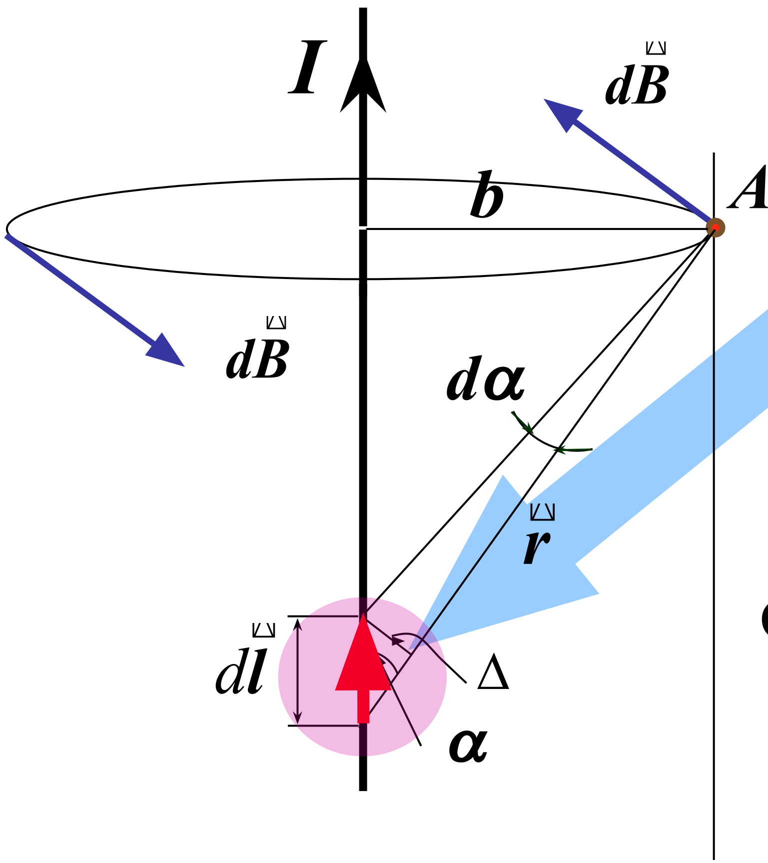
$$\frac{\Delta}{r^*} = \sin d\alpha \approx d\alpha$$

$$\Delta = r^* d\alpha \approx r\,d\alpha$$



Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

<u>Поле прямого тока</u>



$$\boxed{dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin^3\alpha}{b^2}}$$

$$\Delta = r\,d\alpha$$

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}$$

$$dl = \frac{\Delta}{\sin\alpha}:$$

В итоге получим:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,b\,d\alpha\,\sin^3\alpha}{b^2\sin^2\alpha}$$

Окончательное выражение:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\sin\alpha\,d\alpha$$

Закон Био – Савара – Лапласа.

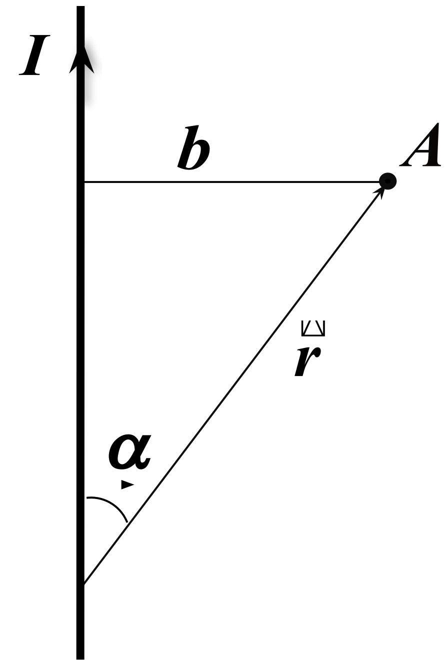
Примеры расчета магнитных полей

<u>Поле прямого тока</u>

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\sin\alpha\, d\alpha$$

Для всех элементов тока угол α изменяется в пределах от 0 до π. Проинтегрируем в этих пределах полученное выражение:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{b}\int_0^{\pi}\sin\alpha\, d\alpha \quad = 1 \quad \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{b}$$



Таким образом, магнитная индукция поля прямого тока определяется выражением:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{b}}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

<u>Магнитное поле равномерно движущегося заряда</u>

ИЗУЧИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО!

ЛЕКЦИЯ 6

19 марта 2013г.

Электромагнетизм

План лекции

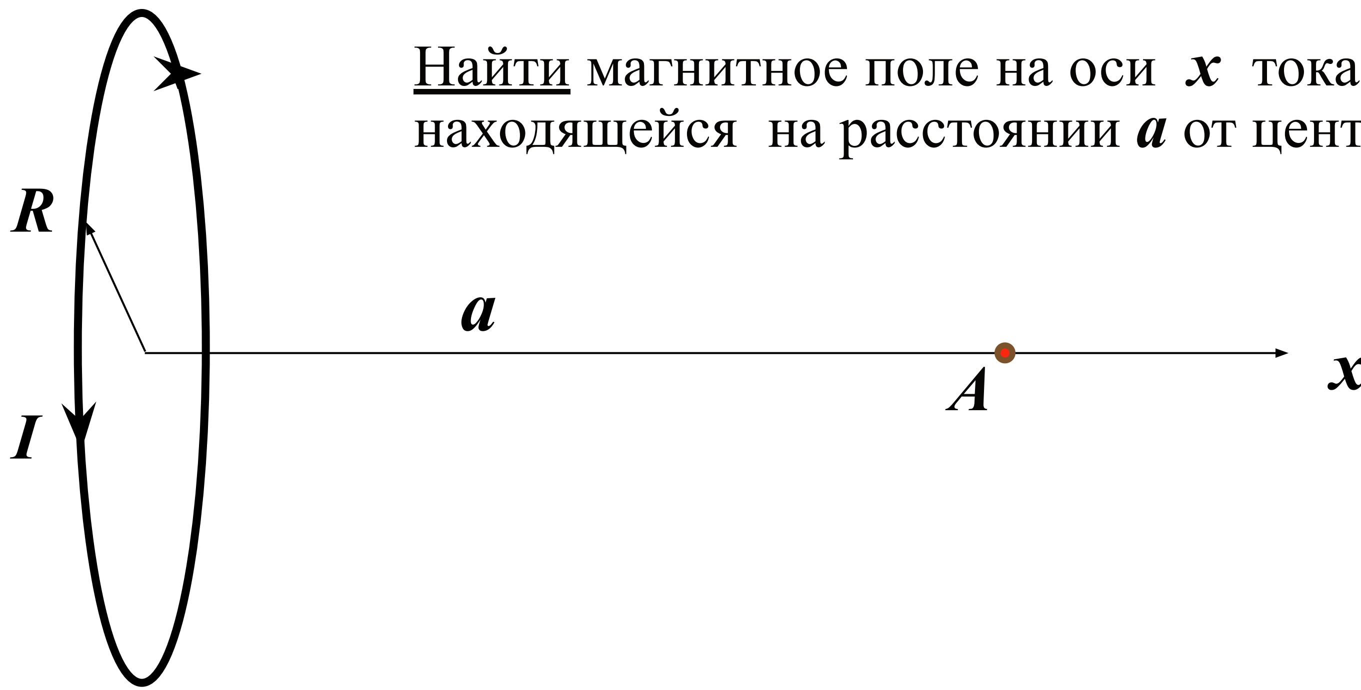
1. Примеры расчета магнитных полей:
   - магнитное поле на оси кругового тока.
2. Теорема Гаусса - Остроградского для вектора $\vec{B}$.
3. Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$.

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

<u>Магнитное поле на оси кругового тока</u>

Пусть электрический ток силой ***I*** течет по проводнику радиусом ***R***.

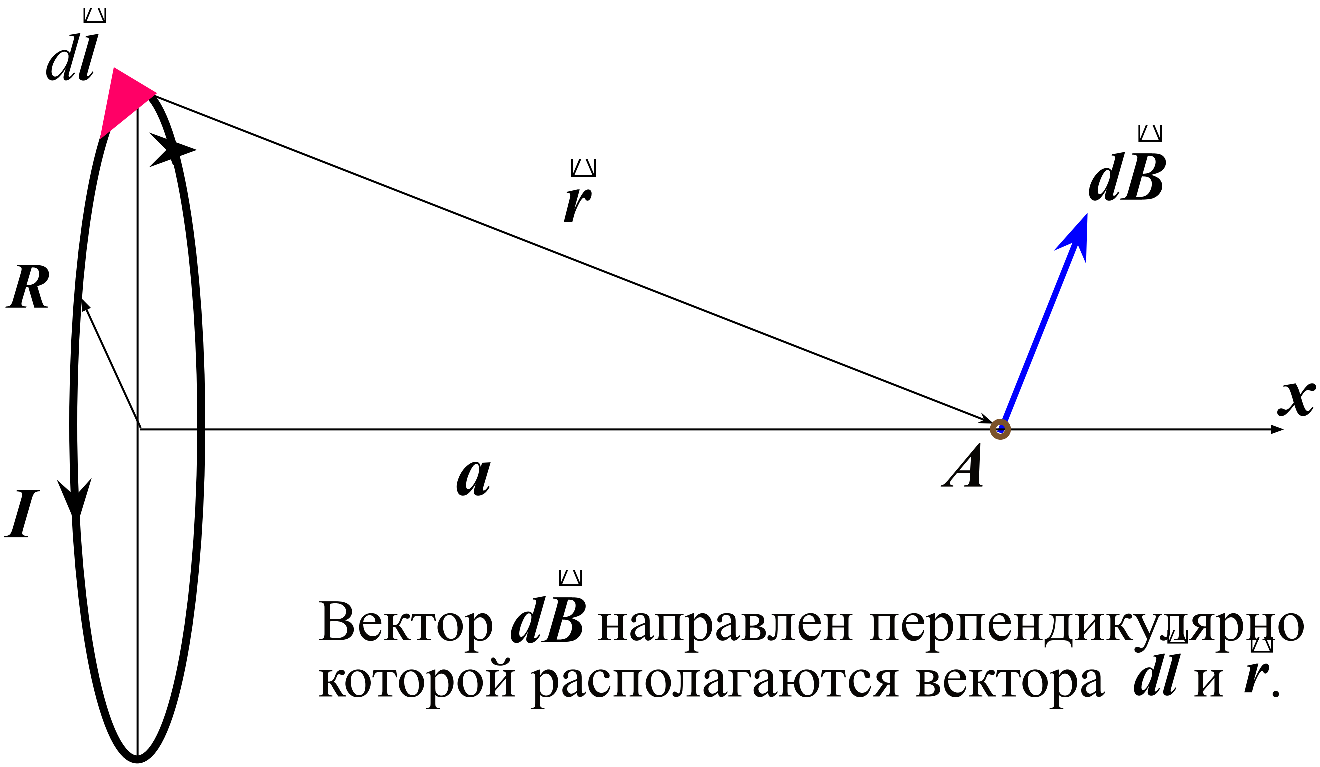
<u>Найти</u> магнитное поле на оси ***x*** тока в точке ***A***, находящейся на расстоянии ***a*** от центра.



Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

<u>Магнитное поле на оси кругового тока</u>

Разобьем круговой ток на элементы тока длиной $\vec{dl}$ и проведем от произвольного элемента тока радиус-вектор $\vec{r}$ в точку A.



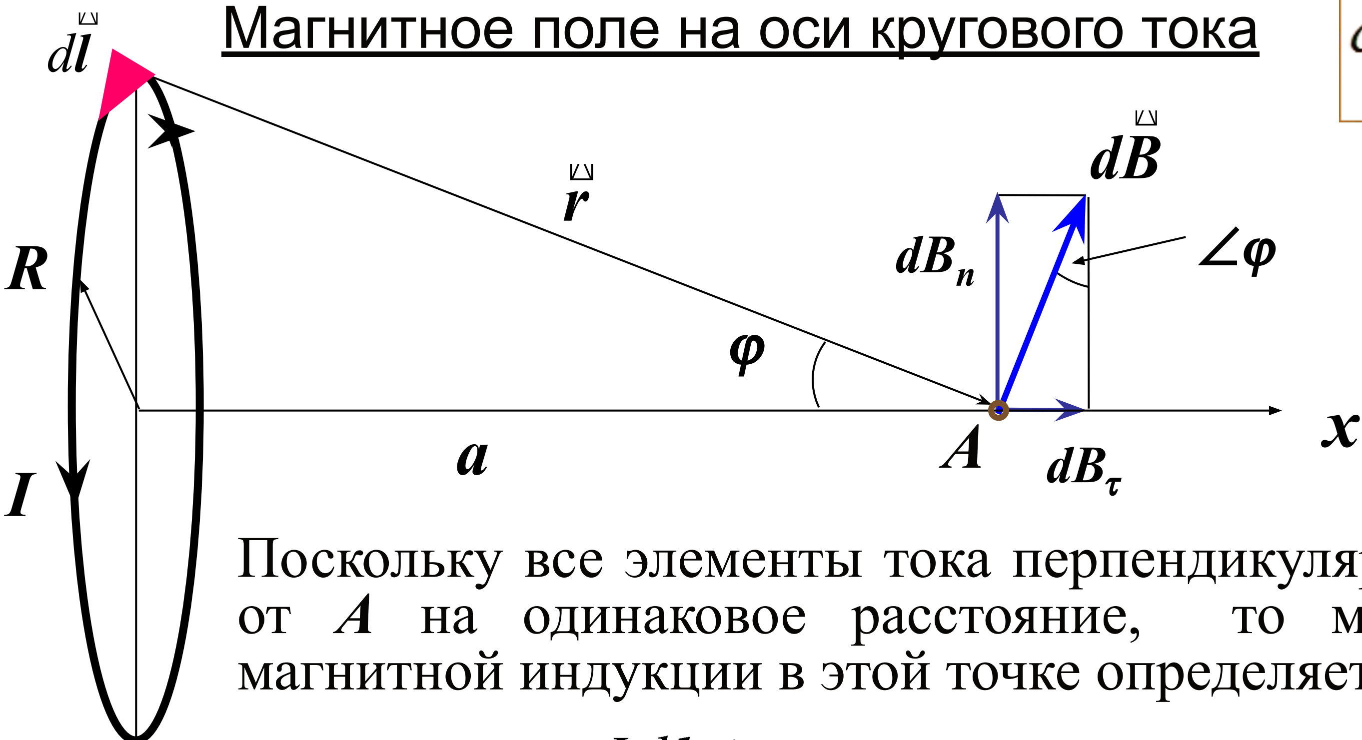
Вектор $\vec{dB}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой располагаются вектора $\vec{dl}$ и $\vec{r}$.

Закон Био – Савара – Лапласа.

Примеры расчета магнитных полей

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

Магнитное поле на оси кругового тока

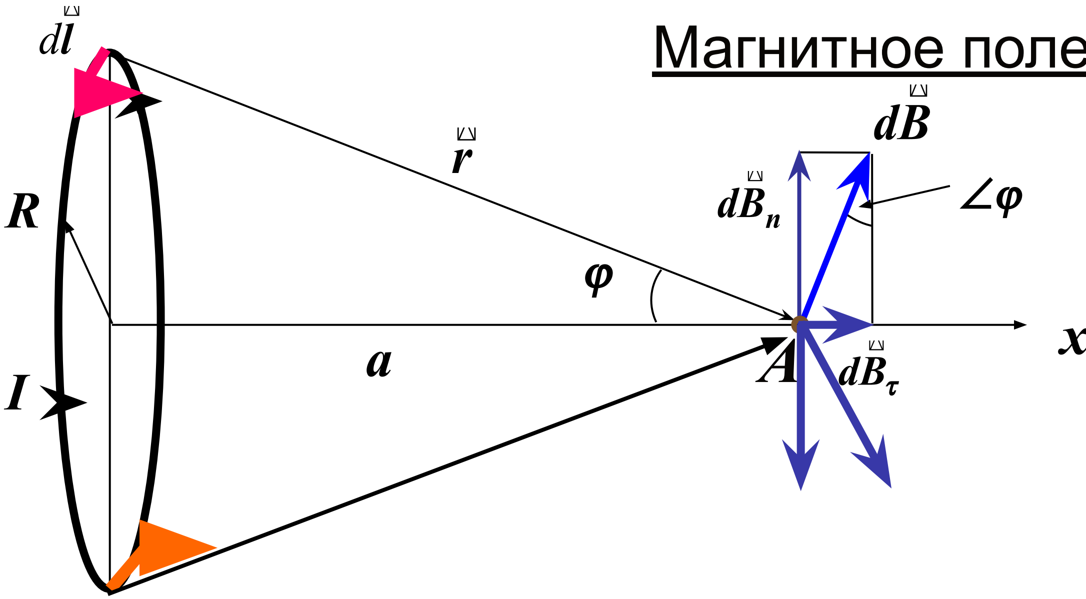


Поскольку все элементы тока перпендикулярны и удалены от A на одинаковое расстояние, то модуль вектора магнитной индукции в этой точке определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin\alpha}{r^2} \qquad \left(\alpha = 90^0,\ \sin 90^0 = 1\right)$$

Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: $d\vec{B}_\tau$ и $d\vec{B}_n$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей



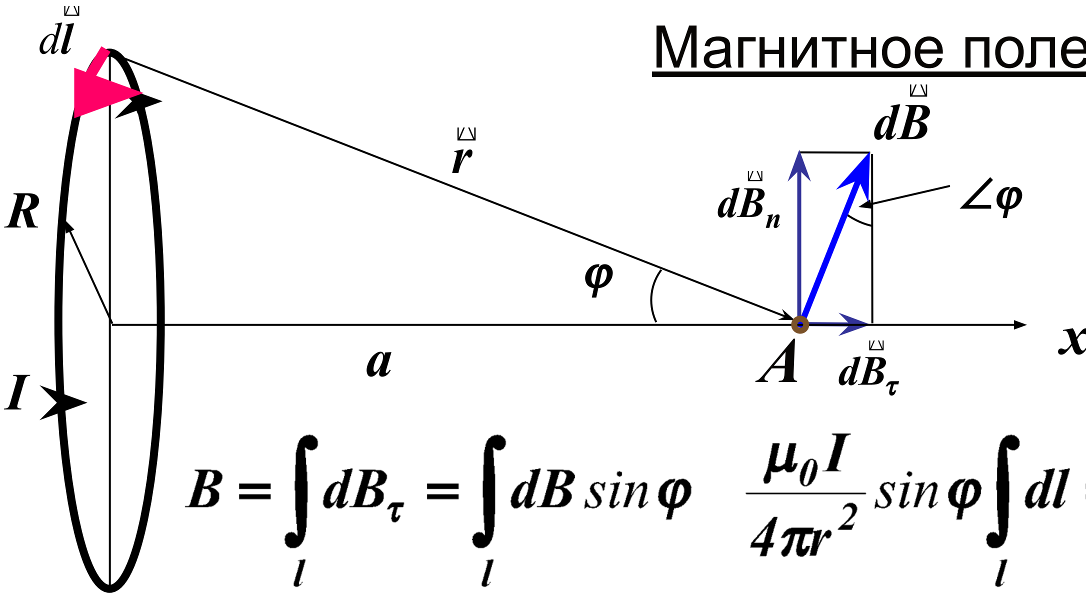
<u>Магнитное поле на оси кругового тока</u>

Любые два противоположных элемента тока создают поле, составляющие $\vec{dB}_n$ которых равны по величине и противоположно направлены.

Эти составляющие уничтожают друг друга.

<u>Итог</u>: вектор магнитной индукции равен сумме модулей вектора $\vec{dB}_\tau$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей



<u>Магнитное поле на оси кругового тока</u>

$$\boxed{dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}}$$

$$B = \int_l dB_\tau = \int_l dB\sin\varphi \quad \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\varphi\int_l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\varphi\, 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2\pi r^2}\sin\varphi$$

Преобразуем полученное выражение, учитывая, что $\sin\varphi = \dfrac{R}{r}$,

$r^2 = R^2 + a^2$. После подстановки получим

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2}\sin\varphi = \frac{\mu_0 IR}{2\left(R^2 + a^2\right)}\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

Магнитное поле на оси кругового тока

В центре кругового тока $a = 0$, индукция магнитного поля равна

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Вдали от контура на оси x ($a >> R$):

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2a^3}$$

Если умножить числитель и знаменатель этого выражения на π, получим:

$$B = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi a^3}$$

где $S = \pi R^2$ - площадь, охватываемая круговым током.

Закон Био – Савара – Лапласа.
Примеры расчета магнитных полей

Магнитное поле на оси кругового тока

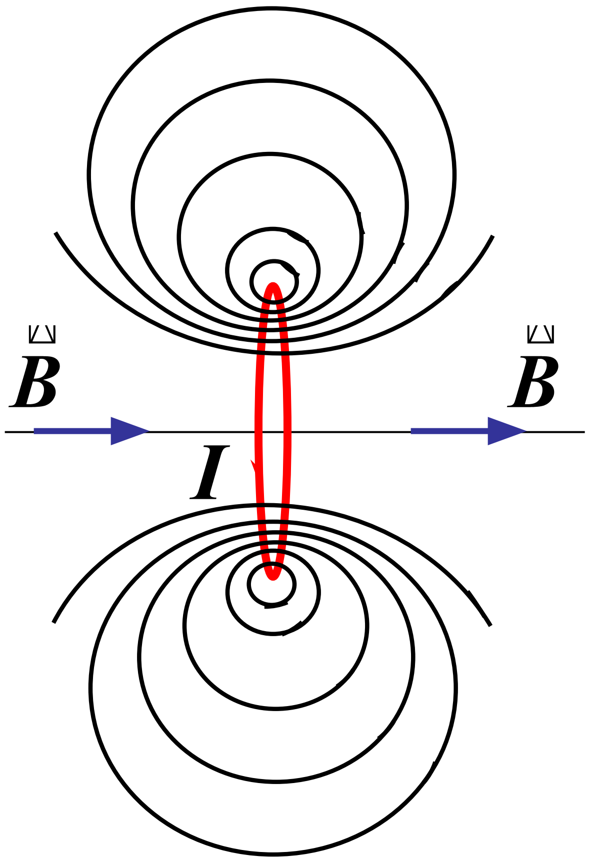
Произведение IS - *магнитный момент контура.* Тогда выражение для индукции магнитного поля -

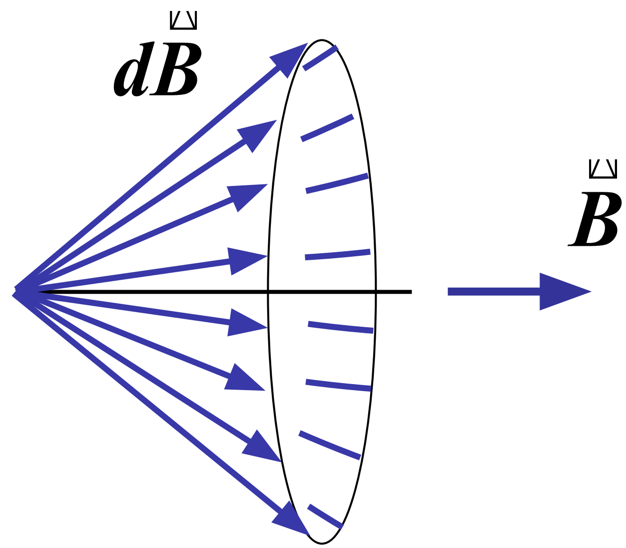
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$$

(при условии, что вдали от кругового тока $a \approx r$) .

Графическое изображение *магнитного поля на оси кругового тока*

Вид линий магнитной индукции поля кругового тока, лежащих в плоскости, проходящей через ось тока:





Направления векторов индукции магнитного поля в точке, лежащей на оси кругового тока.

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Магнитный поток через элемент dS поверхности S:

$$d\Phi_B = \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = BdS\cos\alpha$$

$d\vec{S} = dS\vec{n}^0$, $\vec{n}^0$ - орт вектора нормали,

α - угол между нормалью к площадке и вектором магнитной индукции, B_n - проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль к площадке.

Полный поток через поверхность S: $\Phi_B = \int\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int\limits_S B_n dS$

Для замкнутой поверхности: $$\Phi_B = \oint\limits_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \oint\limits_S B_n dS$$

Единица магнитного потока - *вебер* (**Вб**) (в системе СИ).

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Силовые линии магнитного поля замкнуты. Любая силовая линия пересекает замкнутую поверхность дважды: один раз в положительном по отношению к нормали направлении, а другой раз – в отрицательном. Поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность ***S***, всегда равен нулю:

$$\Phi_B = \oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$$

→ теорема Гаусса-Остроградского для магнитного поля.

Поток вектора напряженности магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$$

Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса-Остроградского для вектора $\vec{B}$

Важное следствие из теоремы Гаусса: $\boxed{\textit{поток вектора } \vec{B} \textit{ через замкнутую поверхность } S \textit{ не зависит от формы этой поверхности.}}$

В дифференциальной форме: $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

Сведения из векторного анализа: … *дивергенция характеризует интенсивность (обильность) истоков и стоков векторного поля.*

Если $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, это означает, что магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии $\vec{B}$ замкнутые. Магнитное поле имеет ***<u>соленоидальный</u>*** или ***<u>вихревой</u>*** характер.

Физическая причина соленоидальности магнитного поля - отсутствие свободных магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L называется интеграл вида

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \oint_L B_l dl$$

где $d\vec{l}$ - вектор элемента длины контура, $B_l = B\cos\alpha$, α - угол между векторами $\vec{B}$ и $d\vec{l}$

Циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру L равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром:

$$\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I$$

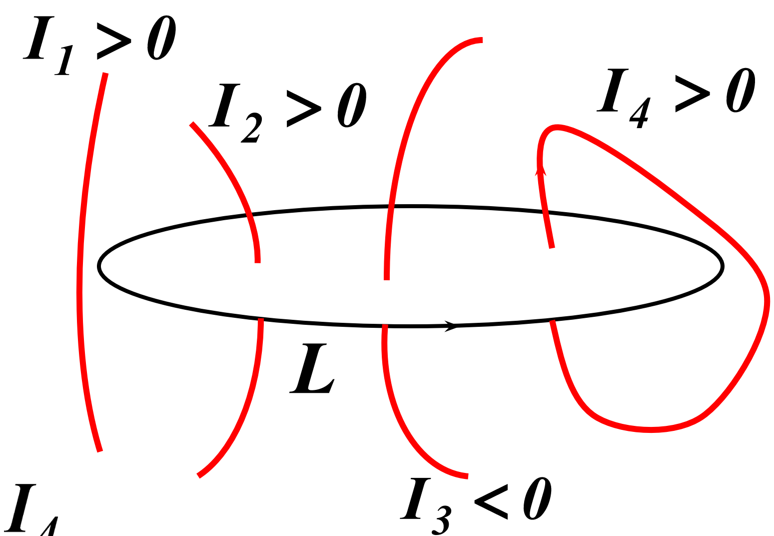
Это теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

$$\boxed{\oint_L \left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \mu_0 I}$$

Ток I в теореме есть алгебраическая сумма токов I_k, охватываемых контуром L: $I = \sum I_k$

Ток положительный, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления - отрицательный.



Пример

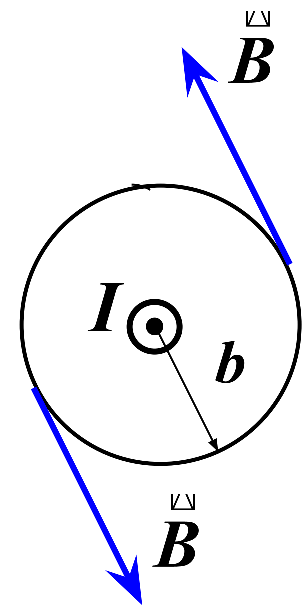
токи I_1, I_2 и I_4 - положительные, ток I_3 - отрицательный. Сумма токов:

$$I_k = 0 \cdot I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = I_2 - I_3 + I_4$$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$. Применение теоремы.

Применение теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ в ряде случаев упрощает расчет поля, особенно если вычисление циркуляции $\vec{B}$ можно свести к произведению $\vec{B}$ (или проекции $\vec{B}$) на длину контура или его часть.

<u>Пример.</u> Магнитное поле прямого тока I.

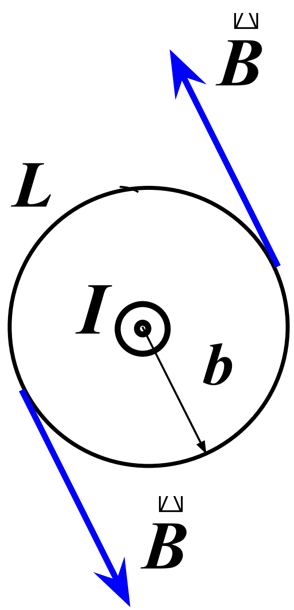


Пусть ток направлен перпендикулярно плоскости рисунка, к нам.

Линии вектора $\vec{B}$ имеют вид окружностей с центром на оси тока.

Во всех точках на расстоянии b от центра модуль вектора $\vec{B}$ одинаков.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$. Применение теоремы.



Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ для выбранного круглого контура L:

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B\,2\pi b = \mu_0 I$$

<u>Итог:</u> $B\,2\pi b = \mu_0 I$, или $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi b}}$