Электромагнитные волны

Метод комплексных амплитуд

Векторная функция координат и времени

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)=V_x(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{x}^o+V_y(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{y}^o+V_z(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{z}^o$$

Гармоническая векторная функция времени

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)=V_x(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\phi_x)\boldsymbol{x}^o+$$

$$+V_y(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\phi_y)\boldsymbol{y}^o+$$

$$V_z(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\phi_z)\boldsymbol{z}^o$$

Электромагнитные волны

Метод комплексных амплитуд

Введем в рассмотрение комплексную функцию

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{r},t)=\begin{bmatrix} V_x(\boldsymbol{r})\exp(i\phi_x)\boldsymbol{x}^o + \\ +V_y(\boldsymbol{r})\exp(i\phi_y)\boldsymbol{y}^o + \\ +V_z(\boldsymbol{r})\exp(i\phi_z)\boldsymbol{z}^o \end{bmatrix}\exp(i\omega t)=\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})\exp(i\omega t)$$

Как видно

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{r},t)\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})\exp(i\omega t)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{r},t)+\dot{\boldsymbol{V}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]$$

Электромагнитные волны

Метод комплексных амплитуд

Плоские векторные волны

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)=A_x\cos\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)+\phi_x\right]\boldsymbol{x}^o+$$
$$+A_y\cos\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)+\phi_y\right]\boldsymbol{y}^o+$$
$$+A_z\cos\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y+k_z z\right)+\phi_z\right]\boldsymbol{z}^o$$

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}^o+k_y\boldsymbol{y}^o+k_z\boldsymbol{z}^o \qquad \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}^o+y\boldsymbol{y}^o+z\boldsymbol{z}^o$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_y y+k_z z$$

Электромагнитные волны

Метод комплексных амплитуд

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)=A_x\cos[\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\phi_x]\boldsymbol{x}^o+$$

$$+A_y\cos[\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\phi_y]\boldsymbol{y}^o+$$

$$+A_z\cos[\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\phi_z]\boldsymbol{z}^o$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]]$$

$$\boldsymbol{A}=A_x\exp(i\phi_x)\boldsymbol{x}^o+A_y\exp(i\phi_y)\boldsymbol{y}^o+A_z\exp(i\phi_z)\boldsymbol{z}^o$$

Электромагнитные волны

Метод комплексных амплитуд

Средние значения гармонических вектор-функций $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$

где $\boldsymbol{V}_{1,2}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{A}_{1,2}(\boldsymbol{r})\exp(i\omega t)\right]$

$$\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)\,dt \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\langle \boldsymbol{V} \rangle = 0$$

$$\langle \boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}_2^{*}(\boldsymbol{r})\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{A}_1^{*}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})\right]$$

$$\langle \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{V}_2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{A}_2^{*}(\boldsymbol{r})\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{A}_1^{*}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})\right]$$