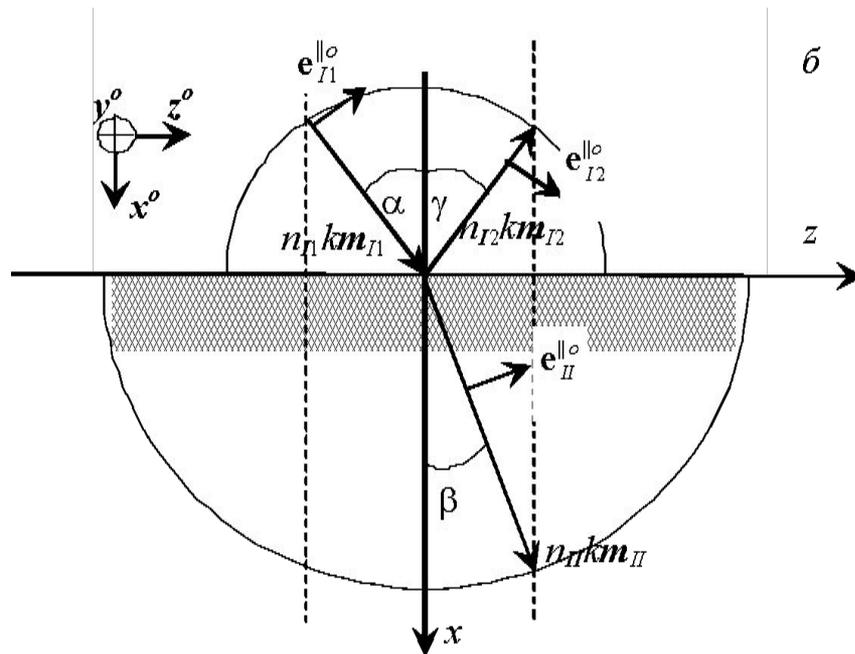
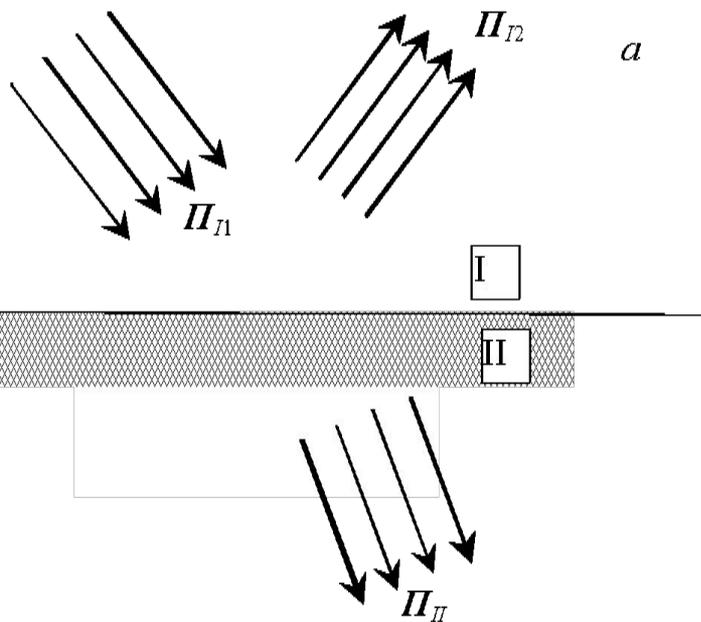


# Отражение и преломление электромагнитных волн



# Отражение и преломление электромагнитных волн

Падающая волна

$$\mathbf{E}_{I1} = E_{I1} \mathbf{e}_{I1} \exp[i(\omega t - m_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \cdot \mathbf{r})]$$

$$\mathbf{H}_{I1} = H_{I1} \mathbf{h}_{I1} \exp[i(\omega t - m_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \cdot \mathbf{r})]$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{I1} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}_{I1}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_{I1} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{I1}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}_{I1}$$

$$m_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{E}_{I1} = \mu \mu_0 \omega \mathbf{H}_{I1} \Rightarrow m_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \times [\mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{E}_{I1}] = \mu \mu_0 \omega [\mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{H}_{I1}]$$

$$m_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{H}_{I1} = -\varepsilon_0 \omega \mathbf{E}_{I1}$$

$$\begin{aligned} (m_I k_0)^2 \mathbf{m}_{I1} \times [\mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{E}_{I1}] &= -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \mu \mathbf{E}_{I1} \Leftrightarrow \\ -\mathbf{m}_{I1} \times [\mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{E}_{I1}] &= \mathbf{E}_{I1} \Rightarrow \mathbf{E}_{I1} (m_{I1}^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$



$$m_{I1}^2 = 1$$

$$\mathbf{m}_{I1} = \cos \alpha \mathbf{x}^0 + \sin \alpha \mathbf{z}^0$$

09/03/2023

$$(m_I)^2 = \varepsilon_I \mu_I$$

Вещественный вектор

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Отраженная и преломленная волна

$$\mathbf{E}_{I2} = E_{I2} \mathbf{e}_{I2} \exp[i(\omega t - n_I k_0 \mathbf{m}_{I2} \cdot \mathbf{r})];$$

$$\mathbf{H}_{I2} = H_{I2} \mathbf{h}_{I2} \exp[i(\omega t - n_I k_0 \mathbf{m}_{I2} \cdot \mathbf{r})];$$

$$(\mathbf{m}_{I2})^2 = 1$$

$$\mathbf{E}_{II} = E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - n_{II} k_0 \mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r})];$$

$$\mathbf{H}_{II} = H_{II} \mathbf{h}_{II} \exp[i(\omega t - n_{II} k_0 \mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r})].$$

$$(\mathbf{m}_{II})^2 = 1$$

Требование вещественности векторов отсутствует!!!

$$\mathbf{m}_{I2} = m_{I2x} \mathbf{x}^o + m_{I2z} \mathbf{z}^o$$

$$(m_{I2x})^2 + (m_{I2z})^2 = 1$$

$$\mathbf{m}_{II} = m_{IIx} \mathbf{x}^o + m_{IIz} \mathbf{z}^o$$

$$(m_{IIx})^2 + (m_{IIz})^2 = 1$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Электромагнитное поле в среде «I»

$$\mathbf{E}_I = E_{I1} \mathbf{e}_{I1} \exp[i(\omega t - n_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \cdot \mathbf{r})] + E_{I2} \mathbf{e}_{I2} \exp[i(\omega t - n_I k_0 \mathbf{m}_{I2} \cdot \mathbf{r})]$$

$$\mathbf{H}_I = H_{I1} \mathbf{h}_{I1} \exp[i(\omega t - n_I k_0 \mathbf{m}_{I1} \cdot \mathbf{r})] + H_{I2} \mathbf{h}_{I2} \exp[i(\omega t - n_I k_0 \mathbf{m}_{I2} \cdot \mathbf{r})]$$

## Электромагнитное поле в среде «II»

$$\mathbf{E}_{II} = E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - n_{II} k_0 \mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r})];$$

$$\mathbf{H}_{II} = H_{II} \mathbf{h}_{II} \exp[i(\omega t - n_{II} k_0 \mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r})].$$

Тангенциальные и нормальные компоненты полей относительно границы раздела

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E}_{*\tau} + \mathbf{E}_{*n}, \quad \mathbf{H}_* = \mathbf{H}_{*\tau} + \mathbf{H}_{*n}, \quad \mathbf{D}_* = \mathbf{D}_{*\tau} + \mathbf{D}_{*n}, \quad \mathbf{B}_* = \mathbf{B}_{*\tau} + \mathbf{B}_{*n},$$

$$\mathbf{D}_* = \epsilon_* \mathbf{E}_* \quad \text{è} \quad \mathbf{B}_* = \mu_* \mu_0 \mathbf{H}_* \Rightarrow \mathbf{D}_{*\tau} = \mu_* \epsilon_* \mathbf{E}_{*\tau}, \quad \mathbf{D}_{*n} = \epsilon_* \epsilon_0 \mathbf{E}_{*n}, \quad \mathbf{B}_{*\tau} = \mu_* \mu_0 \mathbf{H}_{*\tau}, \quad \mathbf{B}_{*n} = \mu_* \mu_0 \mathbf{H}_{*n},$$

$$\mathbf{e}_* = \mathbf{e}_{*\tau} + \mathbf{e}_{*n}, \quad \mathbf{h}_* = \mathbf{h}_{*\tau} + \mathbf{h}_{*n}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Граничные условия

$$\mathbf{m}_{I1} = m_{I1x} \mathbf{x}^o + m_{I1z} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{m}_{II} = m_{IIx} \mathbf{x}^o + m_{IIy} \mathbf{y}^o + m_{IIz} \mathbf{z}^o.$$

$$\mathbf{m}_{I1} \cdot \mathbf{r} = m_{I1z} z \quad \mathbf{m}_{I2} \cdot \mathbf{r} = m_{I2y} y + m_{I2z} z \quad \mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r} = m_{IIy} y + m_{IIz} z$$

Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей

$$\mathbf{E}_{I\tau} = \mathbf{E}_{II\tau} \quad \text{è} \quad \mathbf{H}_{I\tau} = \mathbf{H}_{II\tau} \Rightarrow$$

Непрерывность нормальных компонент индукций

$$\mathbf{D}_{In} = \mathbf{D}_{IIn} \quad \text{è} \quad \mathbf{B}_{In} = \mathbf{B}_{IIn} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_I \mathbf{E}_{In} = \epsilon_{II} \mathbf{E}_{IIn} \quad \text{è} \quad \mu_I \mathbf{H}_{In} = \mu_{II} \mathbf{H}_{IIn}$$

$$\begin{aligned} E_{I1} e^{-i m_{I1z} z} + E_{I2} \exp[-i m_{I2y} y + m_{I2z} z] &= E_{II} \exp[-i m_{IIy} y + m_{IIz} z] \\ \epsilon_I E_{I1} e^{-i m_{I1z} z} + \epsilon_I E_{I2} \exp[-i m_{I2y} y + m_{I2z} z] &= \epsilon_{II} E_{II} \exp[-i m_{IIy} y + m_{IIz} z] \\ H_{I1} e^{-i m_{I1z} z} + H_{I2} \exp[-i m_{I2y} y + m_{I2z} z] &= H_{II} \exp[-i m_{IIy} y + m_{IIz} z] \\ \mu_I H_{I1} e^{-i m_{I1z} z} + \mu_I H_{I2} \exp[-i m_{I2y} y + m_{I2z} z] &= \mu_{II} H_{II} \exp[-i m_{IIy} y + m_{IIz} z] \end{aligned}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$x = 0, \Rightarrow \mathbf{r} = yy^{\circ} + zz^{\circ}$$

$$\mathbf{m}_{I1} = m_{I1x}\mathbf{x}^{\circ} + m_{I1z}\mathbf{z}^{\circ}, \quad \mathbf{m}_{I2} = m_{I2x}\mathbf{x}^{\circ} + m_{I2y}\mathbf{y}^{\circ} + m_{I2z}\mathbf{z}^{\circ}, \quad \mathbf{m}_{II} = m_{IIx}\mathbf{x}^{\circ} + m_{IIy}\mathbf{y}^{\circ} + m_{IIz}\mathbf{z}^{\circ}.$$

$$\mathbf{m}_{I1} \cdot \mathbf{r} = m_{I1z}z$$

$$\mathbf{m}_{I2} \cdot \mathbf{r} = m_{I2y}y + m_{I2z}z$$

$$\mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r} = m_{IIy}y + m_{IIz}z$$

$$\mu_I k_0 m_{I1z} z = \mu_I k_0 (m_{I2y}y + m_{I2z}z) = \mu_{II} k_0 (m_{IIy}y + m_{IIz}z)$$

$$m_{I2y} = m_{IIy} = 0$$

$$\mu_I m_{I1z} = \mu_I m_{I2z} = \mu_{II} m_{IIz}$$

$$\sin \alpha = m_{I1z} = m_{I2z} = \sin \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$m_{IIz} = \frac{\mu_I}{\mu_{II}} \sin \alpha = \frac{\eta_I - i\chi_I}{\eta_{II} - i\chi_{II}} \sin \alpha = m'_{IIz} + im''_{IIz}$$

$$= \frac{\eta_I \eta_{II} + \chi_I \chi_{II}}{\eta_{II}^2 + \chi_{II}^2} \sin \alpha + i \frac{\eta_I \chi_{II} - \eta_{II} \chi_I}{\eta_{II}^2 + \chi_{II}^2} \sin \alpha$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$m_{I2x} = \pm \sqrt{1 - (m_{I1z})^2}$$

$$m_{IIx} = \pm \sqrt{1 - (m_{IIz})^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{n_I^2}{n_{II}^2} (m_{I1z})^2}$$

Знаки перед квадратными корнями определим позже!!!

Таким образом векторы  $\mathbf{m}_* = m_{*x} \mathbf{x}^0 + m_{*z} \mathbf{z}^0$  определены. Они все лежат в одной плоскости падения  $xOz$ .

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Снова граничные условия

$$E_{I1} e_{I1\tau} + E_{I2} e_{I2\tau} = E_{II} e_{II\tau}$$

$$\varepsilon_I E_{I1} e_{I1n} + \varepsilon_I E_{I2} e_{I2n} = \varepsilon_{II} E_{II} e_{II n}$$

$$H_{I1} h_{I1\tau} + H_{I2} h_{I2\tau} = H_{II} h_{II\tau}$$

$$\mu_I H_{I1} h_{I1n} + \mu_I H_{I2} h_{I2n} = \mu_{II} H_{II} h_{II n}$$

Учтем

$$H_* = \frac{\varepsilon_*}{\mu_*} \frac{E_*}{Z_0}$$

Тогда граничные условия редуцируются к виду

$$E_{I1} e_{I1\tau} + E_{I2} e_{I2\tau} = E_{II} e_{II\tau}$$

$$\varepsilon_I E_{I1} e_{I1n} + \varepsilon_I E_{I2} e_{I2n} = \varepsilon_{II} E_{II} e_{II n}$$

$$\frac{\varepsilon_I}{\mu_I} E_{I1} h_{I1\tau} + \frac{\varepsilon_I}{\mu_I} E_{I2} h_{I2\tau} = \frac{\varepsilon_{II}}{\mu_{II}} E_{II} h_{II\tau}$$

$$\mu_I E_{I1} h_{I1n} + \mu_I E_{I2} h_{I2n} = \mu_{II} E_{II} h_{II n}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

Выделим в каждой волне составляющие векторов напряженностей в плоскости падения ( $\parallel$ ) и перпендикулярные ей ( $\perp$ ). Для этого введем три локальные системы координат, связанные с каждой из волн.

***I1***

$$\mathbf{m}_{I1} = m_{I1x} \mathbf{x}^o + m_{I1z} \mathbf{z}^o = \cos \alpha \mathbf{x}^o + \sin \alpha \mathbf{z}^o;$$

$$\mathbf{y}^o;$$

$$\mathbf{e}_{I1}^{\parallel o} = [\mathbf{m}_{I1} \times \mathbf{y}^o] = m_{I1x} \mathbf{z}^o - m_{I1z} \mathbf{x}^o$$

***I2***

$$\mathbf{m}_{I2} = m_{I2x} \mathbf{x}^o + m_{I2z} \mathbf{z}^o = -\cos \alpha \mathbf{x}^o + \sin \alpha \mathbf{z}^o;$$

$$\mathbf{y}^o;$$

$$\mathbf{e}_{I2}^{\parallel o} = [\mathbf{m}_{I2} \times \mathbf{y}^o] = -m_{I2x} \mathbf{z}^o + m_{I2z} \mathbf{x}^o$$

***II***

$$\mathbf{m}_{II} = m_{IIx} \mathbf{x}^o + m_{IIz} \mathbf{z}^o;$$

$$\mathbf{y}^o;$$

$$\mathbf{e}_{II}^{\parallel o} = [\mathbf{m}_{II} \times \mathbf{y}^o] = m_{IIx} \mathbf{z}^o - m_{IIz} \mathbf{x}^o$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

Связь между компонентами векторов поляризации в локальных координатах с тангенциальными и нормальными компонентами относительно плоскости падения.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_* &= \mathbf{e}_*^{\parallel} \mathbf{e}_*^{o\parallel} + e_*^{\perp} \mathbf{y}^o, & \mathbf{h}_* &= \mathbf{h}_*^{\parallel} \mathbf{h}_*^{o\parallel} + h_*^{\perp} \mathbf{y}^o \\ \mathbf{e}_* &= \mathbf{e}_{*\tau} + \mathbf{e}_{*n}, & \mathbf{h}_* &= \mathbf{m}_* \times \mathbf{e}_* = \mathbf{h}_{*\tau} + \mathbf{h}_{*n} \end{aligned} \quad \left[ \mathbf{m}_* \times \mathbf{e}_* \right] = \begin{bmatrix} x^o & y^o & z^o \\ m_{*x} & 0 & m_{*z} \\ e_{*x} & e_{*y} & e_{*z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{I1} = -\mathbf{e}_{I1}^{\parallel} m_{I1z} \mathbf{x}^o + e_{I1}^{\perp} \mathbf{y}^o + \mathbf{e}_{I1}^{\parallel} m_{I1x} \mathbf{z}^o,$$

$$\mathbf{e}_{I2} = \mathbf{e}_{I2}^{\parallel} m_{I2z} \mathbf{x}^o + e_{I2}^{\perp} \mathbf{y}^o - \mathbf{e}_{I2}^{\parallel} m_{I2x} \mathbf{z}^o,$$

$$\mathbf{e}_{II} = -\mathbf{e}_{I2}^{\parallel} m_{IIz} \mathbf{x}^o + e_{II}^{\perp} \mathbf{y}^o + \mathbf{e}_{II}^{\parallel} m_{IIx} \mathbf{z}^o.$$

$$\mathbf{e}_{I1\tau} = e_{I1}^{\perp} \mathbf{y}^o + \mathbf{e}_{I1}^{\parallel} m_{I1x} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{e}_{I1n} = -\mathbf{e}_{I1}^{\parallel} m_{I1z} \mathbf{x}^o$$

$$\mathbf{e}_{I2\tau} = e_{I2}^{\perp} \mathbf{y}^o - \mathbf{e}_{I2}^{\parallel} m_{I2x} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{e}_{I2n} = \mathbf{e}_{I2}^{\parallel} m_{I2z} \mathbf{x}^o,$$

$$\mathbf{e}_{II\tau} = e_{II}^{\perp} \mathbf{y}^o + \mathbf{e}_{II}^{\parallel} m_{IIx} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{e}_{II n} = -\mathbf{e}_{I2}^{\parallel} m_{IIz} \mathbf{x}^o.$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\mathbf{h}_{I1} = -e_{I1}^{\perp} m_{I1z} \mathbf{x}^o - e_{I1}^{\parallel} \mathbf{y}^o + e_{I1}^{\perp} m_{I1x} \mathbf{z}^o$$

$$\mathbf{h}_{I2} = -e_{I2}^{\perp} m_{I2z} \mathbf{x}^o + e_{I2}^{\parallel} \mathbf{y}^o + e_{I2}^{\perp} m_{I2x} \mathbf{z}^o$$

$$\mathbf{h}_{II} = -e_{II}^{\perp} m_{IIz} \mathbf{x}^o - e_{II}^{\parallel} \mathbf{y}^o + e_{II}^{\perp} m_{IIx} \mathbf{z}^o$$

$$\mathbf{h}_{I1\tau} = -e_{I1}^{\parallel} \mathbf{y}^o + e_{I1}^{\perp} m_{I1x} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{h}_{I1n} = -e_{I1}^{\perp} m_{I1z} \mathbf{x}^o,$$

$$\mathbf{h}_{I2\tau} = e_{I2}^{\parallel} \mathbf{y}^o + e_{I2}^{\perp} m_{I2x} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{h}_{I2n} = -e_{I2}^{\perp} m_{I2z} \mathbf{x}^o,$$

$$\mathbf{h}_{II\tau} = -e_{II}^{\parallel} \mathbf{y}^o + e_{II}^{\perp} m_{IIx} \mathbf{z}^o, \quad \mathbf{h}_{II n} = -e_{II}^{\perp} m_{IIz} \mathbf{x}^o$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\vec{E}_{I1} (e_{I1}^\perp \mathbf{y}^o + e_{I1}^\parallel m_{I1x} \mathbf{z}^o) + \vec{E}_{I2} (e_{I2}^\perp \mathbf{y}^o - e_{I2}^\parallel m_{I2x} \mathbf{z}^o) = \vec{E}_{II} (e_{II}^\perp \mathbf{y}^o + e_{II}^\parallel m_{IIx} \mathbf{z}^o)$$

$$\varepsilon_I \vec{E}_{I1} (-e_{I1}^\parallel m_{I1z} \mathbf{x}^o) + \varepsilon_I \vec{E}_{I2} (e_{I2}^\parallel m_{I2z} \mathbf{x}^o) = \varepsilon_{II} \vec{E}_{II} (-e_{II}^\parallel m_{IIz} \mathbf{x}^o)$$

$$\frac{\varepsilon_I}{\mu_I} \vec{E}_{I1} (-e_{I1}^\parallel \mathbf{y}^o + e_{I1}^\perp m_{I1x} \mathbf{z}^o) + \frac{\varepsilon_I}{\mu_I} \vec{E}_{I2} (e_{I2}^\parallel \mathbf{y}^o + e_{I2}^\perp m_{I2x} \mathbf{z}^o) = \frac{\varepsilon_{II}}{\mu_{II}} \vec{E}_{II} (-e_{II}^\parallel \mathbf{y}^o + e_{II}^\perp m_{IIx} \mathbf{z}^o)$$

$$\mu_I \vec{E}_{I1} (-e_{I1}^\perp m_{I1z} \mathbf{x}^o) + \mu_I \vec{E}_{I2} (-e_{I2}^\perp m_{I2z} \mathbf{x}^o) = \mu_{II} \vec{E}_{II} (-e_{II}^\perp m_{IIz} \mathbf{x}^o)$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\begin{aligned}
 E_{I1} e_{I1}^\perp + E_{I2} e_{I2}^\perp &= E_{II} e_{II}^\perp \\
 m_{I1x} E_{I1} e_{I1}^\parallel - m_{I2x} E_{I2} e_{I2}^\parallel &= m_{IIx} E_{II} e_{II}^\parallel \\
 -m_{I1z} \epsilon_I E_{I1} e_{I1}^\parallel + m_{I2z} \epsilon_I E_{I2} e_{I2}^\parallel &= -m_{IIz} \epsilon_{II} E_{II} e_{II}^\parallel \\
 -\frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I1} e_{I1}^\parallel + \frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I2} e_{I2}^\parallel &= -\frac{\epsilon_{II}}{\mu_{II}} E_{II} e_{II}^\parallel \\
 m_{I1x} \frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I1} e_{I1}^\perp + m_{I2x} \frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I2} e_{I2}^\perp &= m_{IIx} \frac{\epsilon_{II}}{\mu_{II}} E_{II} e_{II}^\perp \\
 m_{I1z} \mu_I E_{I1} e_{I1}^\perp + m_{I2z} \mu_I E_{I2} e_{I2}^\perp &= m_{IIz} \mu_{II} E_{II} e_{II}^\perp
 \end{aligned}$$

Неизвестные.

$$E_{I2} e_{I2}^\perp = E_{I2}^\perp, \quad E_{I2} e_{I2}^\parallel = E_{I2}^\parallel, \quad E_{II} e_{II}^\parallel = E_{II}^\parallel, \quad E_{II} e_{II}^\perp = E_{II}^\perp$$

Перпендикулярные и параллельные плоскости падения составляющие

Уравнений больше чем неизвестных?!

Учтем

09/03/2023

$$\mu_I m_{I1z} = \mu_I m_{I2z} = \mu_{II} m_{IIz}$$

$$\epsilon_* \mu_* = 1 \mu_*^2$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

Две независимых подсистемы

$$\left\{ \begin{aligned} E_{I1}^{\perp} + E_{I2}^{\perp} &= E_{II}^{\perp} \\ \frac{\epsilon_I m_{I1x}}{\mu_I} E_{I1}^{\perp} + \frac{\epsilon_I m_{I2x}}{\mu_I} E_{I2}^{\perp} &= \frac{\epsilon_{II} m_{IIx}}{\mu_{II}} E_{II}^{\perp} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} m_{I1x} E_{I1}^{\parallel} - m_{I2x} E_{I2}^{\parallel} &= m_{IIx} E_{II}^{\parallel} \\ -\frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I1}^{\parallel} + \frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I2}^{\parallel} &= -\frac{\epsilon_{II}}{\mu_{II}} E_{II}^{\parallel} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} E_{I2}^{\perp} - E_{II}^{\perp} &= -E_{I1}^{\perp} \\ \frac{\epsilon_I m_{I2x}}{\mu_I} E_{I2}^{\perp} - \frac{\epsilon_{II} m_{IIx}}{\mu_{II}} E_{II}^{\perp} &= -\frac{\epsilon_I m_{I1x}}{\mu_I} E_{I1}^{\perp} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} m_{I2x} E_{I2}^{\parallel} + m_{IIx} E_{II}^{\parallel} &= m_{I1x} E_{I1}^{\parallel} \\ \frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I2}^{\parallel} + \frac{\epsilon_{II}}{\mu_{II}} E_{II}^{\parallel} &= \frac{\epsilon_I}{\mu_I} E_{I1}^{\parallel} \end{aligned} \right.$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

Амплитуды составляющих отраженной и преломленной волны перпендикулярные и параллельные плоскости падения

$$E_{I2}^{\perp} = \frac{\mu_I m_{IIx} \epsilon_{II} - \mu_{II} m_{I1x} \epsilon_I}{\mu_{II} m_{I2x} \epsilon_I - \mu_I m_{IIx} \epsilon_{II}} E_{I1}^{\perp}$$

$$E_{I2}^{\parallel} = \frac{\mu_I m_{I1x} \epsilon_{II} - \mu_{II} m_{IIx} \epsilon_I}{\mu_I \epsilon_{II} m_{I2x} - \mu_{II} m_{IIx} \epsilon_I} E_{I1}^{\parallel}$$

$$E_{II}^{\perp} = \frac{\epsilon_I \mu_{II} (m_{I2x} - m_{I1x})}{\mu_{II} m_{I2x} \epsilon_I - \mu_I m_{IIx} \epsilon_{II}} E_{I1}^{\perp}$$

$$E_{II}^{\parallel} = \frac{\epsilon_I \mu_{II} (m_{I2x} - m_{I1x})}{\mu_I m_{I2x} \epsilon_{II} - \mu_{II} m_{IIx} \epsilon_I} E_{I1}^{\parallel}$$

## Выбор знака компонент векторов

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{II} \rightarrow \epsilon_I \\ \mu_{II} \rightarrow \mu_I \end{array} \right\} \Rightarrow \{ \mu_{II} \rightarrow \mu_I \} \Rightarrow \begin{cases} E_{I2}^{\perp} \rightarrow 0, E_{I2}^{\parallel} \rightarrow 0 \\ E_{II}^{\perp} \rightarrow E_{I1}^{\perp}, E_{II}^{\parallel} \rightarrow E_{I1}^{\parallel} \end{cases}$$

$$|m_{I2x}| = |m_{IIx}| = |m_{I1x}|$$

Поэтому

$$\mu_I m_{I2x} = -m_{I1x} = -\sqrt{1 - (m_{I1z})^2}$$

$$\mu_{IIx} = \sqrt{1 - (m_{IIz})^2} = \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$E_{I2}^{\perp} = \frac{\epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - (m_{I1z})^2} - \epsilon_{II} \mu_I \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2}}{\epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - (m_{I1z})^2} + \epsilon_{II} \mu_I \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2}} E_{I1}^{\perp}$$

$$E_{I2}^{\parallel} = \frac{\epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2} - \epsilon_{II} \mu_I \sqrt{1 - (m_{I1z})^2}}{\epsilon_{II} \mu_I \sqrt{1 - (m_{I1z})^2} + \epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2}} E_{I1}^{\parallel}$$

$$E_{II}^{\perp} = \frac{2\epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - (m_{I1z})^2}}{\epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - (m_{I1z})^2} + \epsilon_{II} \mu_I \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2}} E_{I1}^{\perp}$$

$$E_{II}^{\parallel} = \frac{2\epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - (m_{I1z})^2}}{\epsilon_{II} \mu_I \sqrt{1 - (m_{I1z})^2} + \epsilon_I \mu_{II} \sqrt{1 - \frac{\mu_I^2}{\mu_{II}^2} (m_{I1z})^2}} E_{I1}^{\parallel}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Амплитудные коэффициенты отражения и пропускания

$$R_{\parallel} = \frac{E_{I2}^{\parallel}}{E_{I1}^{\parallel}} = \frac{\mu_I \varepsilon_{II} m_{I1x} - \mu_{II} \varepsilon_I m_{IIx}}{\mu_I \varepsilon_{II} m_{I2x} - \mu_{II} \varepsilon_I m_{IIx}}, \quad T_{\parallel} = \frac{E_{II}^{\parallel}}{E_{I1}^{\parallel}} = \frac{\mu_{II} \varepsilon_I (m_{I1x} - m_{I2x})}{\mu_{II} \varepsilon_I m_{IIx} - \mu_I \varepsilon_{II} m_{I2x}},$$
$$R_{\perp} = \frac{E_{I2}^{\perp}}{E_{I1}^{\perp}} = \frac{\mu_I \varepsilon_{II} m_{IIx} - \mu_{II} \varepsilon_I m_{I1x}}{\mu_{II} \varepsilon_I m_{I2x} - \mu_I \varepsilon_{II} m_{IIx}}, \quad T_{\perp} = \frac{E_{II}^{\perp}}{E_{I1}^{\perp}} = \frac{\mu_{II} \varepsilon_I (m_{I2x} - m_{I1x})}{\mu_{II} \varepsilon_I m_{I2x} - \mu_I \varepsilon_{II} m_{IIx}}.$$

## Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{|E_{I2}^{\parallel} e_{I2}^{\parallel}|^2 + |E_{I2}^{\perp} e_{I2}^{\perp}|^2}{|E_{I1}^{\parallel} e_{I2}^{\parallel}|^2 + |E_{I1}^{\perp} e_{I2}^{\perp}|^2} = \frac{|R_{\parallel} E_{I1}^{\parallel} e_{I1}^{\parallel}|^2 + |R_{\perp} E_{I1}^{\perp} e_{I1}^{\perp}|^2}{|E_{I1}^{\parallel}|^2 \left( |e_{I2}^{\parallel}|^2 + |e_{I2}^{\perp}|^2 \right)} = \\
 &= \frac{|E_{I1}^{\parallel}|^2 \left( |R_{\parallel} e_{I1}^{\parallel}|^2 + |R_{\perp} e_{I1}^{\perp}|^2 \right)}{|E_{I1}^{\parallel}|^2} = |R_{\parallel}|^2 |e_{I1}^{\parallel}|^2 + |R_{\perp}|^2 |e_{I1}^{\perp}|^2
 \end{aligned}$$

$$T = \left( |T_{\parallel}|^2 |e_{I1}^{\parallel}|^2 + |T_{\perp}|^2 |e_{I1}^{\perp}|^2 \right) \frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_{II} m_{IIx}^*}{\mu_I m_{Ix}^*} \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \mu_I m_{Ix}^* \right\}}$$

$$\mathbf{R + T = 1}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

Структура преломленной волны в во второй поглощающей среде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{II} &= E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - \mathbf{m}_{II} k_0 \mathbf{m}_{II} \cdot \mathbf{r})] = E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - k_0 (\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx} x + \mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIz} z))] = \\ &= E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - k_0 (\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx} x + n_I \mathbf{m}_{IIz} z))] = E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - k_0 (\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx} x + n_I \sin \alpha z))] = \\ &= E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[i(\omega t - k_0 n_I \sin \alpha z - k_0 (\operatorname{Re}(\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx}) - i \operatorname{Im}(\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx}))x)] = \\ &= E_{II} \mathbf{e}_{II} \exp[-k_0 \operatorname{Im}(\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx})x] \exp[i(\omega t - k_0 n_I \sin \alpha z - k_0 \operatorname{Re}(\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx})x)] = \end{aligned}$$

Плоскость равных фаз

$$n_I \sin \alpha z + \operatorname{Re}(\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx})x = \text{const}$$

Плоскость равных амплитуд

$$\operatorname{Im}(\mathbf{m}_{II} \mathbf{m}_{IIx})x = \text{const}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Формулы Френеля

$$m_{IIx} = \cos \beta \qquad \mathbb{M}_I = n_I \qquad \mathbb{M}_{II} = n_{II}$$

$$n_{II} \sin \beta = n_I \sin \alpha$$

$$R_{\parallel} = \frac{n_{II} \cos \alpha - n_I \cos \beta}{n_I \cos \beta + n_{II} \cos \alpha}, \quad T_{\parallel} = \frac{2n_I \cos \alpha}{n_{II} \cos \alpha + n_I \cos \beta},$$

$$R_{\perp} = \frac{n_I \cos \alpha - n_{II} \cos \beta}{n_I \cos \alpha + n_{II} \cos \beta}, \quad T_{\perp} = \frac{2n_I \cos \alpha}{n_I \cos \alpha + n_{II} \cos \beta},$$

$$R = |R_{\parallel}|^2 |e_{I\parallel}^{\parallel}|^2 + |R_{\perp}|^2 |e_{I\parallel}^{\perp}|^2, \quad T = \left( |T_{\parallel}|^2 |e_{I\parallel}^{\parallel}|^2 + |T_{\perp}|^2 |e_{I\parallel}^{\perp}|^2 \right) \frac{n_{II} \cos \beta}{n_I \cos \alpha}$$

## Полное внутреннее отражение

$$n_{II} < n_I, \quad \Rightarrow \beta > \alpha$$

$$\sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{n_{II}}{n_I}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Угол полной поляризации

$$n_{II} > n_I, \quad \Rightarrow \beta < \alpha$$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \quad T_{\parallel} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)},$$

$$R_{\perp} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

Случай  $\alpha + \beta = \pi/2$ . Угол полной поляризации

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = 0$$

$$R_{\perp} = -\sin(\alpha - \beta) \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_{II}}{n_I}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

Случай линейной поляризации падающей волны

$$e_{I1}^{\parallel} = \cos \theta \qquad e_{I1}^{\perp} = \sin \theta$$

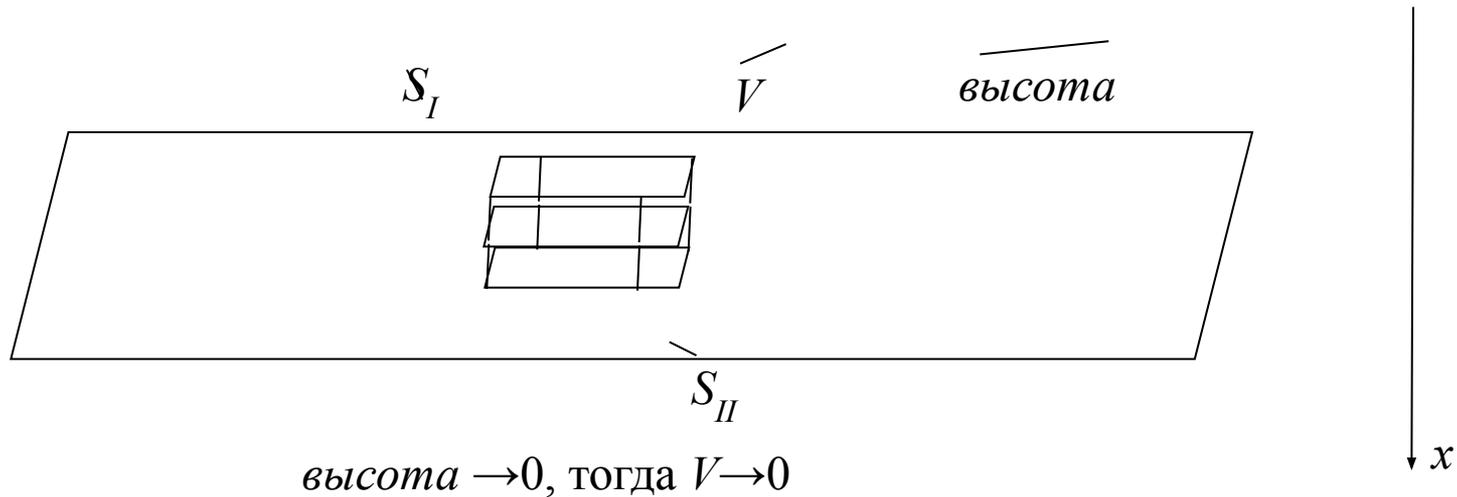
$$R = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \cos^2 \theta + \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \sin^2 \theta = R_{J\parallel} \cos^2 \theta + R_{J\perp} \sin^2 \theta,$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta) \cos^2(\alpha - \beta)} \cos^2 \theta + \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \sin^2 \theta = \\ &= T_{J\parallel} \cos^2 \theta + T_{J\perp} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

## Закон сохранения энергии и коэффициенты отражения и пропускания по интенсивности

$$-\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \int \sigma E^2 dV$$



$$\oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_{S_I} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{II}} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{боковые}} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow \int_{S_I} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{II}} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$-\int_{S_I} \mathbf{\Pi}_I \cdot \mathbf{x}^o dS + \int_{S_{II}} \mathbf{\Pi}_{II} \cdot \mathbf{x}^o dS = 0 \Rightarrow \int_{S_I} \mathbf{\Pi}_I \cdot \mathbf{x}^o dS = \int_{S_{II}} \mathbf{\Pi}_{II} \cdot \mathbf{x}^o dS$$

$$S_I = S_{II} = S'$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\int_{S_I} [\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I] \cdot \mathbf{x}^o dS = \int_{S_{II}} [\mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}] \cdot \mathbf{x}^o dS$$

Рассмотрим средние значения за период волны

$$\left\langle \int_{S_I} [\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I] \cdot \mathbf{x}^o dS \right\rangle = \left\langle \int_{S_{II}} [\mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}] \cdot \mathbf{x}^o dS \right\rangle$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \int_{S'} [\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I] \cdot \mathbf{x}^o dS dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \int_{S'} [\mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}] \cdot \mathbf{x}^o dS dt$$

$$\int_{S'} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I] \cdot \mathbf{x}^o dt dS = \int_{S'} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}] \cdot \mathbf{x}^o dt dS$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

*Интенсивность* это количество электромагнитной энергии, приходящейся на единицу площади за 1 сек.

$$\int_{S'} \langle J_I \rangle dS = \int_{S'} \langle J_{II} \rangle dS$$

$$\langle J_* \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\mathbf{E}_* \times \mathbf{H}_*] \cdot \mathbf{x}^o dt = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{E}_* \times \mathbf{H}_*^*] \cdot \mathbf{x}^o + [\mathbf{E}_*^* \times \mathbf{H}_*] \cdot \mathbf{x}^o \right\}$$

$$\langle J_* \rangle = \operatorname{Re} \left\{ [\mathbf{E}_* \times \mathbf{H}_*^*] \cdot \mathbf{x}^o \right\}$$

## Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\begin{aligned}
 \langle J_I \rangle &= \text{Re} \left\{ \left[ \mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I^* \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \text{Re} \left\{ \left[ (\mathbf{E}_{I1} + \mathbf{E}_{I2}) \times (\mathbf{H}_{I1}^* + \mathbf{H}_{I2}^*) \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \text{Re} \left\{ \left[ \mathbf{E}_{I1} \times \mathbf{H}_{I1}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o + \left[ \mathbf{E}_{I1} \times \mathbf{H}_{I2}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o + \left[ \mathbf{E}_{I2} \times \mathbf{H}_{I1}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o + \left[ \mathbf{E}_{I2} \times \mathbf{H}_{I2}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \langle J_{I1} \rangle + \langle J_{I2} \rangle + \langle J_{I12} \rangle + \langle J_{I21} \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{I1} &= \langle \Pi_{I1} \rangle \cdot \mathbf{x}^o = \text{Re} \left[ \mathbf{E}_{I1} \times \mathbf{H}_{I1}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o = \text{Re} \left\{ \tilde{L}_{I1} \tilde{H}_{I1}^* \left[ \tilde{\mathbf{e}}_{I1} \times \tilde{\mathbf{h}}_{I1}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \text{Re} \left\{ \tilde{L}_{I1} \tilde{m}_I^* \frac{\tilde{L}_{I1}^*}{Z_0} \left[ \tilde{\mathbf{e}}_{I1} \times \left[ \tilde{\mathbf{m}}_{I1}^* \times \tilde{\mathbf{e}}_{I1}^* \right] \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \frac{|\tilde{L}_{I1}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \tilde{m}_I^* \left[ \tilde{\mathbf{m}}_{I1} (\tilde{\mathbf{e}}_{I1} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{I1}^*) + \tilde{\mathbf{e}}_{I1} (\tilde{\mathbf{e}}_{I1} \cdot \tilde{\mathbf{m}}_{I1}) \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} \\
 &= \frac{|\tilde{L}_{I1}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \tilde{m}_I^* m_{I1x} \right\} J_{I2} = \frac{|\tilde{L}_{I1}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \tilde{m}_I m_{I1x} \right\}
 \end{aligned}$$

Здесь учтено  $\tilde{\mathbf{m}}_{I1}^* = \tilde{\mathbf{m}}_{I1}$ . Так как  $\tilde{\mathbf{m}}_{I2}^* = \tilde{\mathbf{m}}_{I2}$

$$J_{I2} = \frac{|\tilde{L}_{I2}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \tilde{m}_I m_{I2x} \right\}$$

## Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\begin{aligned}
 J_{I12} &= \langle \mathbf{\Pi}_{I12} \rangle \cdot \mathbf{x}^o = \text{Re}[\mathbf{E}_{I1} \times \mathbf{H}_{I2}^*] \cdot \mathbf{x}^o = \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{e}}_{I1} \hat{H}_{I2}^* [\hat{\mathbf{e}}_{I1} \times \hat{\mathbf{h}}_{I2}^*] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \text{Re} \left\{ \hat{E}_{I1} \hat{m}_I^* \frac{\hat{E}_{I2}^*}{Z_0} [\hat{\mathbf{e}}_{I1} \times [\mathbf{m}_{I2}^* \times \hat{\mathbf{e}}_{I2}^*]] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &=
 \end{aligned}$$

## Отражение и преломление электромагнитных волн

$$\begin{aligned}
 J_{II} &= \langle \mathbf{\Pi}_{II} \rangle \cdot \mathbf{x}^o = \text{Re} \left[ \mathbf{E}_{II} \times \mathbf{H}_{II}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o = \text{Re} \left\{ \underline{L}_{II} \underline{H}_{II}^* \left[ \underline{e}_{II} \times \underline{h}_{II}^* \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \text{Re} \left\{ \underline{L}_{II} \underline{m}_{II}^* \frac{\underline{E}_{II}^*}{Z_0} \left[ \underline{e}_{II} \times \left[ \underline{m}_{II}^* \times \underline{e}_{II}^* \right] \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \underline{m}_{II}^* \left[ \underline{m}_{II}^* (\underline{e}_{II} \cdot \underline{e}_{II}^*) + \underline{e}_{II} (\underline{e}_{II} \cdot \underline{m}_{II}^*) \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \underline{m}_{II}^* \left[ \underline{m}_{II}^* + \underline{e}_{II} (\underline{e}_{II} \cdot \underline{m}_{II}^*) \right] \cdot \mathbf{x}^o \right\} = \\
 &= \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \underline{m}_{II}^* \left[ \underline{m}_{IIx}^* + (\underline{e}_{II}^* \cdot \mathbf{x}^o) (\underline{e}_{II} \cdot \underline{m}_{II}^*) \right] \right\} = \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \underline{m}_{II}^* \left[ \underline{m}_{IIx}^* + (\underline{e}_{II}^* \cdot \mathbf{x}^o) (\underline{e}_{II} \cdot \underline{m}_{II}^*) \right] \right\} = \\
 &= \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \text{Re} \left\{ \underline{m}_{II}^* \left[ \underline{m}_{IIx}^* + 2i |e_{II}^{\parallel}|^2 \text{Im}(\underline{m}_{IIx} \underline{m}_{IIz}^*) \underline{m}_{IIz}^* \right] \right\} = \\
 &= \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \left[ \text{Re}(\underline{m}_{II}^* \underline{m}_{IIx}^*) + 2 |e_{II}^{\parallel}|^2 \text{Im}(\underline{m}_{IIx} \underline{m}_{IIz}^*) \text{Re}(i \underline{m}_{II}^* \underline{m}_{IIz}^*) \right] = \\
 &= \frac{|\underline{L}_{II}|^2}{Z_0} \left[ \text{Re}(\underline{m}_{II} \underline{m}_{IIx}) + 2 |e_{II}^{\parallel}|^2 \text{Im}(\underline{m}_{IIx} \underline{m}_{IIz}^*) \text{Im}(\underline{m}_{II} \underline{m}_{IIz}) \right]
 \end{aligned}$$

# Отражение и преломление электромагнитных волн

*Отражательная и пропускательная* способность границы

$$R = \frac{J_{I2}}{J_{I1}}$$

$$T = \frac{J_{II}}{J_{I1}}$$