Электромагнитные волны

Волновое уравнение в однородной изотропной среде без токов и зарядов

$$\rho=0 \text{ и } J_{cm}=0$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{E} + \sigma\nabla\times\boldsymbol{E}$$

Учитывая выражение

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma\boldsymbol{E}$$

получим

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E} + \mu_0\varepsilon_0\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu_0\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

Электромагнитные волны

при помощи известной формулы векторного анализа

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и из уравнения Максвелла

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

преобразуем волновое уравнению к следующему виду

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0$$

Учитывая выражение

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

аналогично получим

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0$$

$$\Delta \boldsymbol{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0$$

Электромагнитные волны

Общее решение волнового уравнения в непроводящей среде

Покажем, что любая функция вида $\boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ является решением волнового уравнения (3.24) при σ=0. Введем новую переменную

$$\xi = \omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\,.$$

Тогда

$$\Delta\boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial z^2}$$

Электромагнитные волны

Рассмотрим для примера одну из вторых производных в последнем соотношении

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{x}\right) =$$

$$= \mp k_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi}\right) = \mp k_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{x} = k_x^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

Тогда

$$\Delta \boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi^2} = k^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

Электромагнитные волны

В свою очередь

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\omega t \mp \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\xi)}{\partial \xi^2}.$$

Поэтому

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \omega^2\right) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \xi^2} = 0.$$

Очевидно, что равенство выполняется, если

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega}{c} = \frac{\omega}{\upsilon} = n k_0,$$