Электромагнитные волны

Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде, свободной от токов и зарядов

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]$$

Из вида общего решения волнового уравнения, что плоская волна вида будет решением волнового уравнения волнового уравнения при σ=0. Следует отметить, что при записи плоской волны в этом виде конкретизируется только форма волнового фронта, а параметры волны, такие как частота ω и волновой вектор k остаются неизвестными. Они связаны с физическими параметрами среды распространения и могут быть определены при анализе математической модели волнового процесса. Примером такого определения является полученное выше соотношение, позволяющее вычислить величину волнового вектора и частоту через показатель преломления среды и волновое число в вакууме.

На практике обычно частота известна и требуется определить величину волнового вектора. В рассматриваемом случае направление волнового вектора в пространстве также считается заданным. Часто оно задается единичным вектором $\boldsymbol{m}$ ($\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=m^2=1$). Тогда волновой вектор может быть представлен в форме $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{m}$, где скалярная величина k подлежит определению.

Электромагнитные волны

Поставим теперь вопрос о существовании решений этих уравнений в форме плоской волны при отличной от нуля проводимости σ≠0. Тогда подстановка выражения для плоской волны в волновое уравнение преобразует его к виду

$$\left(k^2 - \varepsilon\mu k_0^2 + i\mu_0\mu\omega\sigma\right)\boldsymbol{A} = 0$$

Для выполнения этого соотношения необходимо

$$k = \pm\sqrt{\varepsilon\mu k_0^2 - i\mu_0\mu\omega\sigma} = \pm k_0\sqrt{\varepsilon\mu - i\frac{\mu_0\mu\omega\sigma}{k_0^2}} = \pm k_0\sqrt{\varepsilon\mu - i\frac{\mu\sigma}{\omega\varepsilon_0}} =$$

$$= \pm k_0\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}} = \pm nk_0\sqrt{1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta}$$

Здесь введена величина тангенса угла диэлектрических потерь

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}$$

Найдем реальную и мнимую часть волнового вектора

$$k^2 = k_0^2(\eta - i\chi)^2 = n^2 k_0^2 (1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta).$$

Из последнего соотношения получим систему уравнений

$$\begin{cases} \eta^2 - \chi^2 = n^2 \\ 2\eta\chi = n^2\,\mathrm{tg}\,\delta \end{cases},$$

решив которую получим

$$\eta = \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta}+1}, \quad \chi = \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta}-1}$$

Величина $\tilde{n} = \eta - i\chi$ – *комплексным показателем преломления*. Теперь волновое число может быть записано в виде

$$k = \pm\left(\eta - i\chi\right)k_0 = \pm\tilde{n}k_0 .$$

общее решение относительно вектора электрической напряженности плоской электромагнитной волны имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ \exp\left[i\left(\omega t - k\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right] + \boldsymbol{E}_- \exp\left[i\left(\omega t + k\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right],$$

где $\boldsymbol{E}_\pm$ векторные амплитуды волн, распространяющихся в направлении «+» заданного (известного) единичного вектора $\boldsymbol{m}$ и в противоположном направлении «–».

Распространение одной волны

Рассмотрим случай распространения одной волны в направлении заданного единичного вектора m. Поскольку ориентация координатных осей ни чем не ограничена, то можно считать, что волна распространяется вдоль положительного направления координатной оси X. Тогда выражение для этой волны может быть преобразовано к виду

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ \exp(-\chi k_0 x)\exp[i(\omega t - \eta k_0 x)] = \boldsymbol{E}_+ \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x\right)\exp[i(\omega t - \eta k_0 x)]$$

Здесь введена величина *коэффициента поглощения*

$$\alpha = 2\chi k_0 = n\sqrt{2\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\delta} - 1\right)}\; k_0 .$$

Квадрат тангенса!!!!

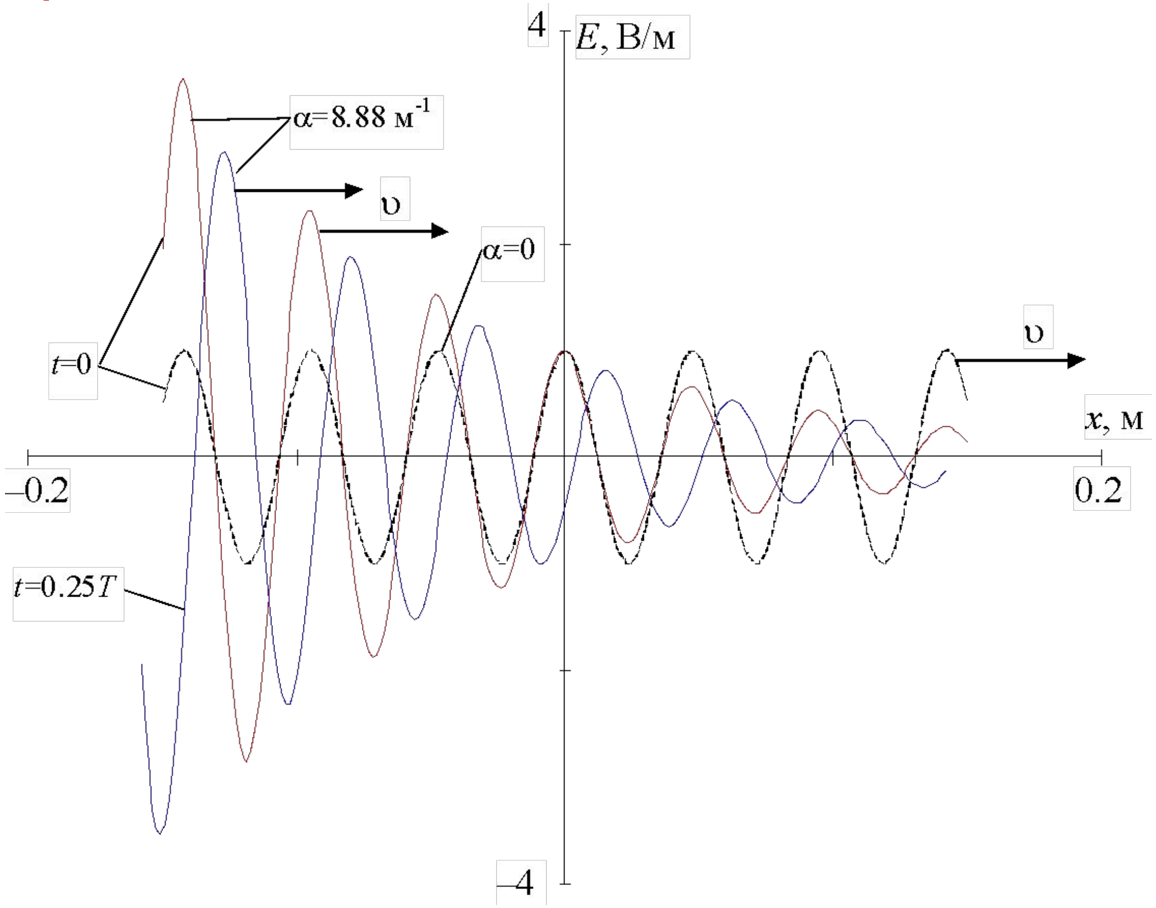
Пусть $\boldsymbol{E}_+ = E_+ \boldsymbol{y}^o = 1(\text{В/м})y^o$; f=1 мГц; μ=1; ε=10; $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$.

Тогда $\omega = 6.28 \cdot 10^6$ рад/с; n=3.162; $\mathrm{tg}\delta = 4.494 \cdot 10^{-3}$; η=3.164; χ=0.106; α=8.88 м$^{-1}$.

$$E = E_+ \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x\right)\cos(\omega t - \eta k_0 x)$$

Электромагнитные волны

Затухающие и не затухающие плоские волновые процессы



Электромагнитные волны

Следует отметить взаимосвязь знаков перед коэффициентом поглощения и волновым числом. В выражении, описывающем плоскую волны, распространяющуюся в положительном направлении оси *X* они отрицательны. Для волны, распространяющейся в противоположном направлении, эти знаки будут положительными

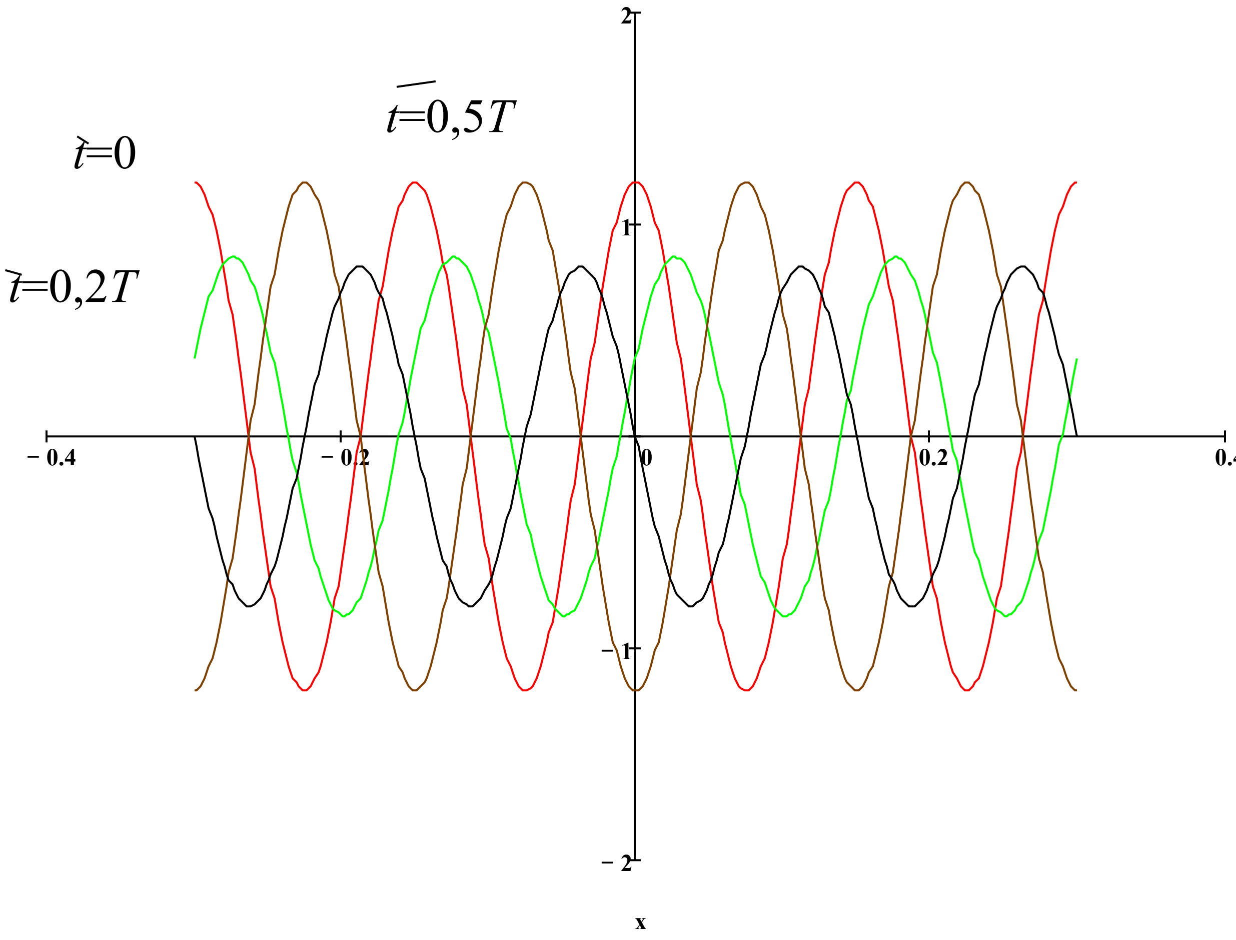
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{-} \exp\left(+\frac{\alpha}{2}x\right)\exp\left[i\left(\omega t + \eta k_0 x\right)\right]$$

Электромагнитные волны

Распространение двух волн навстречу друг другу

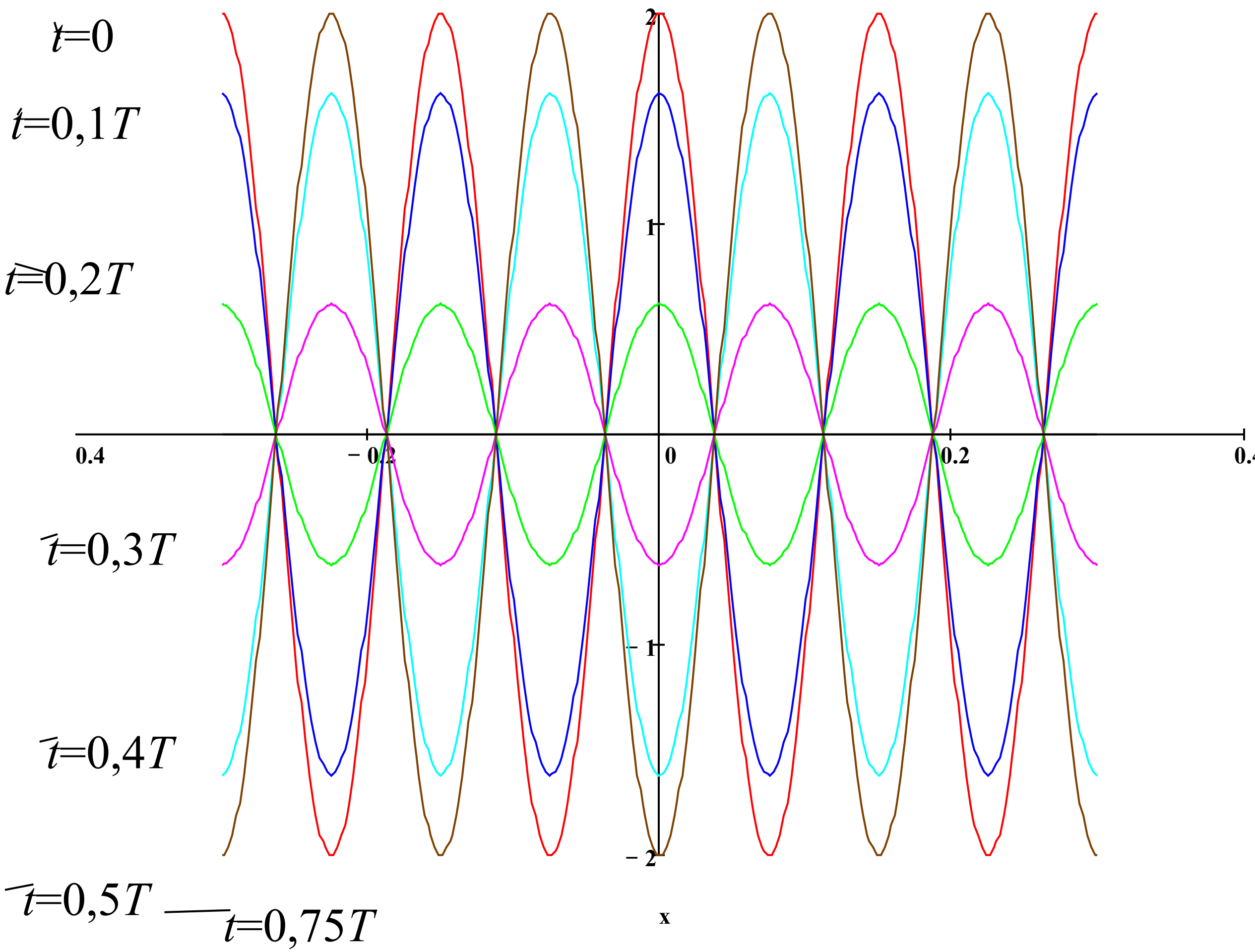
$$E = E_{+}\cos(\omega t - \eta k_0 x) + E_{-}\cos(\omega t + \eta k_0 x)$$

$$E_{+} = 1, \quad E_{-} = 0{,}2$$



Электромагнитные волны

$$E_+ = 1, \quad E_- = 1$$



Электромагнитные волны

Структура плоских электромагнитных волн

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H}\exp\left[i\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\right]$$

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\tilde{\boldsymbol{H}} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \mu\mu_0\omega\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = \left(-\varepsilon\varepsilon_0\omega + i\sigma\right)\boldsymbol{E} = -\varepsilon\varepsilon_0\omega\left(1 - \frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)\boldsymbol{E} = -\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\omega\boldsymbol{E}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - \frac{i\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right) = \varepsilon\left(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta\right)$$

$$\boldsymbol{k} = \left(\eta - i\chi\right)k_0\boldsymbol{m} = \tilde{n}k_0\boldsymbol{m}$$

$$\tilde{\varepsilon}\mu = \tilde{n}^2$$

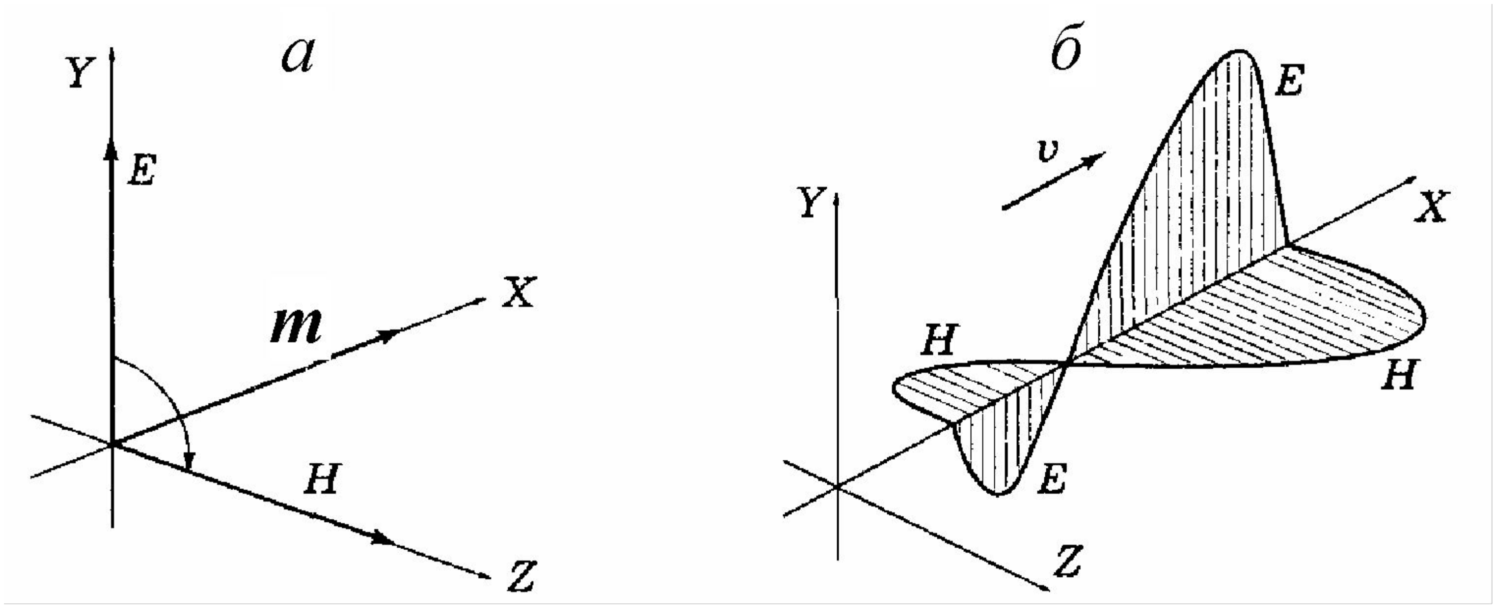
Электромагнитные волны

Взаимная ориентация векторов *m*, *E* и *H*

Из первого уравнения следует, что $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{E}$.

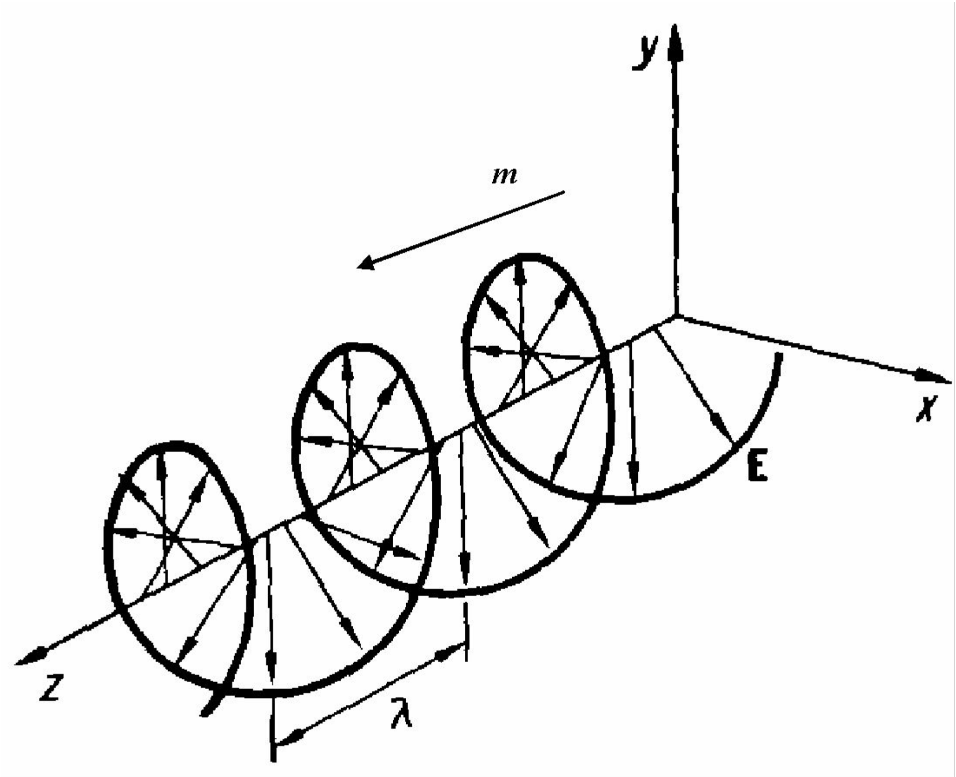
Из второго – $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$.

Таким образом, векторы ***m***, ***E*** и ***H*** попарно ортогональны.



Электромагнитные волны

Распространение волны с правой круговой поляризацией



Электромагнитные волны

Описание поляризации

Введем в рассмотрение

$$\boldsymbol{e}' = \frac{\boldsymbol{E}}{\sqrt{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}}, \quad \boldsymbol{h}' = \frac{\boldsymbol{H}}{\sqrt{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*}} \qquad E_m = \sqrt{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*}, \quad H_m = \sqrt{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}^*}$$

Тогда векторные амплитуды могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{E} = E_m\boldsymbol{e}', \quad \boldsymbol{H} = H_m\boldsymbol{h}'$$

Если $\boldsymbol{e}' = \exp(i\phi_e)\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{h}' = \exp(i\phi_h)\boldsymbol{h}$ То фазы отнесем к комплексным амплитудам

$$E_m\exp(i\phi_e) = \tilde{E}_m \qquad H_m\exp(i\phi_h) = \tilde{H}_m$$

Тогда

$$\boldsymbol{E} = \tilde{E}_m\boldsymbol{e}\exp[i(\omega t - \tilde{n}k_0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})]$$
$$\boldsymbol{H} = \tilde{H}_m\boldsymbol{h}\exp[i(\omega t - \tilde{n}k_0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})]$$

$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^*=1$ и $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}^*=1$

Электромагнитные волны

Связь между электрической и магнитной составляющей

$$\tilde{H}_m = \frac{\tilde{n}}{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\tilde{E}_m = \frac{\tilde{n}}{\mu}\frac{\tilde{E}_m}{Z_0} = \frac{\varepsilon}{\tilde{n}}\frac{\tilde{E}_m}{Z_0} \qquad Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi$$

Эллиптическая поляризация

$$\boldsymbol{E}^{z_0} = \tilde{E}_m \boldsymbol{e} \exp\left[i\left(\omega t - \tilde{n} k_0 z_0\right)\right] =$$

$$= \tilde{E}_m \boldsymbol{e} \exp\left(-i\tilde{n} k_0 z_0\right)\exp\left(i\omega t\right) = \tilde{E}_m^{z_0} \boldsymbol{e} \exp\left(i\omega t\right)$$

$$\boldsymbol{H}^{z_0} = \tilde{H}_m \boldsymbol{h} \exp\left[i\left(\omega t - \tilde{n} k_0 z_0\right)\right] =$$

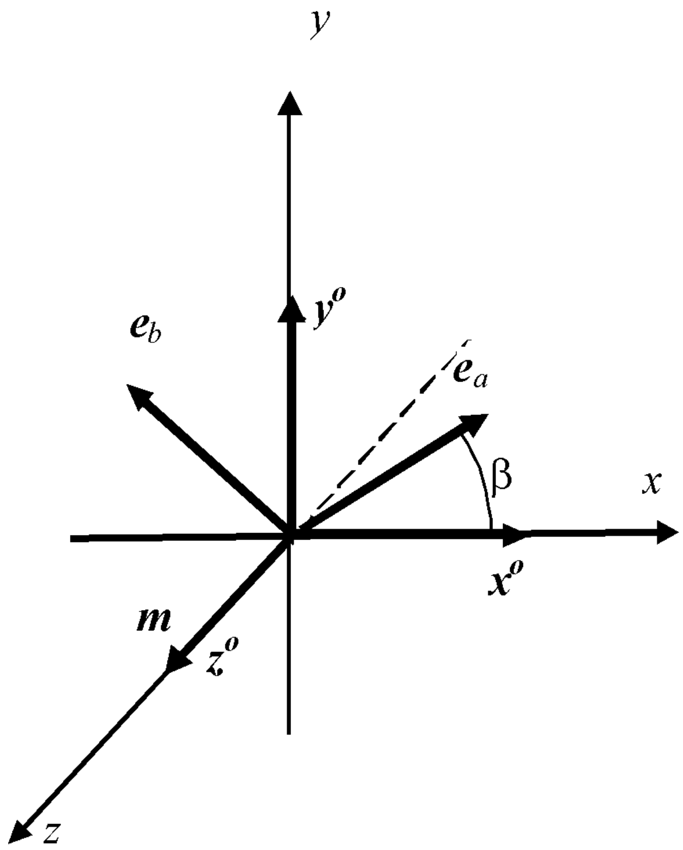
$$= \tilde{H}_m \boldsymbol{h} \exp\left(-i\tilde{n} k_0 z_0\right)\exp\left(i\omega t\right) = \tilde{H}_m^{z_0} \boldsymbol{h} \exp\left(i\omega t\right)$$

Электромагнитные волны

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{e}_a + ir\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$\boldsymbol{e}_a = \cos\beta\boldsymbol{x}^o + \sin\beta\boldsymbol{y}^o$$

$$\boldsymbol{e}_b = -\sin\beta\boldsymbol{x}^o + \cos\beta\boldsymbol{y}^o$$



Электромагнитные волны

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\mu\mu_0\omega\boldsymbol{H}\Rightarrow nk_0\boldsymbol{m}\times E\boldsymbol{e}=\mu\mu_0\omega H\boldsymbol{h}\Rightarrow\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{h}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\varepsilon_0\varepsilon\omega\boldsymbol{E}\Rightarrow nk_0\boldsymbol{m}\times H\boldsymbol{h}=-\varepsilon_0\varepsilon\omega E\boldsymbol{e}\Rightarrow\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{h}=-\boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{z}^o\times\frac{\boldsymbol{e}_a+ir\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}=\frac{\boldsymbol{z}^o\times\boldsymbol{e}_a+ir\boldsymbol{z}^o\times\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{z}^o\times\left(\cos\beta\boldsymbol{x}^o+\sin\beta\boldsymbol{y}^o\right)+ir\boldsymbol{z}^o\times\left(-\sin\beta\boldsymbol{x}^o+\cos\beta\boldsymbol{y}^o\right)}{\sqrt{1+r^2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\beta\boldsymbol{y}^{oo}-\sin\beta\boldsymbol{x}^o\right)+ir\left(-\sin\beta\boldsymbol{y}^o-\cos\beta\boldsymbol{x}^o\right)}{\sqrt{1+r^2}}=$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}_b-ir\boldsymbol{e}_a}{\sqrt{1+r^2}}=-i\frac{r\boldsymbol{e}_a+i\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}=\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\frac{r\boldsymbol{e}_a+i\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$\boldsymbol{h}=-i\frac{r\boldsymbol{e}_a+i\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}=\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\frac{r\boldsymbol{e}_a+i\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}$$

Электромагнитные волны

$$\boldsymbol{E}^{z_0} = \dot{E}_m^{z_0}\boldsymbol{e}\exp(i\omega t)$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{e}_a + ir\boldsymbol{e}_b}{\sqrt{1+r^2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{E}^{z_0}}{\dot{E}_m^{z_0}} = \boldsymbol{e}\exp(i\omega t) = \frac{\boldsymbol{e}_a \exp(i\omega t) + ir\boldsymbol{e}_b \exp(i\omega t)}{\sqrt{1+r^2}}$$

Следуя методу комплексных амплитуд

$$\boldsymbol{\rho} = \mathrm{Re}\left(\frac{\boldsymbol{E}^{z_0}}{\dot{E}_m^{z_0}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\boldsymbol{e}_a \exp(i\omega t) + ir\boldsymbol{e}_b \exp(i\omega t)}{\sqrt{1+r^2}}\right)$$

Тогда

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{e}_a \cos(\omega t) - r\boldsymbol{e}_b \sin(\omega t)}{\sqrt{1+r^2}}$$

Электромагнитные волны

Эллипс поляризации

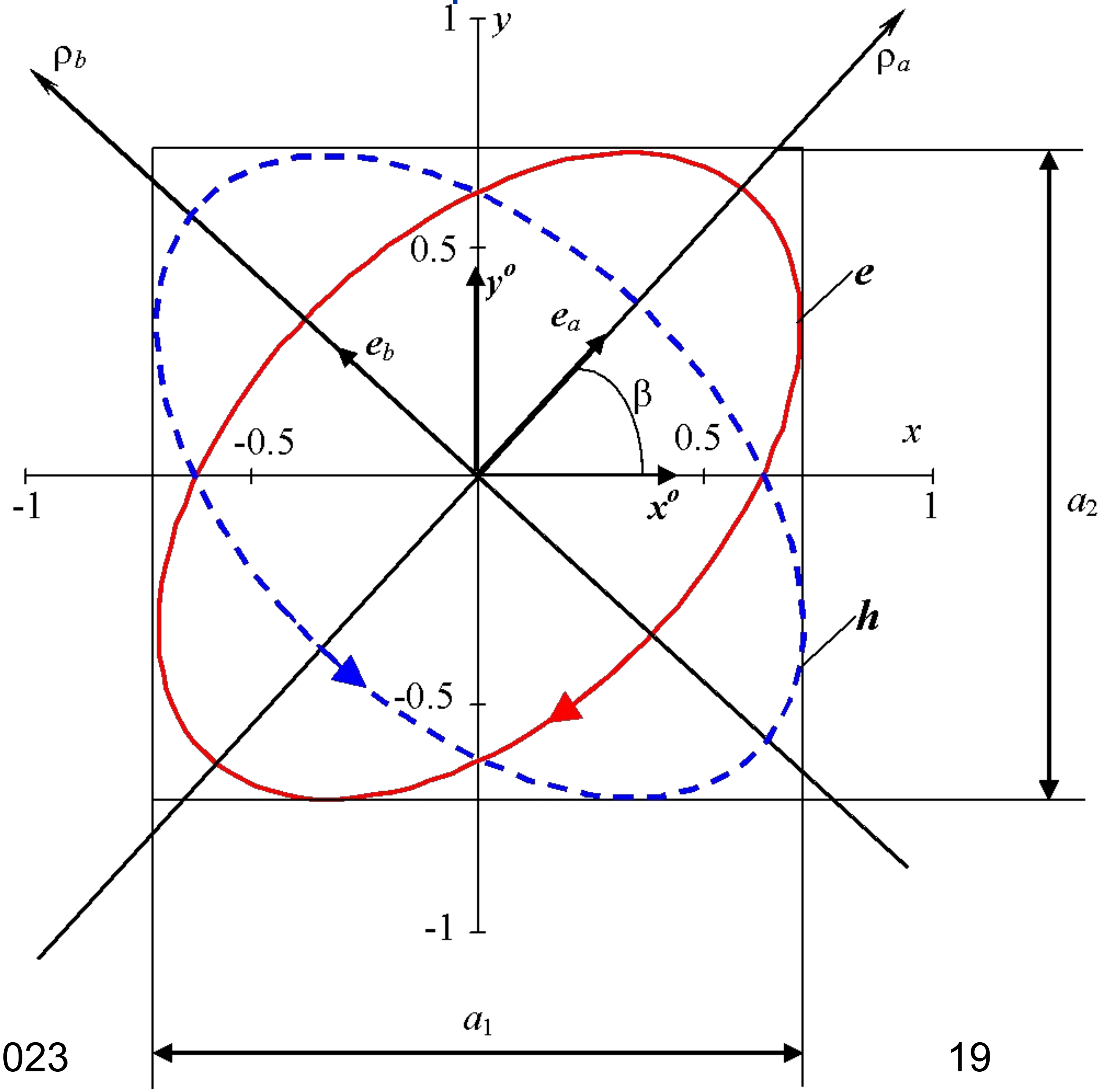
$$\boldsymbol{\rho}^2 = \frac{\cos^2(\omega t) + r^2 \sin^2(\omega t)}{1 + r^2} = 1 \qquad \left(\boldsymbol{\rho}^2 = \boldsymbol{e} \exp(i\omega t) \cdot \boldsymbol{e}^* \exp(-i\omega t) = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}^* = 1\right)$$

$$\rho_a = \cos(\omega t) \qquad \rho_b = \sin(\omega t)$$

$$\left(\frac{\rho_a}{\sqrt{1 + r^2}}\right)^2 + \left(\frac{\rho_b}{\sqrt{1 + r^2}/r}\right)^2 = 1 \qquad \left(\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1\right)$$

Смысл параметра *r*

$$tg\psi = \frac{a}{b} = r$$


1
y
ρb
ρa
0.5
yo
e
ea
eb
β
-0.5
0.5
x
-1
1
xo
a2
h
-0.5
-1
a1

Электромагнитные волны

Если $|r| \to 0$, то $a=0$ и $b=1$. В этом случае волна линейно поляризована вдоль направления вектора $\boldsymbol{e}_a$.

Если $|r|=1$, то $a = 1/\sqrt{2}$ и $b = 1/\sqrt{2}$ В этом случае волна имеет круговую поляризацию.

Если $|r| \to \infty$, то $a=1$ и $b=0$. В этом случае волна линейно поляризована вдоль направления вектора $\boldsymbol{e}_b$.

Абсолютная величина параметра $|r|$ характеризует *эллиптичность* поляризации.

Направление вращения поляризации (вектора ρ) задается знаком параметра r.

При *положительной* величине параметра $r>0$ конец вектора ρ или, что то же самое, конец вектора E вращаются *по часовой стрелке* (*вправо*), если смотреть против направления распространения волны (волна падает на лицо наблюдателя). В этом случае волна называется *правополяризованной*.

При *отрицательной* величине параметра $r<0$ конец вектора E вращаются *против часовой стрелки* (*влево*), если опять смотреть против направления распространения волны. В этом случае волна называется *левополяризованной*.

Электромагнитные волны

Альтернативное описание поляризации

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2}\exp(i\Delta) \qquad tg\vartheta = \frac{a_1}{a_2} \qquad \sin 2\psi = (\sin 2\vartheta)\sin\Delta$$

$$tg\,2\beta = (tg\,2\vartheta)\cos\Delta$$

При комплексном *P* волна имеет эллиптическую поляризацию,при этом при чисто мнимом *P* оси эллипса совпадают с осями координат. Когда $P = \pm i$, поляризация круговая. Знак мнимой части *P* определяет направление вращения вектора ***E*** в плоскости поляризации. Знак плюс соответствует правой, минус – левой поляризации.

В случае действительного *P* волна поляризована линейно под углом $\beta = \vartheta$