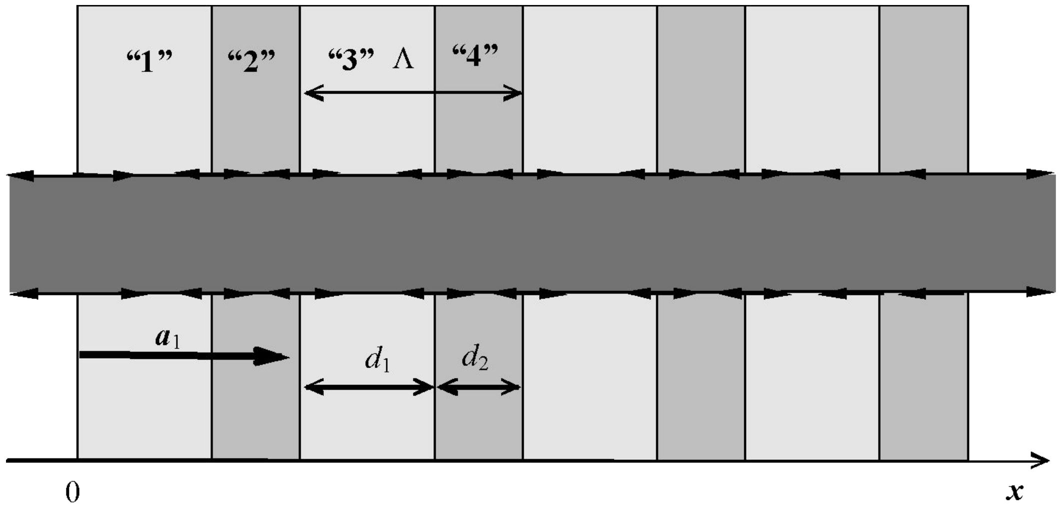
Слоистые периодические среды

Нормальное распространение плоской ЭМВ в слоистой периодической среде



Слоистые периодические среды

Математическая модель

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} - k_0^{\mathbf{2}} n(x)^2 \vec{\boldsymbol{E}} = 0$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) \equiv n(x)^2 = \begin{cases} n_1^{\;2}, & j\Lambda \le x < j\Lambda + d_1 \\ n_2^{\;2}, & j\Lambda + d_1 \le x < (j+1)\Lambda \end{cases}$$

Слоистые периодические среды

Теорема Блоха

Среды с пространственно периодичными материальными параметрами

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})=\varepsilon(\boldsymbol{r}),\quad \mu(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})=\mu(\boldsymbol{r}),\quad \sigma(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})=\sigma(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{R}-\textit{âåêòîð}\quad \textit{òðàíñëÿöèè}$$

В нашем случае $\boldsymbol{R}=\Lambda\boldsymbol{x}^{o}$

Рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле

$$\left\{\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t),\,\tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t)\right\}=\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\}\exp[i\omega t]$$

Слоистые периодические среды

Теорема Блоха

Периодичность материальных параметров приводит к тому, что если некоторые вектор-функции $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ удовлетворяют уравнениям Максвелла, то этим же уравнениям удовлетворяют и функции $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})$. Выразим $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})$ через $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ при помощи линейных соотношений

$$\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\}\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})] = \zeta\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\}\exp[-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})]$$

где $\boldsymbol{k}$ пока не определенный постоянный квазиволновой вектор

Подберем квазиволновой вектор так, чтобы выполнялось равенство

$$\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}]\zeta = 1$$

Слоистые периодические среды

Теорема Блоха

Периодичность функции

$$\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\}\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})] = \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},)\}\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]$$

$$\{\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t), \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t)\}\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}] = \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\}\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]\exp[i\omega t] =$$
$$= \{\boldsymbol{E}^m(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}^m(\boldsymbol{r})\}\exp[i\omega t]$$

Общее решение уравнений Максвелла с периодическими материальными параметрами можно записать в Блоховских волн

$$\{\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t), \widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t)\} = \{\boldsymbol{E}^m(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}^m(\boldsymbol{r})\}\exp[i(\omega t+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]$$

где $$\{\boldsymbol{E}^m(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}^m(\boldsymbol{r})\} = \{\boldsymbol{E}^m(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}), \boldsymbol{H}^m(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})\}$$

Слоистые периодические среды

Применение теоремы Блоха для рассматриваемого случая слоистой периодической среды

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x,t)\exp[-ik_x x]=\boldsymbol{E}^m(x)\exp[i\omega t]$$

где k_x - требующее определения квазиволновое число

Общее решение волнового уравнения для первых двух однородных слоев

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(x,t)=\exp[i\omega t]\begin{cases}\boldsymbol{E}_1(x)\\ \boldsymbol{E}_2(x)\end{cases}=$$

$$=\exp[i\omega t]\begin{cases}\boldsymbol{E}_{m1+}\exp[ik_1x]+\boldsymbol{E}_{m1-}\exp[-ik_1x],\ 0\le x\le d_1\\ \boldsymbol{E}_{m2+}\exp[ik_2x]+\boldsymbol{E}_{m2-}\exp[-ik_2x],\ d_1\le x\le \Lambda\end{cases}$$

Блоховская амплитуда

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\exp[-ik_x x]=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}_{m1+}\exp[ik_1x]+\boldsymbol{E}_{m1-}\exp[-ik_1x],\ 0\le x\le d_1\\ \boldsymbol{E}_{m2+}\exp[ik_2x]+\boldsymbol{E}_{m2-}\exp[-ik_2x],\ d_1\le x\le \Lambda\end{Bmatrix}\exp[-ik_x x]$$

Слоистые периодические среды

Граничные условия

$$\boldsymbol{E}_1(d_1) = \boldsymbol{E}_2(d_1)$$

$$\left.\frac{d\boldsymbol{E}_1(x)}{dx}\right|_{x=d_1} = \left.\frac{d\boldsymbol{E}_2(x)}{dx}\right|_{x=d_1}$$

Следует из непрерывности тангенциальных компонент магнитной напряженности

Периодичность амплитуды Блоховской волны

$$\boldsymbol{E}_1(0) = \boldsymbol{E}_2(\Lambda)\exp[-ik_x\Lambda]$$

$$\left.\frac{d\boldsymbol{E}_1(x)}{dx}\right|_{x=0} - ik_x\boldsymbol{E}_1(0) = \left(\left.\frac{d\boldsymbol{E}(x)_2}{dx}\right|_{x=\Lambda} - ik_x\boldsymbol{E}_2(\Lambda)\right)\exp[-ik_x\Lambda]$$

Слоистые периодические среды

Однородная СЛАУ относительно амплитуд

$$\begin{cases}
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_{m1+}\exp[ik_1 d_1]+\boldsymbol{E}_{m1-}\exp[-ik_1 d_1]-\\
&-\boldsymbol{E}_{m2+}\exp[ik_2 d_1]-\boldsymbol{E}_{m2-}\exp[-ik_2 d_1]=0\\
&\boldsymbol{E}_{m1+}\exp[ik_x\Lambda]+\boldsymbol{E}_{m1-}\exp[ik_x\Lambda]-\\
&-\boldsymbol{E}_{m2+}\exp[ik_2\Lambda]-\boldsymbol{E}_{m2-}\exp[-ik_2\Lambda]=0\\
&\boldsymbol{E}_{m1+}ik_1\exp[ik_1 d_1]-\boldsymbol{E}_{m1-}ik_1\exp[-ik_1 d_1]-\\
&-\boldsymbol{E}_{m2+}ik_2\exp[ik_2 d_1]+\boldsymbol{E}_{m2-}ik_2\exp[-ik_2 d_1]=0\\
&\boldsymbol{E}_{m1+}i(k_1-k_x)\exp[ik_x\Lambda]-\boldsymbol{E}_{m1-}i(k_1+k_x)\exp[ik_x\Lambda]-\\
&-\boldsymbol{E}_{m2+}i(k_2-k_x)\exp[ik_2\Lambda]+\boldsymbol{E}_{m2-}i(k_2+k_x)\exp[-ik_2\Lambda]=0
\end{aligned}
\end{cases}$$

Слоистые периодические среды

Для того чтобы эта система имела не тривиальное решение ее определитель должен быть равен нулю. Выполнение этого условия возможно при следующих значениях квазиволнового числа

$$k_{x1,2} = \pm k_x =$$

$$= \pm \frac{1}{\Lambda} \arccos\left[\cos(k_1 d_1)\cos(k_2 d_2) - \frac{\left(k_1{}^2 + k_2{}^2\right) d_1 d_2}{2} \operatorname{sinc}(k_1 d_1)\operatorname{sinc}(k_2 d_2) \right]$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$

После расчета квазиволновых чисел можно решить систему (для каждого $k_{x1,2}$) относительно неизвестных векторных амплитуд. Тем самым мы определим векторные амплитуды Блоховских волн, которые можно описать выражением

Слоистые периодические среды

$$\boldsymbol{E}_{1,2}^{m}(x)=\exp[\pm ik_x x]\begin{cases}\boldsymbol{E}_{m1+}\exp[ik_1 x]+\boldsymbol{E}_{m1-}\exp[-ik_1 x], 0\le x\le d_1\\ \boldsymbol{E}_{m2+}\exp[ik_2 x]+\boldsymbol{E}_{m2-}\exp[-ik_2 x], d_1\le x\le \Lambda\end{cases}$$

Блоховская волна в слоистой периодической среде

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{1,2}(j\Lambda+x,t)=\boldsymbol{E}_{1,2}^{m}(x)\exp[i(\omega t\pm k_x\{j\Lambda+x\})]$$

Световое поле $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\Sigma}(t,x)$ распространяющееся в рассматриваемой среде в результате падения на нее плоской световой волны можно представить в виде суперпозиции Блоховских волн

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\Sigma}(t,x)=$$
$$=C_1\boldsymbol{E}_1^m(x)\exp[i(\omega t+k_x\{j\Lambda+x\})]+C_2\boldsymbol{E}_2^m(x)\exp[i(\omega t-k_x\{j\Lambda+x\})]$$

где константы $C_{1,2}$ определяются из условий конечности энергии светового поля и граничных условий.

Слоистые периодические среды

Очевидно условия конечности вступают в силу при отличии от нуля мнимой части квазиволнового числа, так как в этом случае амплитуда одной из Блоховских волн (например, с индексом 2) неограниченно растет при распространении вглубь среды. В этом случае коэффициент при этой волне должен быть равен нулю. Вторая волна будет быстро затухать при распространении вглубь среды. Поэтому основная энергия светового поля, в силу граничных условий

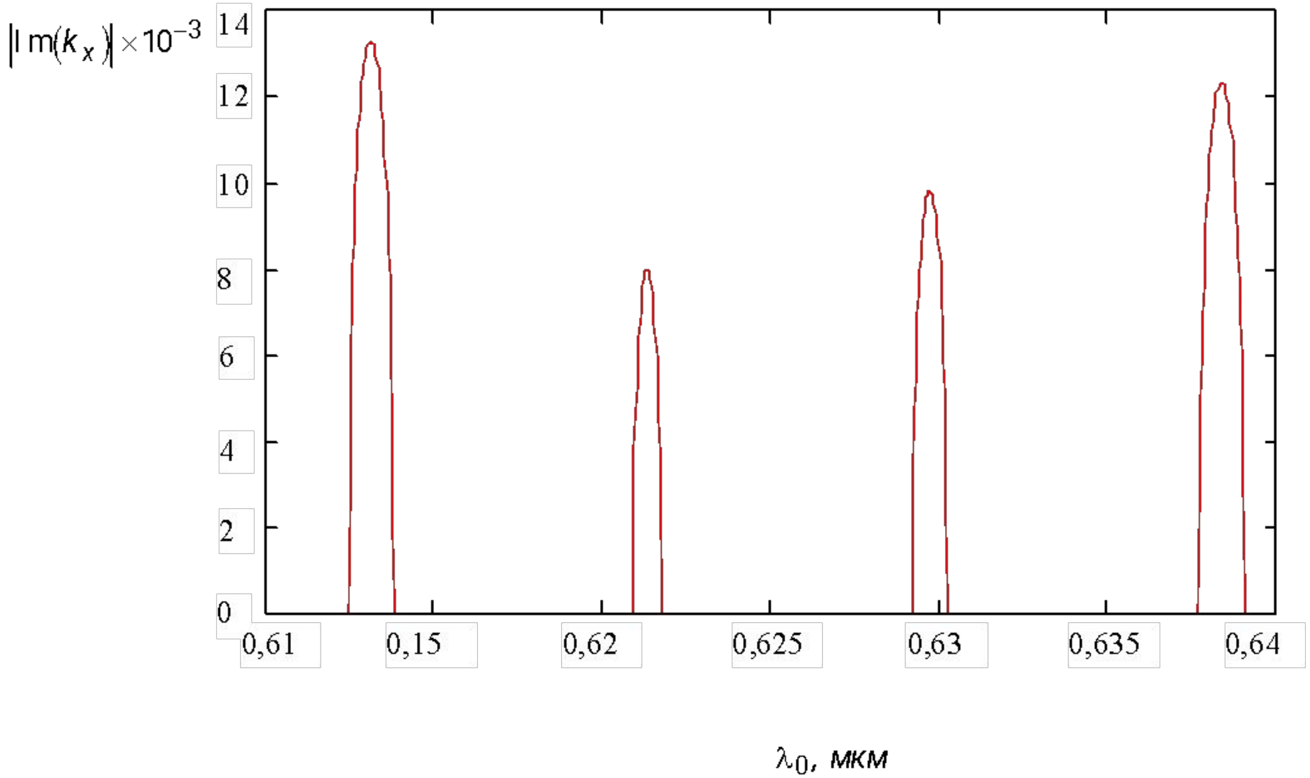
$$\boldsymbol{E}^{m}_{\text{ïàä}}(0)=C_1\boldsymbol{E}_1^{m}(0)+\boldsymbol{E}^{m}_{\text{îòð}}(0),$$

будет сосредоточена в отраженной волне. Область параметров в которой наблюдается такой эффект называется запрещенной зоной для света в данной слоистой среде.

$$\left|\cos(k_1 d_1)\cos(k_2 d_2)-\frac{\left(k_1{}^2+k_2{}^2\right)d_1 d_2}{2}\operatorname{sinc}(k_1 d_1)\operatorname{sinc}(k_2 d_2)\right|>1$$

Слоистые периодические среды

Эффект запрещенной зоны для света в слоистой среде можно использовать для частотной фильтрации световых волн путем их отражения от границы слоистой среды



Зависимость абсолютной величины мнимой части квазиволнового числа от длины волны света падающего на слоистую среду стекло-воздух с периодом $\Lambda = 20$ мкм и одинаковой толщиной слоев.