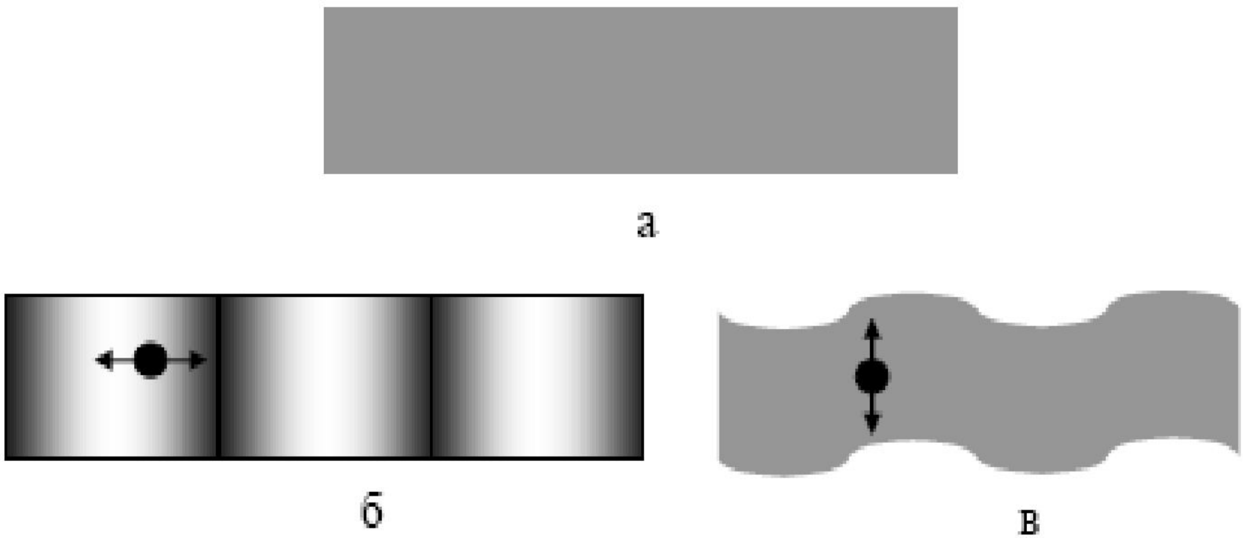
Акустические волны в неограниченной среде

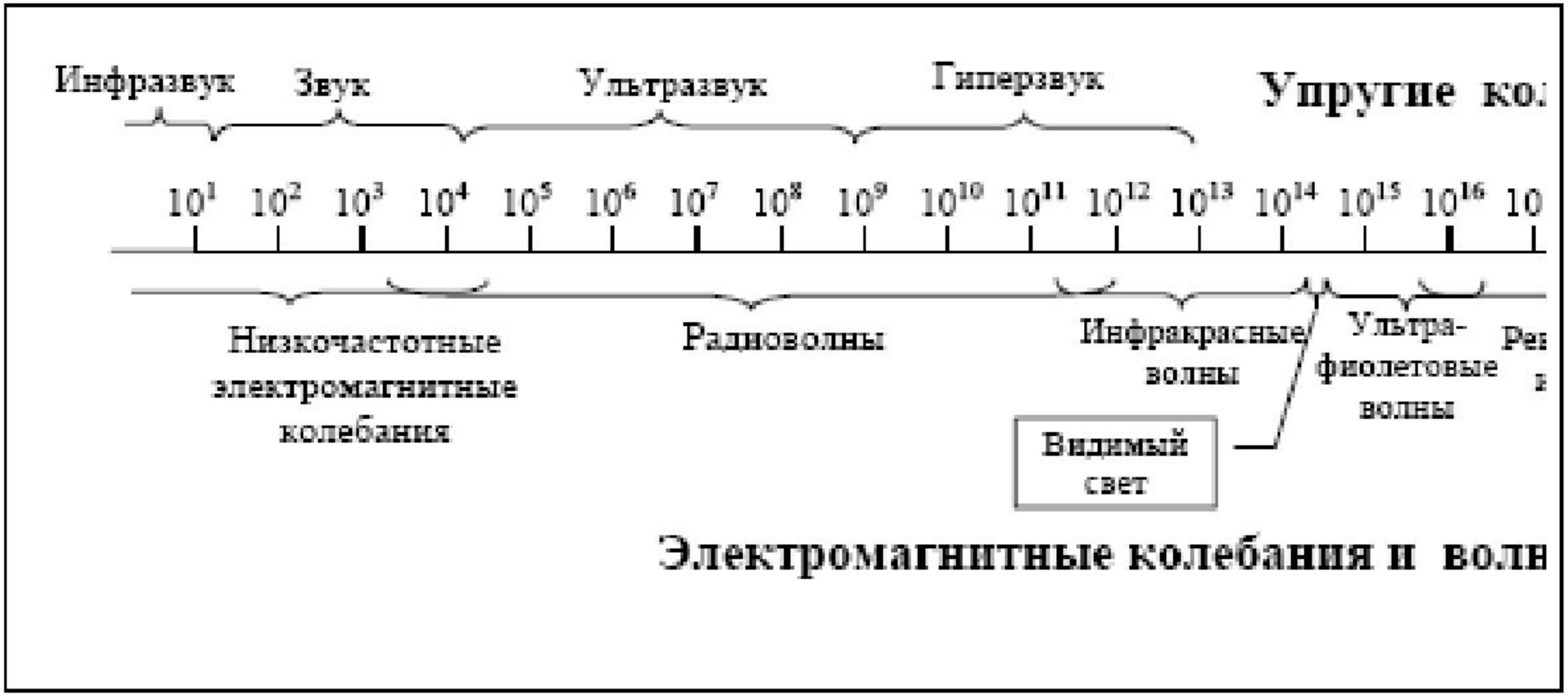
Продольные и поперечные упругие волны



Невозмущенная среда (а), среда с продольной упругой волной (б), среда со сдвиговой упругой волной (в)

Акустические волны в неограниченной среде

Шкала упругих и электромагнитных волн



Распределение упругих и электромагнитных волн по частоте

Акустические волны в неограниченной среде

Давление и плотность в упругой волне

$$p = p_0 + p_a,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_a,$$

где p_0, ρ_0 – постоянные равновесные давления и плотность (в отсутствие волны);

p, ρ – мгновенные давление и плотность, которые в моменты сжатия среды больше p_0, ρ_0, в моменты разряжения меньше p_0, ρ_0;

p_a, ρ_a – переменные давление и плотность самой акустической волны. Полагаем, что амплитуда возмущений мала и выполняется условие

$$p_a << p_0, \ \rho_a << \rho_0.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Порог слышимости, болевой порог

$$f = 1 \text{ кГц}$$

$$p_{am} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \quad \left(1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right)$$

$$p_{am} = 300 \text{ Па}.$$

Колебательная скорость точки среды

$$v = \frac{du}{dt}$$

$f = 1 \text{ кГц}$ $\qquad v_m = 73 \dfrac{см}{с}, \qquad u_m = 0{,}01 \text{ см}.$

Акустические волны в неограниченной среде

Число Маха

$$M_{\text{ак}} = \frac{v_m}{V_a}$$

где V_a – скорость акустической волны. Скорость продольной акустической волны будем обозначать как V_l. Акустическое число Маха всегда меньше единицы. При скорости звука в воздухе $V_l = 342$ м/с при температуре 18°C и колебательной скорости $v_m = 73\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$ имеем $M_{\text{ак}} \approx 0{,}021$, т.е. малую величину даже при таком сильном звуке.

Давление *p*, плотность ρ, колебательная скорость ν, изменяясь в пространстве и времени, полностью определяют волновой процесс в упругих жидких и газообразных средах

Акустические волны в неограниченной среде

Уравнения акустического поля

Уравнение движения частиц сплошной среды – второй закон Ньютона для элемента упругой деформированной среды:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p_a = 0 .$$

Уравнение непрерывности – закон сохранения массы вещества

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 .$$

Уравнение состояния – закон упругости Гука при малых деформациях

$$p_a = K\frac{\rho_a}{\rho_0} ,$$

где $K\left[\frac{\text{н}}{\text{м}^2}\right]$ – модуль объемной упругости (иногда его называют модулем всестороннего сжатия)

Акустические волны в неограниченной среде

Другая форма закона Гука

$$p_a = K\frac{\rho_a}{\rho_0}$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_0} = S$$

$$p_a \to T$$

$$T = aS$$

Акустические волны в неограниченной среде

Волновое уравнение Даламбера. Скорость продольной акустической волны

Продифференцируем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Из закона Гука

$$\rho_a = \frac{\rho_0}{K} p_a$$

Из уравнения движения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p_a$$

Волновое уравнение для давления.

$$\nabla^2 p_a - \frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0$$

$$V_l = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

Акустические волны в неограниченной среде

Волновое уравнение для колебательной скорости и плотности.

$$\nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{V_l^2}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \rho_a - \frac{1}{V_l^2}\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} = 0$$

Скорость продольной волны не зависит от частоты.
Поэтому продольные волны не обладают дисперсией.

Акустические волны в неограниченной среде

Скорость волны в твердом теле.

При выводе волновых уравнений было получено выражение для расчета скорости распространения продольной акустической волны, зависящей от коэффициента объемной упругости и удельной плотности среды:

$$V_l = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}.$$

Это выражение остается справедливым и для расчета скорости продольной волны в твердой среде. Например, при температуре t = 0°C в воздухе (модуль объемной упругости $K = 1{,}4 \cdot 10^5$ Па, удельная плотность $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3) скорость звука V_l = 331,2 м/с; в воде ($K = 2{,}25 \cdot 10^9$ Па, $\rho_0 = 1000$ кг/м^3) скорость звука V_l = 1500 м/с; а в сапфире ($K = 4{,}92 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 3990$ кг/м^3) скорость звука гораздо выше - V_l = 11,1 км/с.

Акустические волны в неограниченной среде

Скорость волны в жидкой среде.

В жидких средах можно использовать формулу расчета скорости акустических волн через коэффициент сжимаемости жидкости χ, $\left[\frac{\text{м}^2}{\text{н}}\right]$, являющегося величиной обратной к коэффициенту объемной упругости K:

$$V_l = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho_0}}.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Скорость волны в газообразной среде.

В газообразных средах фазовую скорость продольной акустической волны можно рассчитать по формуле

$$V_l = \sqrt{\gamma R T},$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты – отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме; $R = c_p - c_v$ – газовая постоянная, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right]$; T – температура среды в кельвинах.

С учетом того, что плотность газа ρ_0 зависит от давления p_0 и температуры T

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T},$$

$$V_l = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Скорость волны в воздухе.

Для воздуха при температуре $T = 273$ К ($t = 0°C$) показатель адиабаты $\gamma = 1,4$, газовая постоянная $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, скорость звука $V_l = 331,2$ м/с.

При любой другой температуре $t^o C$, если $|t| << 273^o C$, скорость акустической волны может быть определена с помощью соотношения

$$\frac{V_l}{331,2} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\gamma R \cdot 273}} = \sqrt{\frac{273 + t}{273}} = \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{t}{273},$$

или

$$V_l = 331,2 + 0,6t, \quad \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

При увеличении температуры на $1°C$ скорость звука в воздухе увеличивается на 0,6 м/с.

Акустические волны в неограниченной среде

Плоские звуковые волны

$$p_a = p_{am} \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$\nu_a = \nu_{am} \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$\rho_a = \rho_{am} \exp[i(\omega t - kz)]$$

где $k = \frac{\omega}{V_l}$ – постоянная распространения (волновое число)

$$u_z = -i \frac{\nu_{zm}}{\omega} \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$u_{zm} = \frac{\nu_{zm}}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \nu_{zm} = \omega u_{zm}$$

Акустические волны в неограниченной среде

Акустический импеданс

$$z_a = \frac{p_a}{v}, \quad \left[\frac{\text{Давление}}{\text{Скорость}}\right] = \left[\frac{\text{н}/\text{м}^2}{\text{м}/\text{с}}\right] = \left[\frac{\text{н}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}\right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}\right]$$

Из уравнения движения частиц в случае плоской волны

$$p_{am} = \frac{\rho_0 v_m \omega}{k} = (\rho_0 V_l) v_m \qquad z_a = \frac{p_{am}}{v_m} = \rho_0 V_l$$

В случае сферической волны

$$|\dot{z}_a| = \rho_0 V_l \cos\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{kr}$$

В случае цилиндрической волны волны

$$|\dot{z}_a| = \rho_0 V_l \cos\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2kr}.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Связь параметров акустических волн и волн напряжения и тока в линии

Для акустических волн	Для волн напряжения и тока
$\frac{\partial \dot{p}_a(z)}{\partial z} = j\omega\rho_0\dot{v}(z)$	$\frac{d\dot{U}(z)}{dz} = -j\omega L\dot{I}(z)$
$\frac{\partial \dot{v}(z)}{\partial z} = j\omega\frac{\dot{p}_a}{K}$	$\frac{d\dot{I}(z)}{dz} = -j\omega C\dot{U}(z)$
$k = \omega\sqrt{\frac{\rho_0}{K}}$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$
$Z_a = \sqrt{\rho_0 K}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Акустические волны в неограниченной среде

Баланс энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho_0\left|\vec{v}\right|^2}{2}+\frac{{p_a}^2}{2\rho_0 V_l^2}\right]+\operatorname{div}\left(p_a\vec{v}\right)=0 \; .$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой энергию акустической волны в единице объема среды, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\right]$:

$$w=\frac{1}{2}\rho_0\left|\vec{v}\right|^2+\frac{1}{2}\frac{{p_a}^2}{\rho_0 V_l^2},$$

$$w_n=\frac{1}{2}\frac{p_a^2}{\rho_0 V_l^2}, \qquad w_\kappa=\frac{1}{2}\rho_0\left|\vec{v}\right|^2 \qquad \vec{J}=p_a\vec{v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{J}=0$$

Акустические волны в неограниченной среде

Интенсивность и мощность звука

Модуль вектора Умова-Пойнтинга, Вт/м^2:

$$J = \left|\vec{J}\right| = p_a \left|\vec{v}\right| = p_a v.$$

Средняя за период интенсивность звука может быть вычислена следующим образом:

$$J_{cp} = \frac{1}{4}\int_0^T p_a v\, dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{p}_a v^*\right).$$

Мощность, переносимая акустической волной через поверхность S, охватывающую выделенный объем среды, равна

$$P = \int_S J_{\text{ср}} dS.$$

$$J_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\frac{p_{am}^2(r)}{\left|\dot{Z}_a\right|}\cos\varphi.$$

$$J_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\frac{p_{am}{}^2}{\rho_0 V_l} = \frac{1}{2} v_m{}^2 \rho_0 V_l$$

Акустические волны в неограниченной среде

Уровень интенсивности звука

В акустике звуковых колебаний принято говорить об уровне интенсивности звука, дБ, и характеризовать его как

$$L = 10\lg\frac{J}{J_{cm}}$$

относительно стандартного нулевого уровня с интенсивностью $J_{cm} = 10^{-12}\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Величина J_{cm} получена на частоте $f = 1\,\text{кГц}$ для самых слабых звуков (порог слышимости человеческого уха) при акустическом давлении $p_{am} = 2\cdot10^{-5}\,\text{Па}$ и акустическом сопротивлении воздуха $Z_a = \rho_0 V_l = 420\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

В случае нескольких источников звука равной интенсивности L полный уровень интенсивности равен, дБ:

$$L_\Sigma = L + 10\lg n\,.$$

Относительный уровень интенсивности, дБ, в логарифмическом масштабе рассчитывается по формуле

$$\Delta L = L_1 - L_2 = 10\lg\frac{J_1}{J_2}.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Для оценки качества экранировки звукового потока слоем материала вводится понятие коэффициента звукоизоляции. Коэффициентом звукоизоляции называется разность уровней интенсивности звука до и после прохождения звукоизоляционного материала. Коэффициент звукоизоляции, дБ:

$$D = 10\lg\frac{J_1}{J_2}.$$

Численные значения коэффициента звукоизоляции некоторых строительных материалов

Вид материала	Толщина, см	D, дБ
Кирпичная стена, оштукатуренная в 1/4 кирпича	9	42
Кирпичная стена, оштукатуренная в 1/2 кирпича	15	44
Бетонная плита	16	48
Толстое стекло	0,6	29
Одинарное окно		15
Двойное окно		30
Одинарная дверь		до 20
Двойная дверь		40

Акустические волны в неограниченной среде

Акустические потери

обусловлены вязкостью и теплопроводностью

Уравнение движения частиц в этом случае

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + V_l^2 \operatorname{grad} \rho_a - b \nabla^2 \vec{v} = 0 \qquad (2.42)$$

Здесь b – эффективный коэффициент вязкости:

$$b = \frac{4}{3}\eta + \eta' + x\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right),$$

где η – коэффициент сдвиговой (поперечной) вязкости, $[\text{Па} \cdot \text{с}]$;

η' – коэффициент объемной вязкости, $[\text{Па} \cdot \text{с}]$;

x – коэффициент теплопроводности, Вт/(м$\cdot K$);

c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, Дж/(кг K);

c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении,

Волновое уравнение с учетом вязкости и теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - V_l^2 \nabla^2 \vec{v} - \frac{b}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \vec{v} = 0$$

Акустические волны в неограниченной среде

Плоская волна в вязкой среде

$$\nu_a = \nu_{am} \exp\left[i\left(\omega t - \dot{k} z\right)\right]$$

$$\dot{k}^2 = \frac{\omega^2}{V_l^2 + i\,\dfrac{\omega b}{\rho_0}}.$$

При условии, что если $\dfrac{b\,\omega}{\rho_0 V_l^2} \ll 1$, что соответствует малому затуханию звука на расстоянии порядка длины волны, комплексное волновое число

$$\dot{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{V_l^2}\left[1 - i\,\frac{\omega b}{\rho_0 V_l^2}\right]} \cong \frac{\omega}{V_l}\left(1 - i\,\frac{1}{2}\,\frac{\omega b}{\rho_0 V_l^2}\right) = k - i\,\alpha.$$

$$k = \frac{\omega}{V_l}, \qquad \alpha = \frac{b\,\omega^2}{2\,\rho_0 V_l^3} = \frac{\omega^2}{2\,\rho_0 V_l^3}\left[\frac{4}{3}\eta + \eta' + x\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \qquad \alpha = \frac{2\,\omega^2\,\eta}{3\,\rho_0 V_l^3}.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Поглощение удобно характеризовать коэффициентом затухания, имеющим размерность децибел на метр (дБ/м):

$$\alpha\ (\text{дБ/м}) = 20\lg e\,\alpha\ (1/\text{м}) = 8{,}686\cdot\alpha\ (1/\text{м}).$$

В среде с потерями амплитуда колебательной скорости уменьшается с расстоянием по экспоненциальному закону. Для плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси z,

$$\dot{v} = v_m e^{-jkz} = v_m e^{-\alpha z} e^{-jkz}.$$

Плотность потока энергии акустической волны также уменьшается за счет перехода части ее в тепловую энергию

$$J = J_0 e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} v_m^2 e^{-2\alpha z} \rho_0 V_l.$$

Акустические волны в неограниченной среде

Потери, связанные с расходимостью

Для сферических и цилиндрических волн потери связаны еще и с их геометрической расходимостью. Возьмем отношение акустических давлений на разных расстояниях r_1 и r_2 с учетом поглощения

$$\frac{p_{a2}}{p_{a1}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n e^{-\alpha r},$$

где $n = 1/2$ – для цилиндрической волны;

$n = 1$ – для сферической волны;

Вычислим изменение уровня интенсивности, дБ:

$$L = 20\lg\left(\frac{p_{a2}}{p_{a1}}\right) = \left(20\,n\lg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - r\,\alpha\right).$$

Акустические волны в неограниченной среде

Потери, связанные с рассеянием

Рэлеевское рассеяние

$$J_{\text{рас}} = J_{\text{пад}} \frac{\omega^4 a^6}{9 V_l^4 r^2} \left(1 + \frac{3}{2}\cos\alpha\right)^2$$

где a – радиус сферы; r – расстояние от центра сферы до точки наблюдения; α – угол между направлением в точку наблюдения и прямой, соединяющей удаленный источник облучения и сферу Сле-

Спасибо за внимание!