ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 3

ДИНАМИКА

(Динамика точки)

Литература

<u>Учебники</u>

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть 2.
3. Цывильский В.Л. Теоретическая механика.
4. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Часть 2.
   Учебники других авторов.

<u>Задачники</u>

1. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.
2. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Часть 2.

<u>Пособия</u>

Теоретическая механика. Ч3 (1) – Динамика точки. Методические указания по выполнению расчетно - графических работ для студентов дневной формы обучения специальности АДиА

1. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Кинематика – учение о движении → **<u>Д И Н А М И К А</u>** ← **Статика – учение о силах** + **инертность тел**

<u>Силы</u>

- **постоянные**
- **переменные**
  - **зависят от времени** $\vec{F} = \vec{F}(t)$
  - **зависят от положения тела** $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
  - **зависят от скорости** $\vec{F} = \vec{F}(\vec{V})$
  - **активные (заданные) силы**
  - **реакции связей (реактивные) силы**

<u>Для переменных сил справедливы все положения статики.</u>

Инертность тела

Понятие инертности. Инертность тела проявляется в том, что оно сохраняет свое движение при отсутствии действующих сил, а когда на него начинает действовать сила, то скорости точек тела изменяются не мгновенно, а постепенно и тем медленнее, чем больше инертность этого тела.

Мера инертности. Количественной мерой инертности материального тела является физическая величина, называемая *массой* тела.

Свойства массы в классической механике. В классической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

Материальная точка

Опр. **Материальная точка – это точка, обладающая массой.**

Условие принятия материального тела в качестве материальной точки

Материальное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда по условиям задачи допустимо не принимать во внимание вращательную часть движения тела.

ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

<u>Первый закон (закон инерции)</u>

Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

1638 г. - Галилей

Аристотель – движение тел происходит только под действием сил

Галилей – движение тел может происходить по инерции

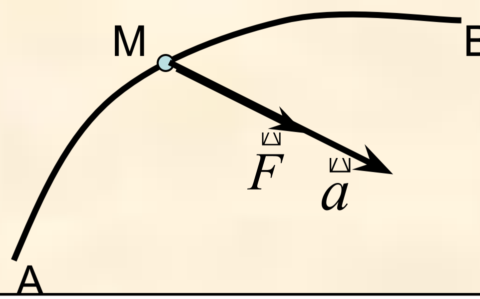
<u>Понятие инерциальных систем отсчета</u>

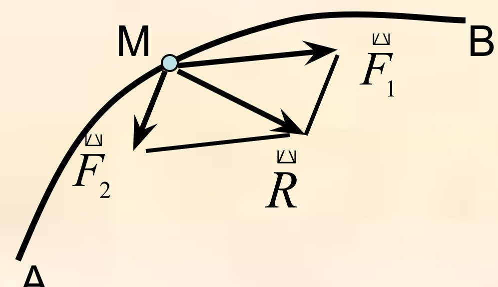
Система отсчета, в которой справедлив закон инерции, называется инерциальной.

Второй закон (основной закон динамики)

Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

Математически закон выражается равенством $m\vec{a} = \vec{F}$.





В случае двух сил $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

При действии *n* сил, с учетом того, что $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$, **основной закон динамики имеет вид** $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$.

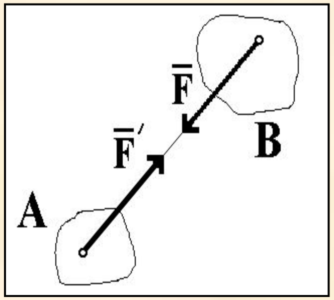
Для несвободной материальной точки закон имеет вид

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k$, **где** $\sum \vec{R}_k$ – **сумма реакций связей.**

Третий закон
(закон равенства действия и противодействия)

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

Закон использовался в статике в виде аксиомы действия и противодействия.



Задачи динамики точки

Для свободной материальной точки.

1 задача. Зная закон движения точки, определить действующую на нее силу;

2 задача. Зная действующие на точку силы, определить закон движения точки *(основная задача динамики)*.

Для несвободной материальной точки

1 задача динамики обычно состоит в том, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию;

2 (основная) задача динамики распадается на две и состоит в том, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить: а) закон движения точки, б) реакцию наложенной связи.

Системы единиц

В механике возможно введение двух принципиально отличных друг от друга систем единиц.

Системы типа СИ

В основе единицы: длины, времени и массы.

Основные единицы:
метр (м), секунда (с) килограмм массы (кг).

Производная единица – сила
1 Н = 1кг м/с^2.

Система МКГСС

В основе единицы: длины, времени и силы.

Основные единицы:
метр (м), секунда (с), килограмм силы (кГ).

Производная единица – масса 1 кг = 1кГ с^2/ м.

Соотношение между единицами силы с системах СИ и МКГСС 1 кГ = 9,81 Н или 1 Н = 0,102кГ.

Основные виды сил

Сила тяжести
$P = m g$

Постоянная сила, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности.

Сила трения
$F = f N$

Сила трения скольжения, действующая на движущееся тело.

Сила упругости
$F = c \lambda$

Значение силы упругости определяется из закона Гука, согласно которому напряжение пропорционально деформации.

Сила вязкого трения
$F = \mu v$

Сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде.

Другие силы: сила тяготения, сила аэродинамического сопротивления и т.д.

Решение задачи динамики точки

1 задача	2 задача
Дано: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$	Дано: сила (силы)
Определить силу	Определить $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТОЧКИ.

2.1.Уравнения в декартовых координатах

Второй закон динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k .$

В проекциях на оси декартовых координат *x, y, z*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz},$$

или

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \qquad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \qquad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$$

Это дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

Правые части могут функциями переменных *t, x, y, z,* $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

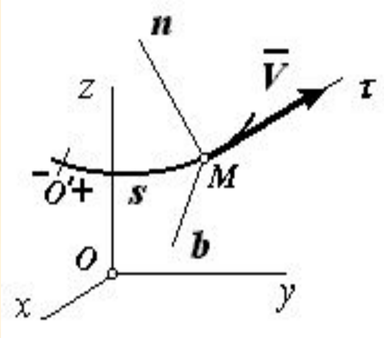
2.2. Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника.

Оси естественного трехгранника ***M τn b*** **:**

M τ - касательная;

M n – главная нормаль;

M b – бинормаль.



Второй закон динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k .$

В проекциях на оси естественного трехгранника ***M τn b*** **:**

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}.$$

Здесь учтено, что $a_\tau = dV/dt, \ a_n = V^2/\rho, \ a_b = 0.$

Это дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника.

2.3. Решение первой задачи динамики точки.

Пусть задано ускорение точки $\vec{a}$.

Действующая сила находятся из уравнения. ⟹ $m\vec{a} = \vec{F}$.

⟹ $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \vec{R}$.

Реакция связи - из уравнения, ⟹ $\vec{R} = m\vec{a} - \sum \vec{F}_k$.

дополнительно необходимо знать активные силы $\vec{F}_k$.

Известны уравнения движения точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Силы находятся из дифференциальных уравнений движения точки.

⟹ $\sum F_{kx} = m\ddot{x}$,

⟹ $\sum F_{ky} = m\ddot{y}$,

⟹ $\sum F_{kz} = m\ddot{z}$.

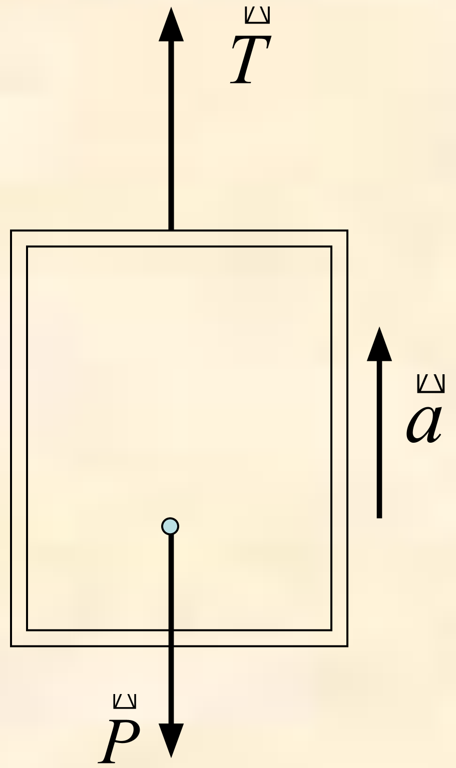
2.4. Пример решение первой задачи динамики точки.

Задача. **Лифт весом *P* начинает подниматься с ускорением *a*.**

Определить натяжение троса *T*.

Решение.

Второй закон динамики для данной задачи имеет вид $P/g\ \vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$.



В проекции на вертикаль получим

$$P/g \cdot a = T - P.$$

Или $\boldsymbol{T} = P(1 + a/g)$.

Если лифт опускается с тем же ускорением, то $\boldsymbol{T} = P(1 - a/g)$.

2.5. Решение второй (основной) задачи динамики точки.

А) Решение второй задачи при прямолинейном движении точки

Дифуравнение движение точки одно $\Rightarrow$ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$.

Уравнение можно записать в виде $m\dfrac{dV_x}{dt} = \sum F_{kx}$, **где** $V_x = \dfrac{dx}{dt}$.

С математической точки зрения в виде $m\ddot{x} = F(t,\ x,\ \dot{x})$.

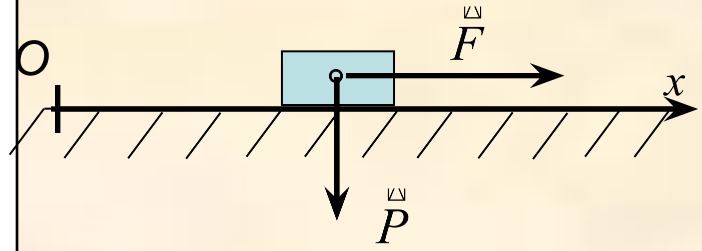
Общее решение дифуравнения – $x = f(t, C_1, C_2)$, **где** C_1 **и** C_2 **– постоянные интегрирования. Находятся из *начальных условий*.**

При прямолинейном движении *начальные условия* имеют вид:
при $t = 0$ $x = x_0$ $V_x = V_0$.

После нахождения C_1 **и** C_2 ***частное решение*** **уравнения будет иметь вид** $x = f(t, x_0, V_0)$.

В) Пример и алгоритм решения основной задачи динамики при прямолинейном движении точки.

Задача. Груз весом P начинает двигаться из состояния покоя вдоль гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$, значение которой растет по закону $F = k\,t$.



Определить закон движения груза.

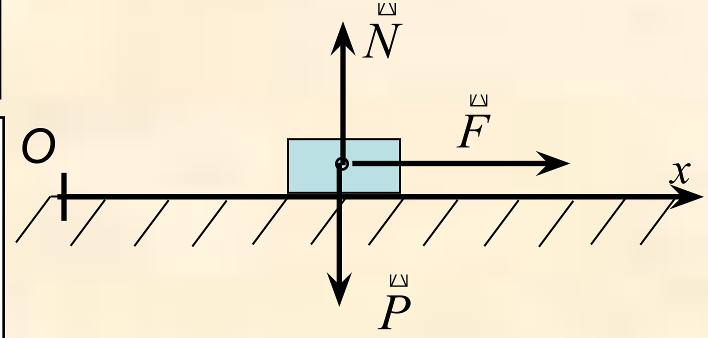
Решение. (Действуем по следующему алгоритму)

1. Выберем начало отчета, совместив его с начальным положением точки.

2. Проведем координатную ось, направленную в сторону движения.

3. Изобразим точку (груз) в произвольном положении.

4. **Приложим к точке все действующие на нее силы.**



5. **Запишем основное уравнение динамики применительно к данной задаче в векторном виде**

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N}.$$

6. **Спроектируем векторное равенство на координатную ось** Ox $\quad m\ddot{x} = F$ **или** $m\ddot{x} = kt.$

7. **Преобразуем дифференциальное уравнение к виду, удобному для интегрирования:** $P/g\,\ddot{x} = k\,t$ **или** $\dfrac{P}{g}\dfrac{dV_x}{dt} = k\,t.$

8. **Запишем начальные условия: при t = 0** $x_0 = 0$ $V_{x0} = 0$ **.**

9. **Проинтегрируем дифференциальное уравнение и определим постоянные интегрирования.**

Умножая дифуравнение на *dt* и интегрируя, получим

$$\int P / g\, dV = \int k\, t\, dt.$$

Вычисляя неопределенные интегралы слева и справа, найдем

$$P / g\, V_x = k \cdot t^2 / 2 + C_1. \qquad (*)$$

Подставляя в равенство (*) первое из начальных условий, запишем

$$P / g \cdot 0 = k \cdot 0^2 / 2 + C_1.$$

Откуда следует, что $C_1 = 0$.

Тогда выражение (*) представится в виде

$$P / g \cdot V_x = k \cdot t^2 / 2\,. \qquad (**)$$

Интегрируя уравнение (**), получим $(P/g) \cdot x = k \cdot t^3 / 6 + C_2$.

Из начальных условий найдем, что $C_2 = 0$,

Тогда искомое уравнение движения будет иметь вид

$$(P / g) \cdot x = (kg / 6 \cdot P) \cdot t^3 / 6.$$