ДИНАМИКА механической системы и твердого тела.

Общие теоремы динамики системы.

Теорема об изменении кинетического момента.

ВОПРОСЫ ТЕМЫ

- **Главный момент количеств движения системы.**
- **Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов).**
- **Закон сохранения главного момента количеств движения системы.**
- **Пример на применение теоремы моментов.**

ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ.

Опр. **Главным моментом количеств движения (кинетическим моментом) системы относительно данного центра О называется величина $\vec{K}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движений всех точек системы относительно этого центра:**

$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_k \vec{V}_k). \tag{1}$$

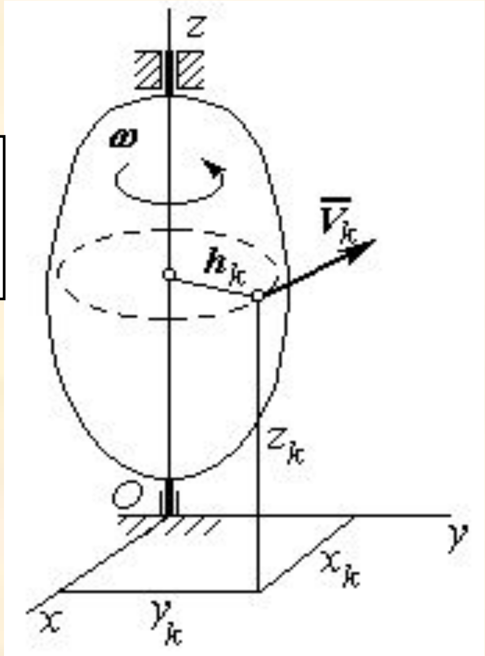
Относительно координатных осей:

$$K_x = \sum m_x(m_k \vec{V}_k), \quad K_y = \sum m_y(m_k \vec{V}_k), \quad K_z = \sum m_z(m_k \vec{V}_k). \tag{2}$$

K_x, K_y, K_z **представляют собой одновременно проекции вектора $\vec{K}_0$ на координатные оси.**

Физический смысл. Главный момент количеств движения (кинетический момент) системы является мерой механического движения при ее вращательном движении.

Кинетический момент вращающегося тела.



У любой точки тела, отстающей от оси вращения на расстоянии h_k, скорость $V_k = \omega h_k$.

Тогда для системы

$$K_z = \sum m_z(m_k \vec{V}_k) = (\sum m_k h_k^2)\omega.$$

Окончательно находим

$$K_z = J_z\omega.$$

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то $K_z = J_{1z}\omega_1 + J_{2z}\omega_2 + \ldots + J_{nz}\omega_n$.

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов).

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой точки системы.

$$\frac{d}{dt}[\vec{m}_o(m_k\vec{V}_k)] = \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_O(\vec{F}_k^i),$$

где $\vec{m}_O(\vec{F}_k^e)$ *и* $\vec{m}_O(\vec{F}_k^i)$ – **моменты равнодействующих всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.**

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим

$$\frac{d}{dt}[\sum \vec{m}_o(m_k\vec{V}_k)] = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i). \qquad (1)$$

По второму свойству внутренних сил $\sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^i) = 0.$

Тогда вместо выражения (1) , получим

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e). \qquad (2)$$

<u>Теорема.</u> Производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства (2) на оси *Oxyz*, найдем

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\vec{F}_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e). \qquad (3)$$

Уравнения (3) выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

Закон сохранения главного момента количества движения.

1. Пусть сумма моментов относительно некоторого центра действующих на систему внешних сил равна нулю, тогда

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0 \quad и \quad \vec{K}_0 = const.$$

Вывод 1. Если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения относительно этого центра численно и по направлению постоянен.

2. Пусть сумма моментов относительно некоторой неподвижной оси *Oz* действующих на систему внешних сил равна нулю, тогда из уравнений (3) следует, что

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0 \quad и \quad K_Z = const.$$

<u>Вывод 2.</u> Если сумма моментов относительно какой-нибудь оси всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

<u>Выводы 1 и 2</u> выражают закон сохранения главного момента количеств движения системы.

Случай вращающейся системы.

Пусть система вращается вокруг оси *Oz*. Тогда $K_z = J_z\,\omega$ **.**

Если $\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0,\ \text{то}\ J_Z\,\omega = const.$

а). Если система неизменяемая, то $J_Z = \mathrm{const}$ **и** $\omega = const.$

б). Если система изменяемая, то $J_{Z1}\,\omega_1 = J_{Z2}\,\omega_2$ **, то есть при увеличении момента инерции** ω **системы будет уменьшаться, при уменьшении момента инерции – увеличиваться.**