§2. Эллипс

Эллипсом называют множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

F_1, F_2 – фокусы, причем расстояние между ними равно $2c$,

M – произвольная точка эллипса.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы F_1, F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда координаты фокусов $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Точка имеет координаты М(x,y).

По определению имеем:

$$\left|\overline{MF_1}\right| + \left|\overline{MF_2}\right| = 2a,$$

причем $2a>2c$, т.е. $a>c$.

Выведем уравнение эллипса.

Свойства эллипса (вывести самостоятельно)

1. Эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy.
2. Эллипс симметричен относительно точки $O(0,0)$ – центра эллипса.
3. Эллипс пересекает ось Ox в точках $A_1(a,0)$ и $A_2(-a,0)$; ось Oy – в точках $B_1(0,b)$ и $B_2(0,-b)$.
4. Все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a, \quad y = \pm b.$
5. Эллипс имеет вершины, большую и малую оси.

Эксцентриситет эллипса

Эксцентриситетом эллипса называют отношение полуфокусного расстояния *c* к большой полуоси *a*, т.е $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$,

причем $0 < \varepsilon < 1,$ т.к. $0<c<a$.

С учетом того, что $a^2-c^2=b^2$ получаем:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

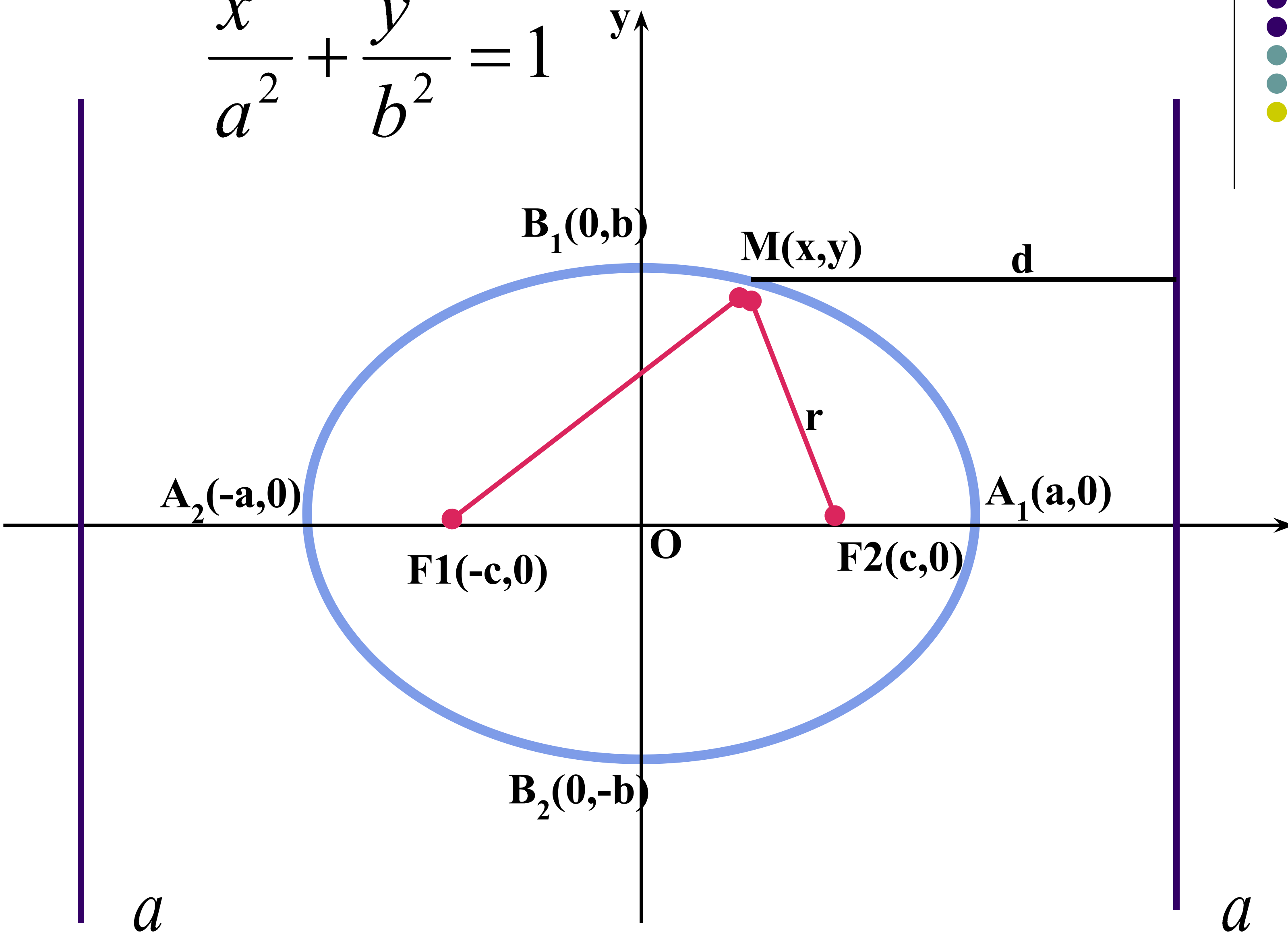
Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами** эллипса.

Теорема.

Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса, т.е.

$$\varepsilon = \frac{r}{d}.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \qquad x=\frac{a}{\varepsilon}$$