

# Физика атома, атомного ядра и элементарных частиц

4. (0). Волновые свойства  
микрочастиц. Волны де-Бройля.

# Оптико-механическая аналогия

Геометрическая  
оптика

Теоретическая  
механика

$\lambda \Rightarrow 0$

?

Волновая  
оптика

Волновая  
(квантовая)  
механика

# Оптико-механическая аналогия

Геометрическая  
оптика

Принцип наименьшего  
времени Ферма  
(Fermat P.)

$$\int_A^B \frac{ds}{v} = \min$$

Теоретическая  
механика

Принцип наименьшего  
действия Мопертюи  
(Maupertuis P.)

$$\int_A^B p ds = \min$$

Между этими двумя принципами имеется аналогия,  
если предположить, что

$$p \propto \frac{1}{v}$$

где  $v$  - фазовая скорость волны, которую далее бу-  
дем обозначать  $v_\phi$ .

# Гипотеза де-Бройля

Де-Бройль (de Broglie L.) предположил, что коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей импульс и фазовую скорость, такой же, как и для фотона, т.е. равен  $h\nu$  :

$$p = \frac{h\nu}{v_{\phi}} = \frac{h}{\lambda} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

где  $\nu$  - линейная частота.

Это же соотношение можно записать в виде

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (4.1)$$

где  $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число, равное числу длин волн, укладываемых на отрезок  $2\pi$ .

Далее, движение материальной частицы характеризуется четырехмерным вектором энергии-импульса  $\{iE/c, p_x, p_y, p_z\}$ , а плоская волна - совокупностью четырех величин  $\{i\omega/c, k_x, k_y, k_z\}$ , которые также образуют четырехвектор. Поэтому коэффициент пропорциональности между энергией и частотой, согласно гипотезе де-Бройля, также должен быть таким же, как в оптике:

$$E = \hbar \omega \quad (4.2)$$

где  $\omega$  - циклическая частота, связанная с линейной частотой соотношением  $\omega = 2\pi\nu$ .

Формулы (4.1) и (4.2) иногда называют уравнениями де Бройля.

# Волны де-Бройля

Итак, согласно гипотезе де-Бройля (1924г), микро-частицы обладают волновыми свойствами. Длина волны микрочастицы (электрона, протона, нейтрона, альфа-частицы и др.) называется **дебройлевской длиной волны** и определяется формулой де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (4.3)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $p = mv$  – импульс частицы,  $v$  - скорость частицы (не фазовая скорость).

# ФАЗОВАЯ СКОРОСТЬ

Плоская монохроматическая волна с амплитудой  $A$ , частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  может быть представлена в комплексной форме в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.4)$$

Фазовой скоростью волны называется скорость, с которой движутся точки волны с постоянной фазой. Если ось  $x$  направлена по вектору  $\mathbf{p}$ , то условие постоянства фазы

$$Et - px = \text{const.} \quad (4.5)$$

Чтобы вычислить фазовую скорость, надо продифференцировать это уравнение по времени.

Продифференцируем (4.5) по времени:  $E - p \frac{dx}{dt} = 0$

откуда  $\frac{dx}{dt} = \frac{E}{p}$ , где  $\frac{dx}{dt} = v_{\phi}$  - фазовая скорость.

По формулам (4.1) и (4.2) находим:  $\frac{E}{p} = \frac{\hbar \omega}{\hbar k} = \frac{\omega}{k}$

С другой стороны:  $\frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$

где  $v$  - скорость частицы.

Итак, фазовая скорость:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v} \quad (4.6)$$



# Суперпозиция волн

Рассмотренная выше плоская монохроматическая волна представляет строго периодический процесс, бесконечно протяженный в пространстве и во времени. Это абстракция; в природе такие волны не существуют. Любой реальный процесс имеет начало и конец, он ограничен как во времени, так и в пространстве и не является строго гармоническим. Его можно рассматривать как результат суперпозиции (наложения) гармонических волн, которые вследствие интерференции в одних частях пространства усиливают друг друга, а в других - гасят друг друга.

# Образование волновой группы

Рассмотрим суперпозицию двух волн:

$$u_1 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad u_2 = a \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

распространяющихся вдоль оси  $x$ . Будем считать, что частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также абсолютные значения волнового вектора  $k_1$  и  $k_2$  очень мало отличаются друг от друга. Складывая  $u_1$  и  $u_2$ , находим:

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = a \cos(\omega_1 t - k_1 x) + a \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \end{aligned}$$

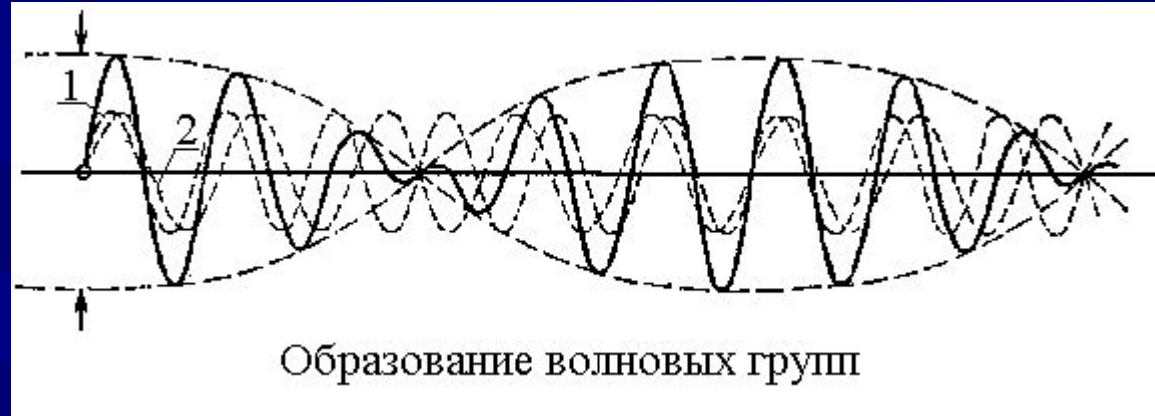
Обозначим:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega, \quad \frac{k_1 + k_2}{2} = k, \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{\Delta k}{2}$$

Тогда

$$u = 2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \cdot \cos(\omega t - kx) \quad (4.7)$$

Результат изображен на рисунке. Получились волновые группы, движущиеся с определенной скоростью



вдоль оси  $x$ . Т.к. частоты и волновые числа очень мало различаются, можно считать, что первый множитель в (4.7):

$$2a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \quad (4.8)$$

представляет собой медленно меняющуюся амплитуду модулированной волны.

# ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

Скорость перемещения волновой группы - это скорость перемещения определенной амплитуды. Для ее определения запишем условие постоянства амплитуды:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = \text{const} \quad (4.9)$$

Дифференцируя (4.9) по  $t$ , получаем скорость перемещения волновой группы:

$$v_{gp} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

В пределе  $\Delta k \rightarrow 0$  получаем формулу для групповой скорости:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.10)$$

# ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ ВОЛН ДЕ-БРОЙЛЯ

Для волн де-Бройля:

$$\begin{aligned} v_{gr} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{d\left(c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}\right)}{dp} = \\ &= \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 mv}{mc^2} = v \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом, скорость частицы  $v$  равна групповой скорости волн де-Бройля  $v_{gr}$

# СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ФАЗОВОЙ И ГРУППОВОЙ СКОРОСТЬЮ ВОЛН ДЕ-БРОЙЛЯ

Вернемся к формуле (4.6) и запишем ее в виде

$$\boxed{v_{\phi} = \frac{c^2}{v} = c \frac{c}{v}} \quad \text{или} \quad \boxed{v_{\phi} \cdot v = c^2} \quad (4.12)$$

Из этой формулы следует, что фазовая скорость волн де-Бройля всегда больше скорости света (т.к. скорость частицы  $v$  всегда меньше скорости света). Это, однако, не противоречит теории относительности, т.к. фазовая скорость не характеризует ни скорость перемещения массы, ни скорость перемещения энергии.

# Гипотеза де-Бройля и правило квантования Бора

Пользуясь понятием дебройлевской длины волны, можно дать наглядное истолкование правилу квантования круговых орбит. Электрон обладает волновыми свойствами. Чтобы энергия волнового движения не распространялась в другие области (т.е. чтобы электрон при движении вокруг ядра не излучал энергию), волна должна быть стоячей.

На круговой орбите стоячая волна возникает, если на этой орбите уложится целое число длин волн де-Бройля:  $2\pi r = n\lambda$ . Отсюда, учитывая, что  $\lambda = h/mv$ , находим:

$$2\pi r = n \frac{h}{mv} \rightarrow mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \rightarrow L = n\hbar$$

т.е. правило квантования.

Таким образом, 1-ый постулат Бора – логическое следствие волновой природы электрона.



# Интернет-экзамен

Длина волны де Бройля частицы уменьшилась вдвое. Скорость этой частицы ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

- 1) не изменилась
- 2) уменьшилась в 4 раза
- 3) увеличилась в 4 раза
- 4) уменьшилась вдвое
- 5) увеличилась вдвое

# Интернет-экзамен

## Задание N 26.

Если частицы имеют одинаковую длину волны де Бройля, то наименьшей скоростью обладает ...

## Варианты ответа:

- протон
- позитрон
- $\alpha$ -частица
- нейтрон

# Интернет-экзамен

Задание N 6

Если протон и  $\alpha$  - частица двигаются с одинаковыми скоростями, то отношения их длин волн де Бройля  $\lambda_p / \lambda_\alpha$  равно ...

Варианты о

4

1

2

1/2

# Интернет-экзамен

## Задание N 5

Если частицы имеют одинаковую скорость, то наибольшей длиной волны де Бройля обладает ...

## Варианты ответов

- протон
- нейтрон
- электрон
- $\alpha$ -частица