Особые точки
фазового пространства

соответствуют состоянию равновесия АСУ.

Виды особых точек:

- **Центр**
- **Фокус**
- **Узел**
- **Седло**

Типы фазовых траекторий для систем второго порядка

Пусть дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x(t)}{dt} - a_1\frac{dx(t)}{dt} + a_0x(t) = b_0y(t)$$

описывает поведение динамическои системы. Этому уравнению соответствует система двух Уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -a_1y - a_0x \end{cases}$$

Решение характеристического уравнения примет вид:

$$p^2 - a_1p + a_0 = 0\,,\ p_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Система, очевидно, имеет единственную особую точку **-точку равновесия** – **(0,0).**

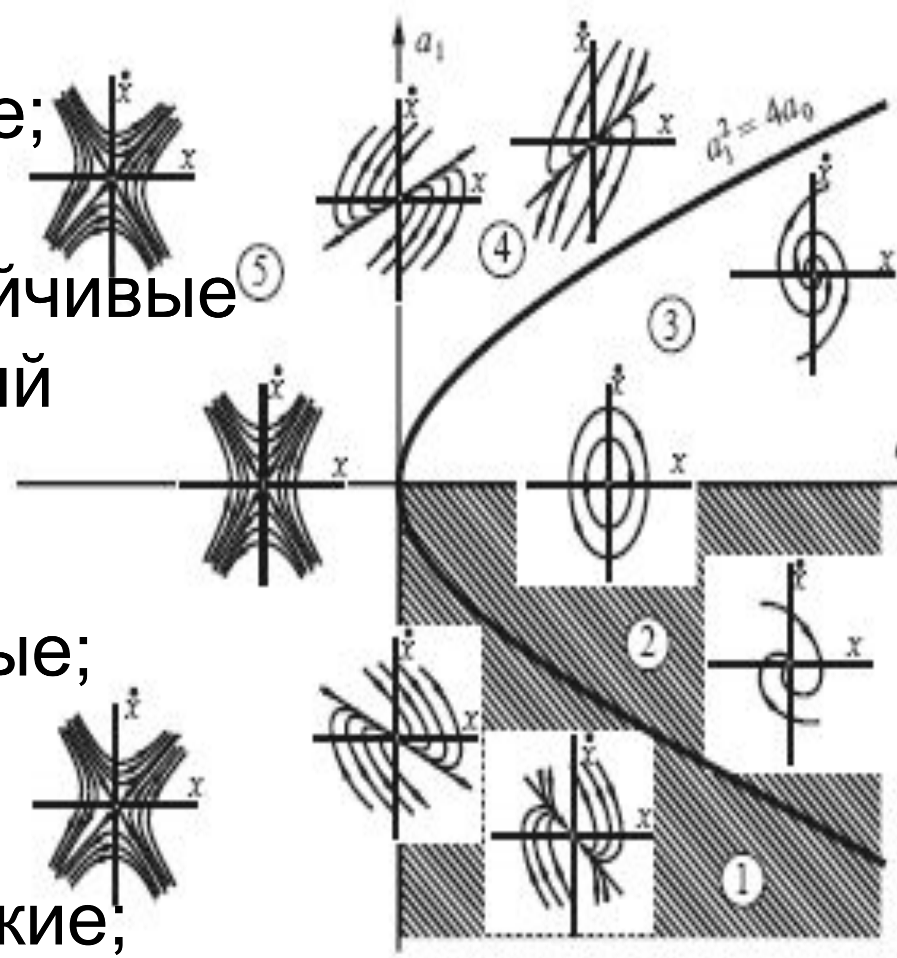
Устойчивость особой точки определяется корнями характеристического уравнения. От них зависит форма фазовых траекторий.

Особой точке в зависимости от корней характеристического уравнения присваивается имя собственное:

- два действительных отрицательных корня – **устойчивый узел**.
- два действительных положительных корня – **неустойчивый узел**.
- два комплексных корня в левой полуплоскости – **устойчивый фокус**.
- два комплексных корня в правой полуплоскости – **неустойчивый фокус**.
- два мнимых корня **– центр**.
- два действительных корня: один - положительный, другой – отрицательный – **седло**.

Области различного поведения системы

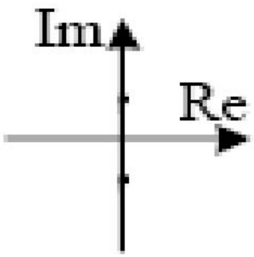
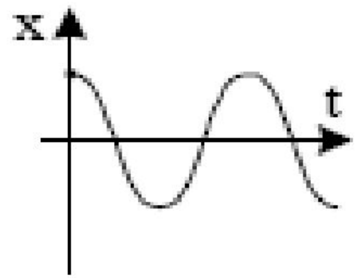
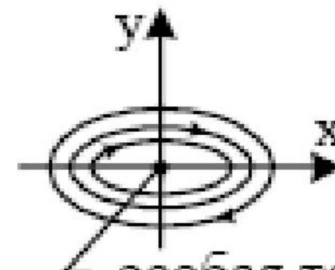
– область 1, процессы устойчивые апериодические; «устойчивый узел»;
– область 2, процессы устойчивые колебательные; «устойчивый фокус»;
– область 3, процессы неустойчивые колебательные; «неустойчивый фокус»;
– область 4,процессы неустойчивые апериодические; «неустойчивый узел»;
– область 5, процессы неустойчивые; «седло».



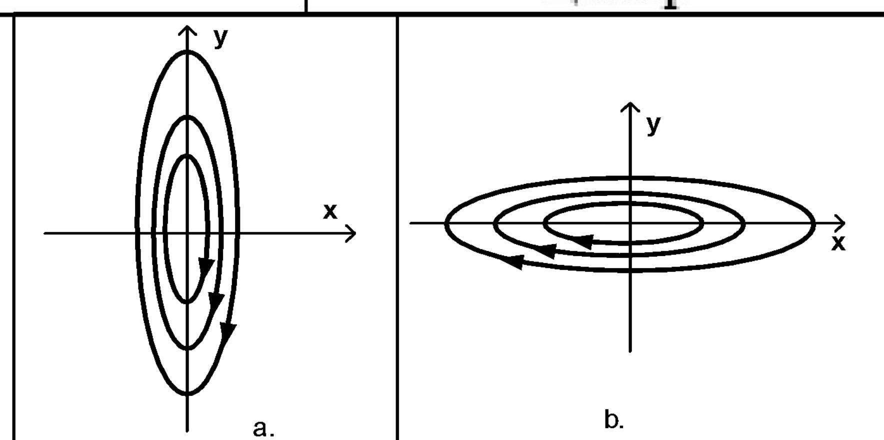
На границе областей 2 и 3 в системе возникают незатухающие колебания, амплитуда которых зависит от начальных условий; точка равновесия типа «центр».

Центр –

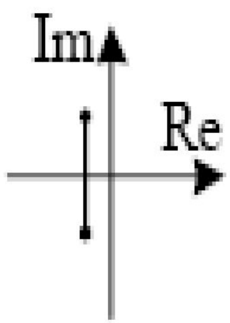
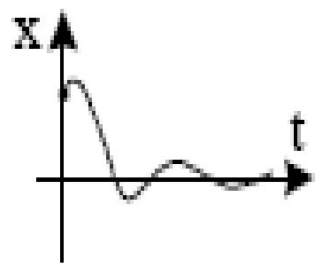
точка, которую окружают замкнутые фазовые траектории (предельные циклы)

Корни характеристи-ческого уравнения	Переходный процесс	Фазовая траектория
1	2	3
1. $a_1=0$, $a_2>0$ 		 особая точка - центр

Корни характеристического уравнения - мнимые



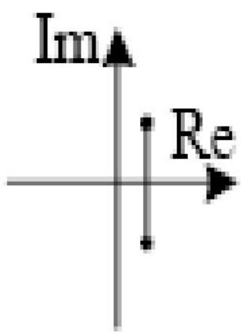
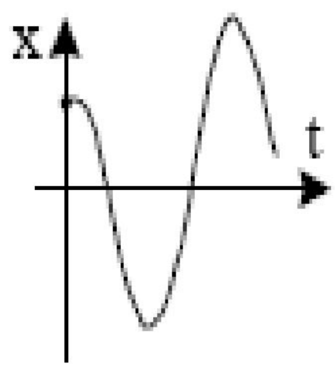
Фокус – особая точка, которая является асимптотической для фазовых траекторий

<table>
<tr><th>Корни характеристи-ческого уравнения</th><th>Переходный процесс</th><th>Фазовая траектория</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Комплексные корни с отрицательной вещественной частью

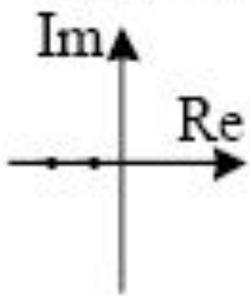
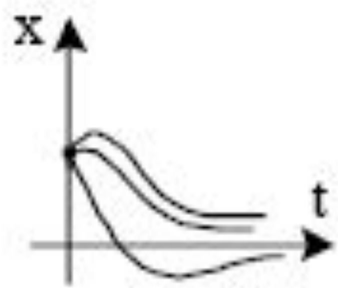
Устойчивый фокус

Неустойчивый фокус

Корни характеристи-ческого уравнения	Переходный процесс	Фазовая траектория
1	2	3
4. $a_1^2<4a_2$, $a_1<0$, $a_2>0$ 		

Комплексные корни с положительной вещественной частью

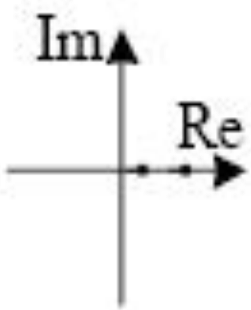
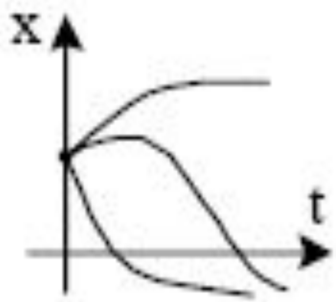
Узел –особая точка, через которую проходят фазовые траектории

Корни характеристи-ческого уравнения	Переходный процесс	Фазовая траектория
1	2	3
2. $a_1^2>4a_2$, $a_1>0$, $a_2>0$ 		

Корни вещественные отрицательные

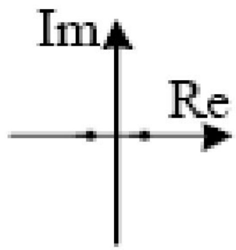
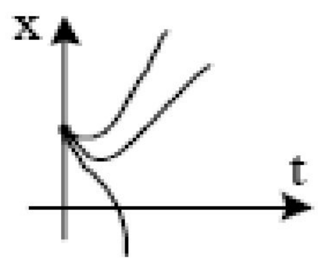
Устойчивый узел

Неустойчивый узел

<table>
<tr><th>Корни характеристи-
ческого уравнения</th><th>Переходный
процесс</th><th>Фазовая траектория</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>б. $a_1^2>4a_2$, $a_1<0$, $a_2>0$

</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Корни вещественные положительные

Седло – особая точка, соответствующая неустойчивому состоянию равновесия

Корни характеристического уравнения	Переходный процесс	Фазовая траектория
1	2	3
3. $a_2<0$ 		

два действительных корня:
один - положительный,
другой – отрицательный

Асимптоты на фазовой плоскости называются сепаратрисами седла

Определение типа особой точки нелинейной АСУ

осуществляется из условия равенства нулю производных (равновесное состояние

$$\frac{dy}{dt} = F1(x,y) = 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = F2(x,y) = 0, \qquad (1)$$

F1(x,y) F2(x,y) – нелинейные зависимости.

Алгоритм определения типа особых точек:

Тип особой точки определяется линеаризацией правой части уравнений в окрестности особой точки.

- исходные нелинейные уравнения (1) линеаризуем в окрестности особых точек при малых отклонениях;
- определяем корни характеристического уравнения линеаризованной АСУ;
- по виду корней определяем тип особой точки.

Тренировочное задание

Определить тип особых точек АСУ, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{dx/dt = y*y + x;} \qquad \mathbf{1)}$$

$$\mathbf{dy/dt = x - 2*y.} \qquad \mathbf{2)}$$

Тренировочное задание

1 Фазовый портрет нелинейной системы определяется решением дифференциального уравнения $dy_2 / dy_1 = f_2(y_1, y_2) / f_1(y_1, y_2)$, которое в данном случае является нелинейным, что и обусловливает характерные особенности фазовых траекторий. Так, особые точки определяют поведение фазовых траекторий только вблизи них. Помимо особых точек фазовый портрет нелинейной системы может содержать особые линии. Вся область фазового портрета разделена на области с различным характером фазовых траекторий.

A Что представляет собой особая линия, называемая предельным циклом?

B Что такое сепаратриса?

C Дайте характеристику типового фазового портрета.

Тренировочное задание

1 Система автоматического управления называется нелинейной, если она не подчиняется принципу суперпозиции. Различают два вида нелинейностей: статические – это нелинейности статических характеристик и динамические – это нелинейности дифференциальных уравнений. Простейшими нелинейными элементами являются статические нелинейности, у которых выходная переменная зависит только от входной переменной, причем эта зависимость строго однозначна: $y_{нэ} = f(x)$. Такие нелинейности называются типовыми.

A Как доказать, что система относится к классу нелинейных систем автоматического управления?

B Что представляют собой статические нелинейности и динамические нелинейности?

C Приведите пример типовых нелинейных элементов.

Тренировочное задание

2 Как известно, особенности нелинейных систем вытекают из неподчинения принципу суперпозиции, основными из которых являются следующие: выходной сигнал в нелинейных системах отличается от входного гармонического сигнала как по форме, так и по частоте; частотные характеристики зависят от амплитуды входного сигнала; условия устойчивости зависят от величины внешнего воздействия; в системе существуют собственные особые движения, называемые автоколебаниями.

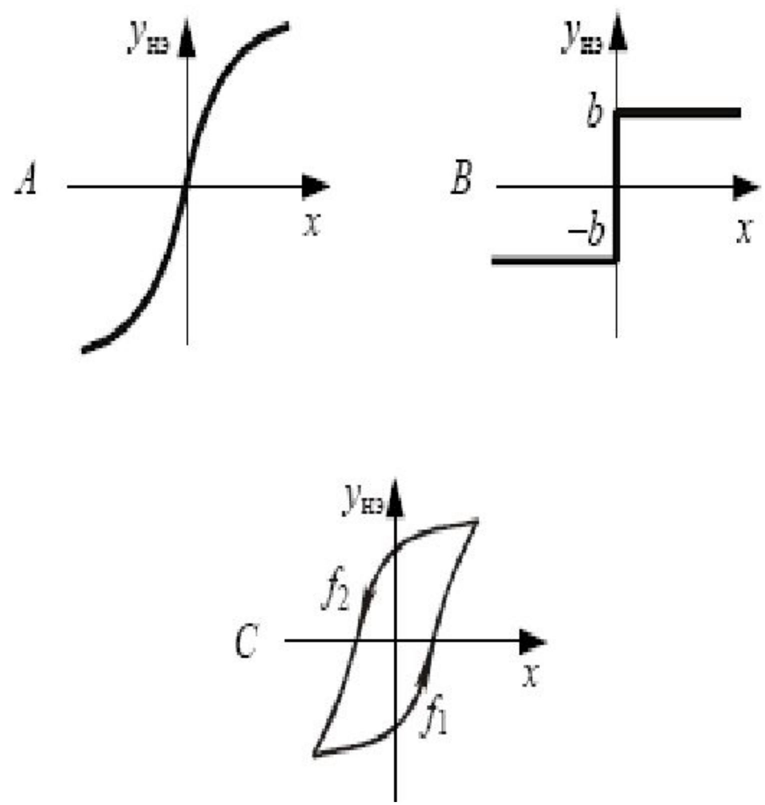
A Почему частотные характеристики нелинейных систем зависят от амплитуды входного сигнала?

B Сколько состояний равновесия имеет нелинейная система?

C Что такое автоколебания?

Тренировочное задание

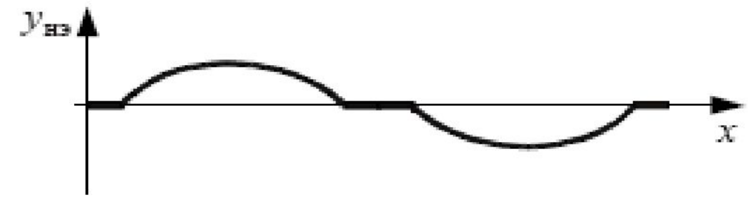
Какая из статических характеристик нелинейного элемента является неоднозначной?



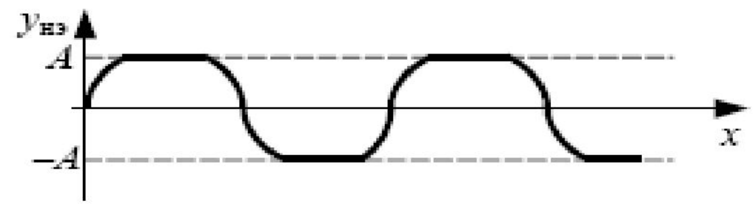
Тренировочное задание

Какой сигнал будет на выходе нелинейного звена с зоной нечувствительности?

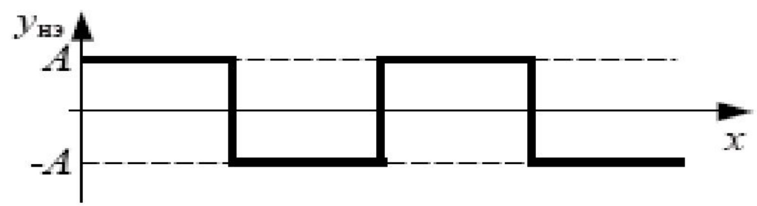
A



B



C



Тренировочное задание

3 В результате линеаризации путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$ нелинейной статической характеристики $y_{нэ} = x^2$ получена линеаризованная статическая характеристика:

A $y_{нэ} \approx x + 1$.

B $y_{нэ} \approx 2x - 1$.

C $y_{нэ} \approx x + 2$.

Тренировочное задание

9 Какое разложение называется разложением в ряд Тейлора функции $y_{\text{нэ}} = f(x)$?

A $y_{\text{нэ}} = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots$.

B $y_{\text{нэ}} = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \dfrac{f''(x_0)}{2!}\Delta x + \ldots$.

C $y_{\text{нэ}} = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)(\Delta x)^2 + \ldots$.

Тренировочное задание

1 Предельным циклом называется:

A Замкнутая кривая.

B Асимптота фазовых траекторий.

C Фазовая траектория, уходящая в бесконечность.

Тренировочное задание

2 Дифференциальное уравнение для семейства фазовых траекторий на плоскости имеет вид:

A $dy_1 / dt = f_2(y_1, y_2) / f_1(y_1, y_2)$.

B $dy_2 / dy_1 = f_2(y_1, y_2) / f_1(y_1, y_2)$.

C $dy_2 / dt = f_2(y_1, y_2) / f_1(y_1, y_2)$.

Тренировочное задание

3 Сепаратрисой называется

A Замкнутая кривая.

B Кривая, разделяющая области фазового портрета с различным характером фазовых траекторий.

C Фазовая траектория, сходящаяся к особой точке.