

ЛЕКЦИЯ 10. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРАВИЛА ПРИЕМА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

10.1. Алгоритмы оптимального приема

10.2. Структура корреляционного приемника

10.3. Структура приемника с согласованными фильтрами

10.1. АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЕМА

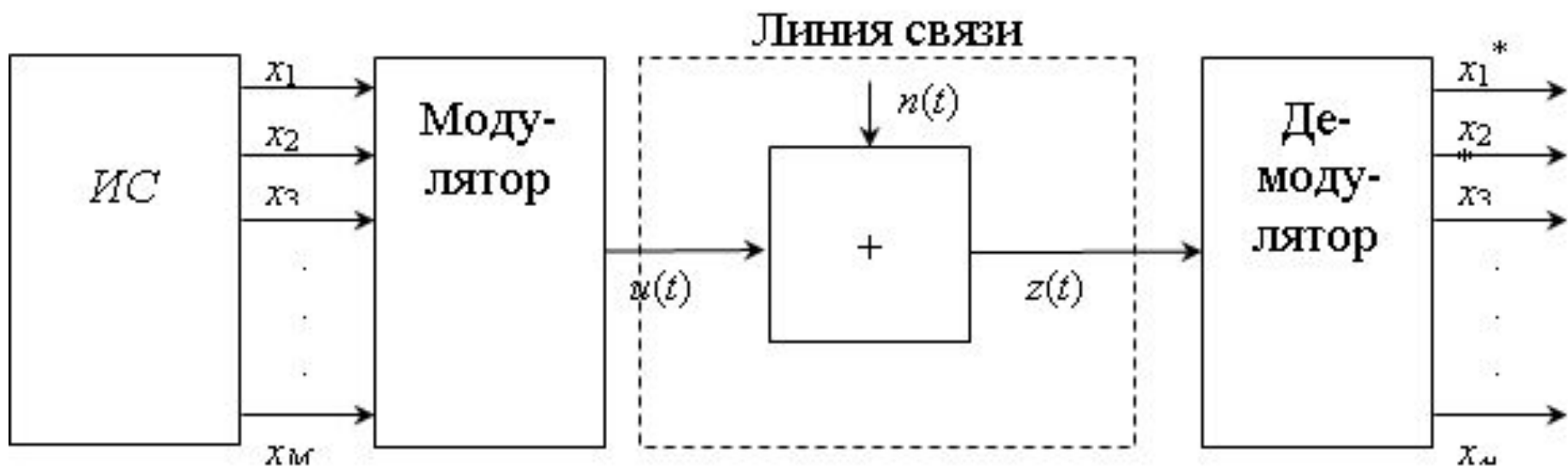


Рис. 10.1. Структурная схема системы передачи информации

На вход демодулятора при передаче сигнала $u_i(t)$ поступает колебание (сигнал + шум)

$$z(t) = u_i(t) + n(t),$$

где $n(t)$ - аддитивный шум в канале.

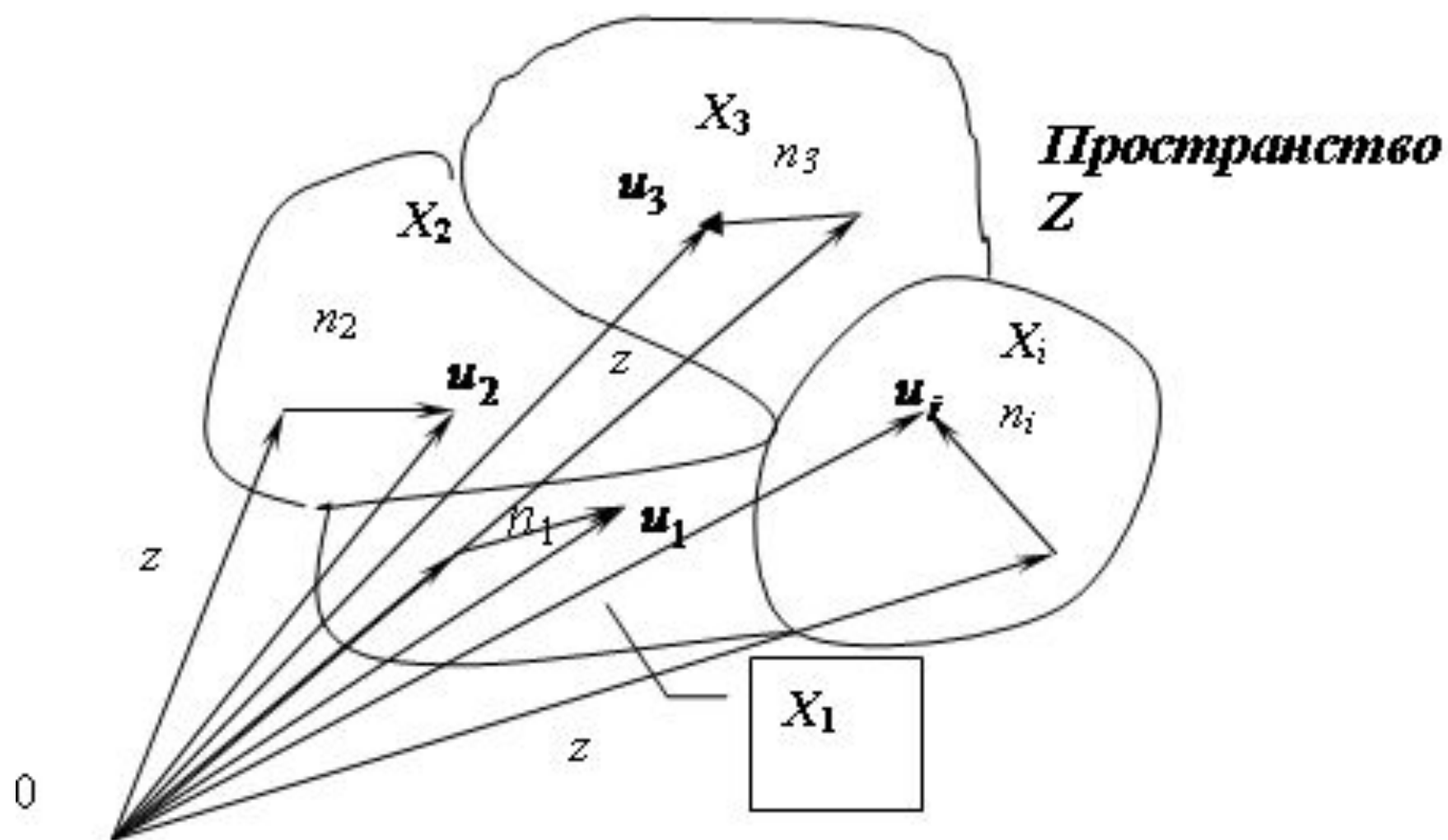


Рис.10.2. Разбиения пространства принимаемых колебаний на непересекающиеся области

Статистические критерии оптимального приема дискретных сообщений

В теории электрической связи применяются следующие критерии оптимального приема дискретных сообщений:

- 1) критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова);
- 2) критерий минимального среднего риска (байесовский критерий);
- 3) критерий Неймана-Пирсона;
- 4) критерий Вальда.

Критерий идеального наблюдателя обеспечивается решающей схемой, построенной по правилу максимума апостериорной вероятности — решение x_i , принимается в том случае, если выполняется система из $M - 1$ неравенств:

$$p(x_i|z) > p(x_j|z), j \in \overline{0, M-1}, j \neq i. \quad (10.1)$$

Для двоичной системы сигналов это правило сводится к проверке неравенства

$$p(1|z) > p(0|z). \quad (10.2)$$

При выполнении неравенства (10.2) регистрируется символ 1, в противном случае - 0.

Апостериорная вероятность символа x_i определяется согласно формуле Байеса

$$p(x_i|z) = \frac{p(x_i)p(z|x_i)}{p(z)} \quad (10.3)$$

где $p(z|x_i)$ априорная условная плотность вероятности — функция правдоподобия i -й гипотезы ($i=0 \dots M-1$) (определяется каналом связи),

$p(x_i)$ — априорная вероятность передачи символа x_i (определяется статистикой источника сообщения и правилом кодирования).

Правило решения по критерию идеального наблюдателя можно записать:

$$p(x_i)p(z|x_i) > p(x_j)p(z|x_j), j = 0, 1, 2, 3, \dots, M-1, j \neq i \quad (10.4)$$

Приёмник, реализующий алгоритм (10.4), называется **приёмником Котельникова**. Для двоичной системы правило (10.4) сводится к проверке неравенства

$$p(1)p(z|1) > p(0)p(z|0), \quad (10.5)$$

при выполнении которого регистрируется символ 1, а при невыполнении — 0.

Правило (10.4) можно записать

$$\frac{p(z|x_i)}{p(z|x_j)} > \frac{p(x_j)}{p(x_i)}. \quad (10.6)$$

Отношение в левой части этого неравенства называется **отношением правдоподобия** двух гипотез: о том, что передавался символ x_i , и о том, что передавался символ x_j .

В случае, когда все M символов передаются равновероятно

$$p(x_i) = \frac{1}{M} \quad (10.7)$$

правило (10.6) упрощается

$$\frac{p(z|x_i)}{p(z|x_j)} > 1, \quad i \in 0, 1, \dots, M-1, \quad j \neq i. \quad (10.8)$$

Напряжение на входе приемника

$$z(t) = u_s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T_c.$$

Если помеха $n(t)$ имеет случайный характер и подчиняется нормальному закону распределения:

$$p(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

то и напряжение на входе приемника, также будет подчиняться нормальному закону.

Для двоичной системы условные плотности вероятности для u_1 и u_0 будут равны:

$$p(z | u_1) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z(t) - u_1(t))^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$p(z | u_0) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z(t) - u_0(t))^2}{2\sigma^2}\right).$$

Отношение правдоподобия между реализациями:

$$\frac{p(z | u_1)}{p(z | u_0)} = \exp\left[-\frac{[z(t) - u_1(t)]^2 - [z(t) - u_0(t)]^2}{2\sigma^2}\right] > 1,$$

где $z(t)$ – напряжение на входе приемника; σ^2 – средняя мощность шума.

$$\ln \frac{p(z | u_1)}{p(z | u_0)} = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ -[z(t) - u_1(t)]^2 + [z(t) - u_0(t)]^2 \right\} > \ln 1 = 0.$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ -[z(t) - u_1(t)]^2 + [z(t) - u_0(t)]^2 \right\} > 0.$$

$$[z(t) - u_1(t)]^2 - [z(t) - u_0(t)]^2 < 0.$$

Проинтегрировав и усреднив его за время действия одной реализации, равное периоду получим правило принятия решения в пользу реализации u_1 .

$$\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} \left\{ (z(t) - u_1(t))^2 - (z(t) - u_0(t))^2 \right\} dt < 0$$

$$\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} (z(t) - u_1(t))^2 dt < \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} (z(t) - u_0(t))^2 dt. \quad (10.9)$$

Указанное правило принятия решения можно записать:

$$\int_0^{T_c} (z(t) - u_1(t))^2 dt < \int_0^{T_c} (z(t) - u_0(t))^2 dt. \quad (10.10)$$

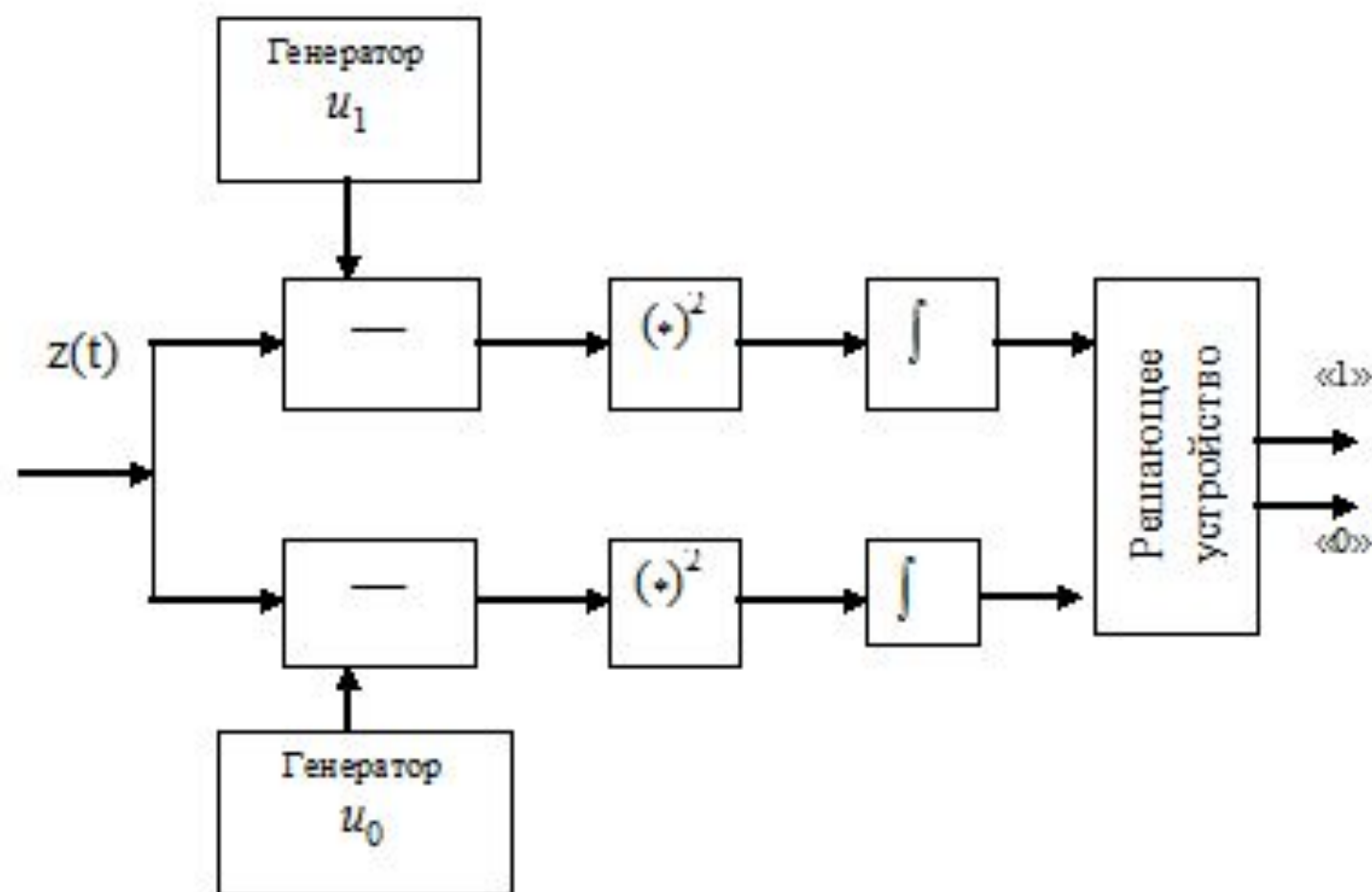


Рис. 10.3. Структурная схема оптимального приемника (10.10)

Преобразуем (10.9)

$$-\frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)u_1(t)dt + \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_1^2(t)dt < -\frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)u_0(t)dt + \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_0^2(t)dt,$$

$$\frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)u_1(t)dt - \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_1^2(t)dt > \frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)u_0(t)dt - \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_0^2(t)dt,$$

$$\frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)u_1(t)dt - \frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)u_0(t)dt > \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_1^2(t)dt - \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_0^2(t)dt. \quad (10.11)$$

$$\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_1^2(t)dt = P_1; \quad \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} u_0^2(t)dt = P_0, \quad \text{где } P_1 \text{ и } P_0 - \text{средние}$$

мощности реализации сигнала на входе приемника.

$$\frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} z(t)[u_1(t) - u_0(t)]dt > \frac{1}{2}(P_1 - P_0). \quad (10.12)$$

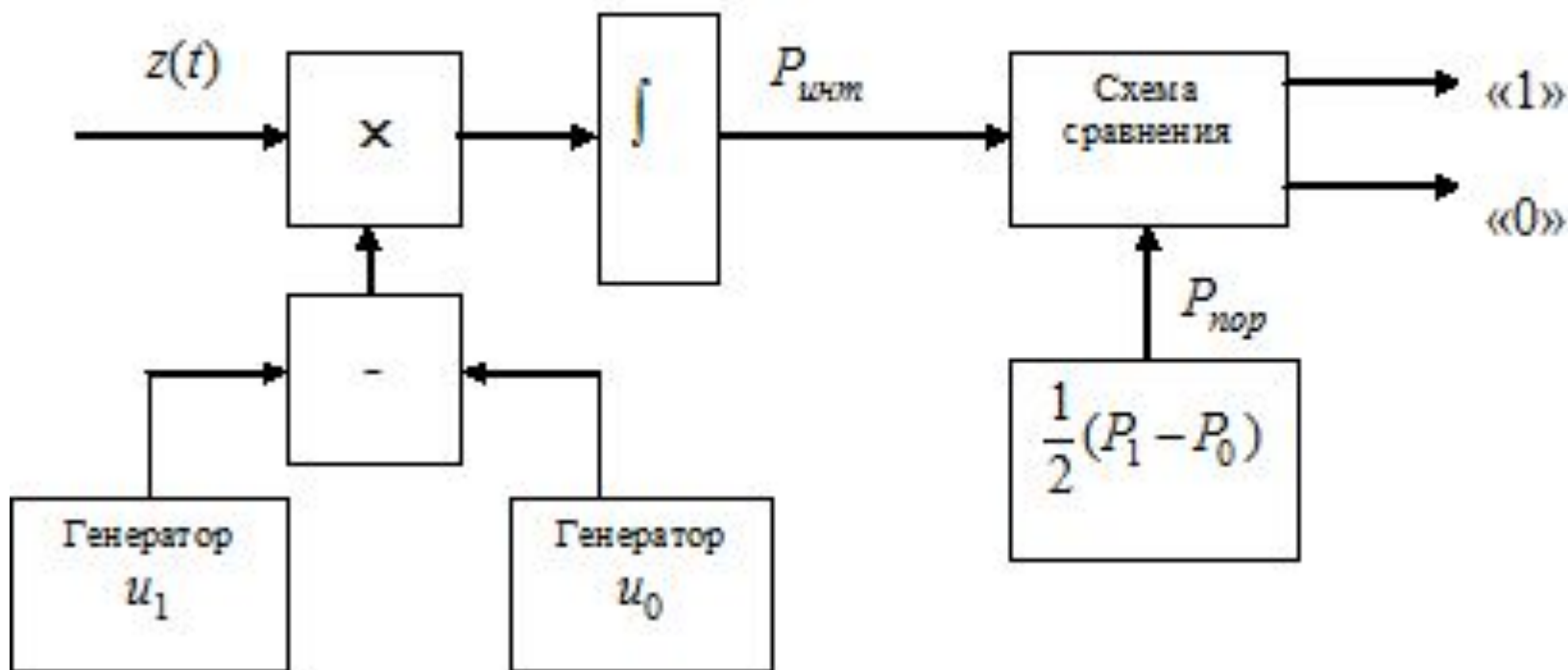


Рис. 10.4. Структурная схема оптимального приемника (10.12)

- Если $P_{шмт} > P_{нор}$ то, схема принимает решение, что был передан сигнал u_1 ("1");
- Если $P_{шмт} < P_{нор}$ то, схема принимает решение, что был передан сигнал u_0 ("0").

10.2. СТРУКТУРА КОРРЕЛЯЦИОННОГО ПРИЕМНИКА

Выражение (10.11) выразим через энергии сигналов. Тогда правило приёма сводится к проверке системы неравенств:

$$\int_0^{T_c} z(t)u_i(t)dt - 0,5E_i > \int_0^{T_c} z(t)u_j(t)dt - 0,5E_j, j \neq i \quad (10.13)$$

где $E_i = \int_0^{T_c} u_i^2(t)dt$ - энергия ожидаемого сигнала $u_i(t)$,

Устройство, вычисляющее скалярное произведение (или корреляционный интеграл):

$$\int_0^{T_c} z(t)u_i(t)dt \quad (10.14)$$

называют **активным фильтром** или **коррелятором**, поэтому приемник, реализующий алгоритм (10.13), называют **корреляционным**.

Для двоичной системы алгоритм (10.13)

$$\int_0^{T_c} z(t)u_1(t)dt - 0,5 E_1 > \int_0^{T_c} z(t)u_0(t)dt - 0,5 E_0. \quad (10.15)$$

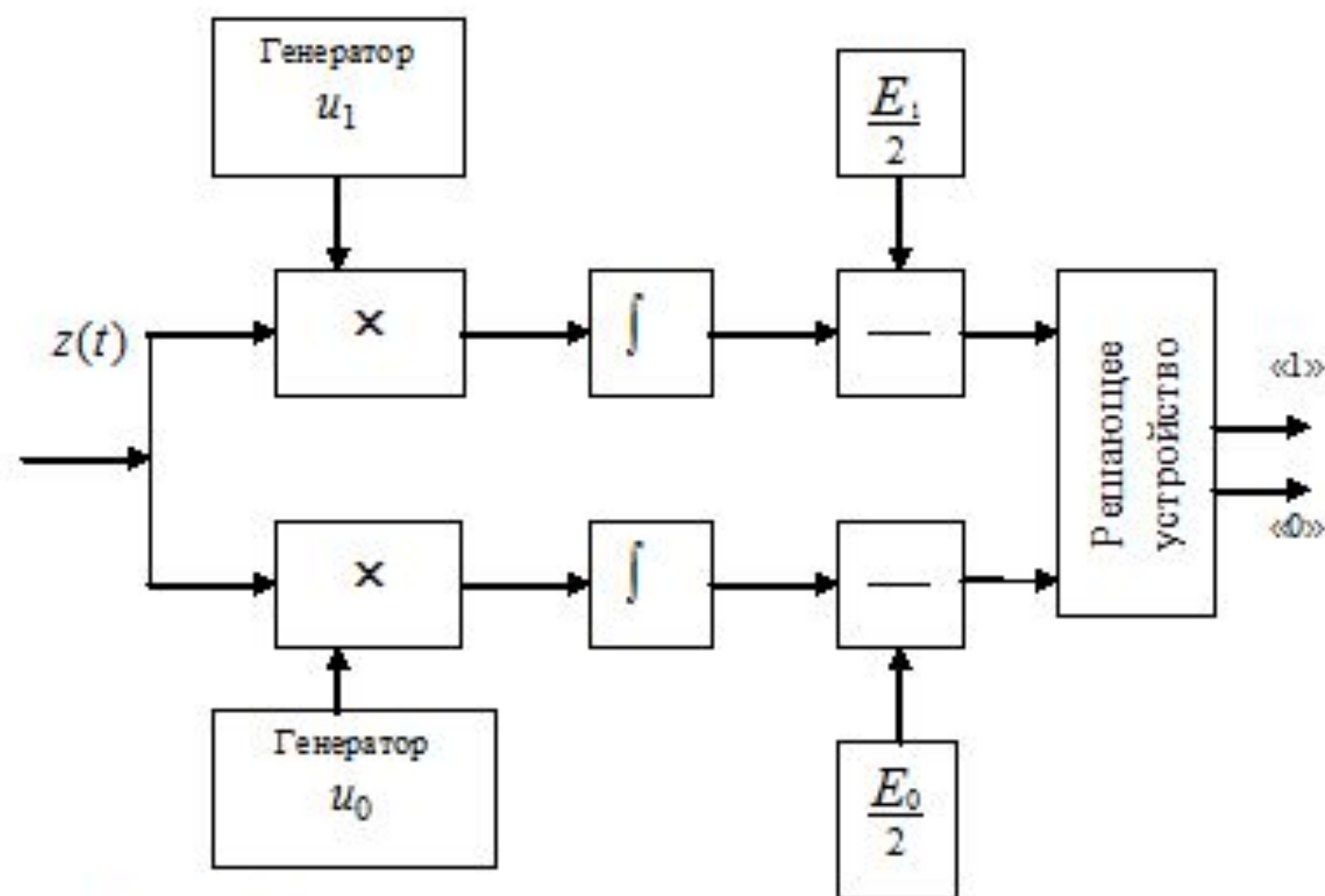


Рис.10.5. Структурная схема корреляционного приемника

10.3. СТРУКТУРА ПРИЕМНИКА С СОГЛАСОВАННЫМИ ФИЛЬТРАМИ

На выходе фильтра в момент времени $t=T_c$

$$u_{\text{вых}}(T_c) = \int_0^{T_c} z(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (10.16)$$

где $g(\tau)$ — импульсная характеристика (ИХ) фильтра.

$$u_{\text{вых}}(T_c) = \int_0^{T_c} z(t_0-\tau)u_i(t_0-\tau)d\tau. \quad (10.17)$$

Замена переменной $t=t_0-\tau$, $\tau=t_0-t$. (10.17) будет выполнено при согласовании

$$g(\tau) = u_i(t_0-\tau) \text{ или } g(t_0-t) = u_i(t), \quad g(t) = u_i(t_0-t).$$

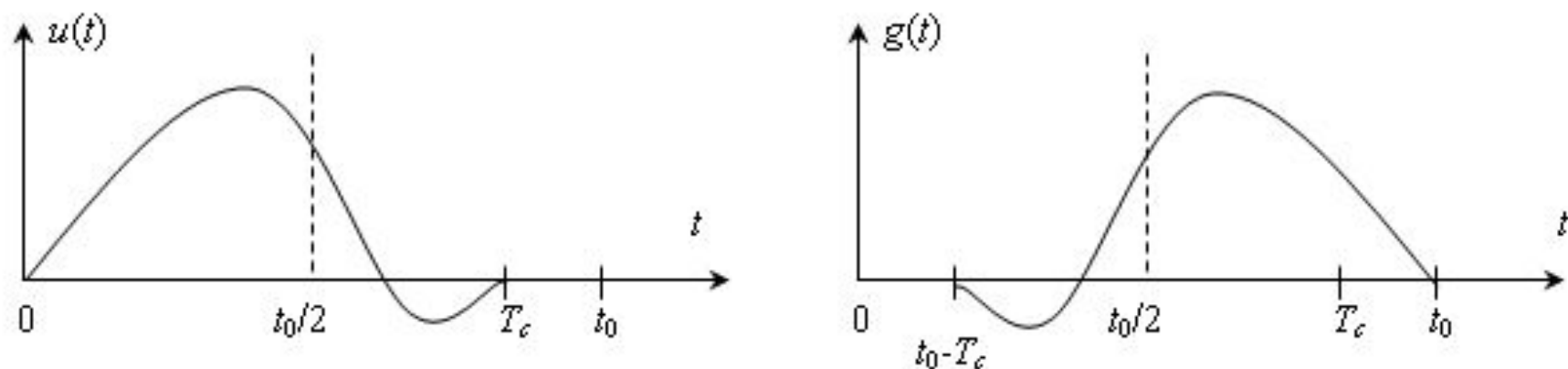


Рис. 10.6. Сигнал $u(t)$ и импульсная характеристика $g(t)$ линейного фильтра, согласованного с этим сигналом

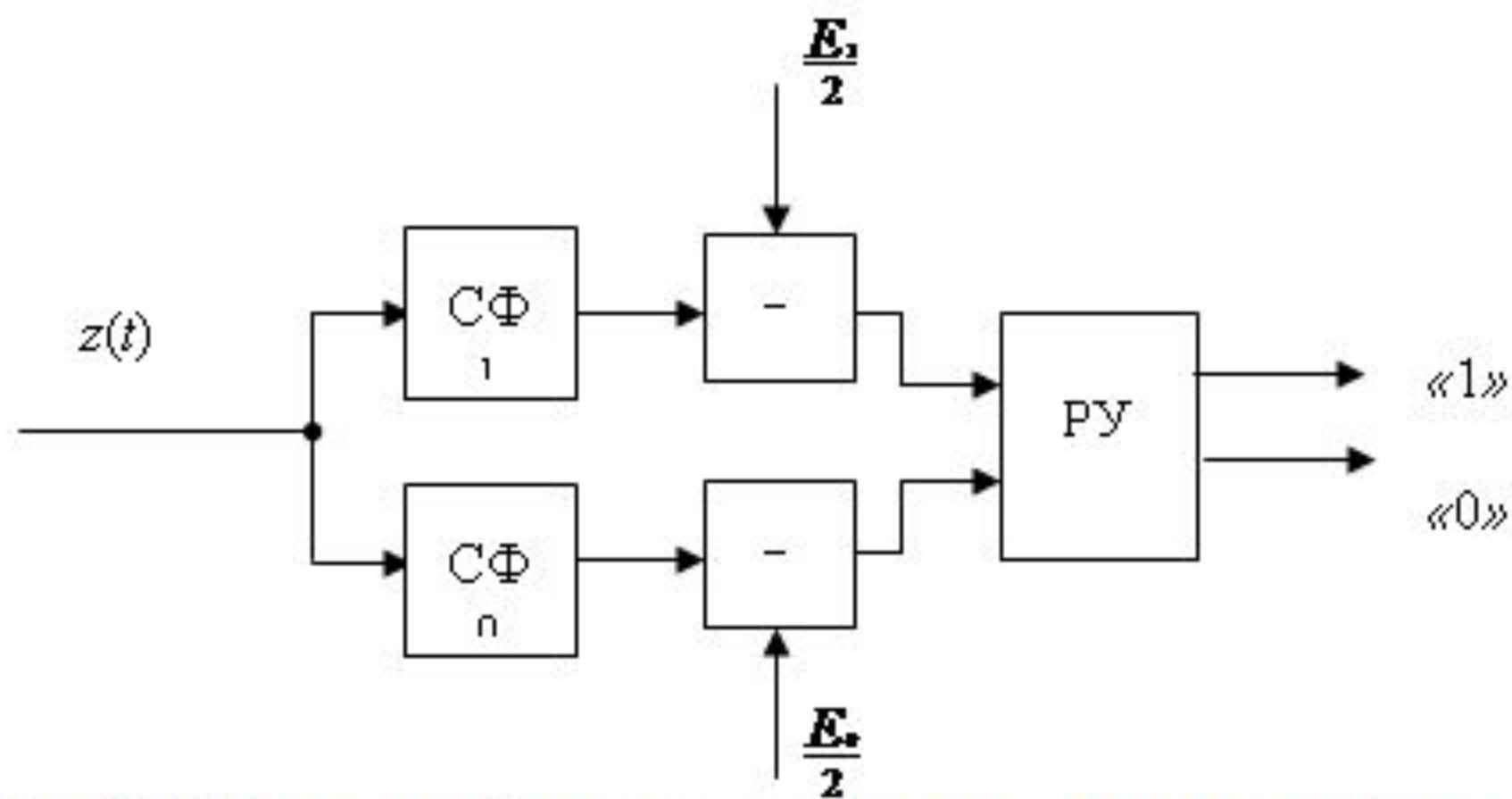


Рис. 10.7. Оптимальный демодулятор на основе согласованных фильтров