ЛЕКЦИЯ 10. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИЕМА ДИСКРЕТНЫХ СООБЩЕНИЙ

Выражение

$$\int_0^{T_c} z(t)u_1(t)dt - 0{,}5E_1 > \int_0^{T_c} z(t)u_0(t)dt - 0{,}5E_0$$

можно представить в виде

$$\int_0^{T_c} z(t)[u_1(t) - u_0(t)]dt > \frac{1}{2}(E_1 - E_0) \quad (10.1)$$

При выполнении неравенства (10.1) приёмник регистрирует символ 1, соответствующий сигналу $u_1(t)$.

В противном случае

$$\int_0^{T_c} z(t)[u_1(t) - u_0(t)]dt < \frac{1}{2}(E_1 - E_0) \quad (10.2)$$

регистрируется символ 0, соответствующий сигналу $u_0(t)$.

Если передаётся символ 1, то $z(t)=u_1(t)+n(t)$.

$$\int_0^{T_c}[u_1(t)+n(t)][u_1(t)-u_0(t)]dt>\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt,$$

$$\int_0^{T_c}u_1(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt+\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt>\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt$$

Вероятность ошибки определяется вероятностью того, что неравенство (10.1) не выполнено

$$\int_0^{T_c}u_1(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt+\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt<\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt$$

$$\int_0^{T_c}(u_1(t)u_1(t)-u_1(t)u_0(t))dt+\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt<\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt,$$

$$\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt<\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)-2u_1^2(t)+2u_1(t)u_0(t)\right]dt,$$

$$\int_0^{T_c} n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt < -\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)+u_0^2(t)-2u_1(t)u_0(t)\right]dt \ .$$

$$\int_0^{T_c} n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt < -\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1(t)-u_0(t)\right]^2 dt \ .$$

Разностный сигнал $u_\Delta(t) = u_1(t) - u_0(t)$;

Эквивалентная энергия $E_э = \int_0^{T_c} u_\Delta^2(t)dt$

Тогда ошибочный прием произойдет, если

$$\int_0^{T_c} n(t)u_\Delta(t)dt < -0{,}5E_э \ . \qquad (10.3)$$

Если передаётся символ 0, то $z(t)=u_0(t)+n(t)$.

$$\int_0^{T_c}[u_0(t)+n(t)][u_1(t)-u_0(t)]dt<\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt,$$

$$\int_0^{T_c}u_0(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt+\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt<\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt.$$

При этом вероятность ошибки определяется вероятностью того, что неравенство (10.2) не выполнено

$$\int_0^{T_c}u_0(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt+\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt>\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt\ .$$

$$\int_0^{T_c}(u_0(t)u_1(t)-u_0(t)u_0(t))dt+\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt>\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)\right]dt$$

$$\int_0^{T_c}n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt>\frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)-u_0^2(t)-2u_0(t)u_1(t)+2u_0^2(t)\right]dt,$$

$$\int_0^{T_c} n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt > \frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1^2(t)+u_0^2(t)-2u_1(t)u_0(t)\right]dt \ ,$$

$$\int_0^{T_c} n(t)[u_1(t)-u_0(t)]dt > \frac{1}{2}\int_0^{T_c}\left[u_1(t)-u_0(t)\right]^2 dt \ .$$

Ошибочный прием в этом случае произойдет, если

$$\int_0^{T_c} n(t)u_\Delta(t)dt > 0{,}5E_э \ . \qquad (10.4)$$

Запишем (10.3) в виде

$$\xi < -0{,}5E_э\ , \tag{10.5}$$

где $\xi = \int_0^{T_c} n(t)u_\Delta(t)dt$ - случайная величина.

Её математическое ожидание $\overline{\xi} = \int_0^{T_c} \overline{n(t)}u_\Delta(t)dt = 0$,

а дисперсия

$$D(\xi) = \overline{\xi^2} = \int_0^{T_c}\int_0^{T_c} \overline{n(t_1)n(t_2)}u_\Delta(t_1)u_\Delta(t_2)dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^{T} u_\Delta^2(t)dt = 0{,}5N_0E_Э\ .$$

Вероятность ошибки при передаче 1,

$$q = \int_{-\infty}^{-0,5E_э} p(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\xi)}} \int_{-\infty}^{-0,5E_э} \exp\left[\frac{-\xi^2}{2D(\xi)}\right] d\xi .$$

Табулированная функция ошибок

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy,$$ где $$y = \frac{\xi}{\sqrt{D(\xi)}}.$$

Тогда через F -функцию вероятность ошибки можно записать в виде

$$q = F\left(-\frac{0,5E_э}{\sqrt{0,5E_э N_0}}\right).$$

Учитывая, что $F(-x)=1-F(x)$

$$q = 1 - F\left(\frac{0,5E_э}{\sqrt{0,5E_э N_0}}\right) = 1 - F\left(\sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}\right).$$

Вероятность ошибки при передаче 0,

$$q = \int_{0,5E_э}^{\infty} p(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\xi)}} \int_{0,5E_э}^{\infty} \exp\left[\frac{-\xi^2}{2D(\xi)}\right] d\xi .$$

Табулированная функция ошибок

$$1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy ,$$

$$q = 1 - F\left(\frac{0,5E_э}{\sqrt{0,5E_э N_0}}\right) = 1 - F\left(\sqrt{\frac{E_э}{2N_0}}\right).$$

Вероятность ошибки так же можно выразить через эквивалентную мощность

$$q = 1 - F\left(\sqrt{\frac{P_э T_c}{2N_0}}\right).$$

Частные случаи:

1. Сигналы $u_1(t)$ и $u_0(t)$ противоположны: $u_1(t) = -u_0(t)$

В этом случае эквивалентная мощность $P_э$:

$$P_э = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}(u_1(t) - u_0(t))^2\,dt = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}(2u_1(t))^2\,dt = 4P_1 = 4P.$$

А вероятность ошибки:

$$q = 1 - F\left(\sqrt{\frac{2PT_c}{N_0}}\right).$$

2. Сигналы $u_1(t)$ и $u_0(t)$ ортогональны

$$\frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} u_1(t)u_0(t)dt = 0\,.$$

$$P_э = \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c}\left(u_1(t) - u_0(t)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} u_1^2 dt - \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} u_1(t)u_0(t)dt + \frac{1}{T_c}\int_0^{T_c} u_0^2(t)dt = P_1 + P_0 = 2P,$$

вероятность ошибки $q = 1 - F\left(\sqrt{\frac{PT_c}{N_0}}\right)$.

3. Сигналы с пассивной паузой

$u_0(t)=0, \quad P_э = P_1,$

вероятность ошибки:

$$q = 1 - F\left(\sqrt{\frac{PT_c}{2N_0}}\right).$$