

ЛЕКЦИЯ 6. ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫЕ КОДЫ

6.1. Принципы обнаружения и исправления ошибок

6.2. Классификация помехоустойчивых кодов

6.3. Основные характеристики помехоустойчивых кодов

6.4. Границы вероятности ошибочного декодирования

6.1. Принципы обнаружения и исправления ошибок

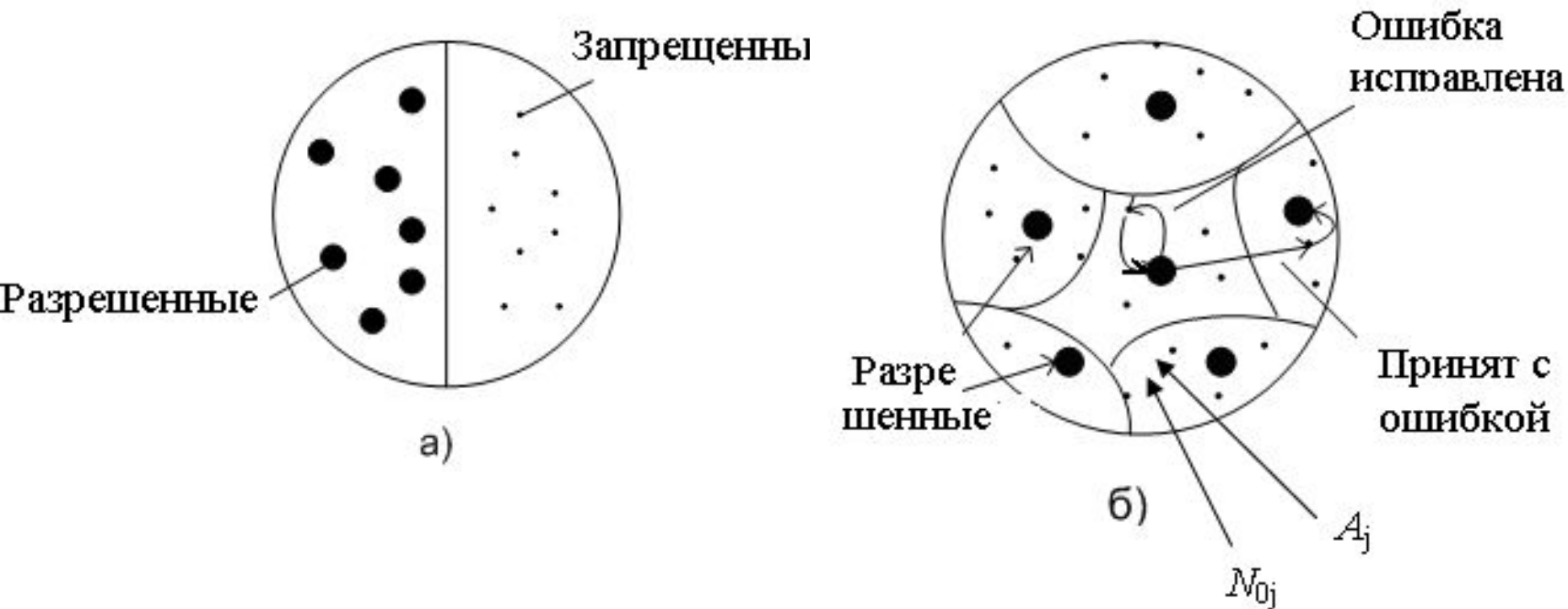


Рис. 6.1. К пояснению принципа кодирования

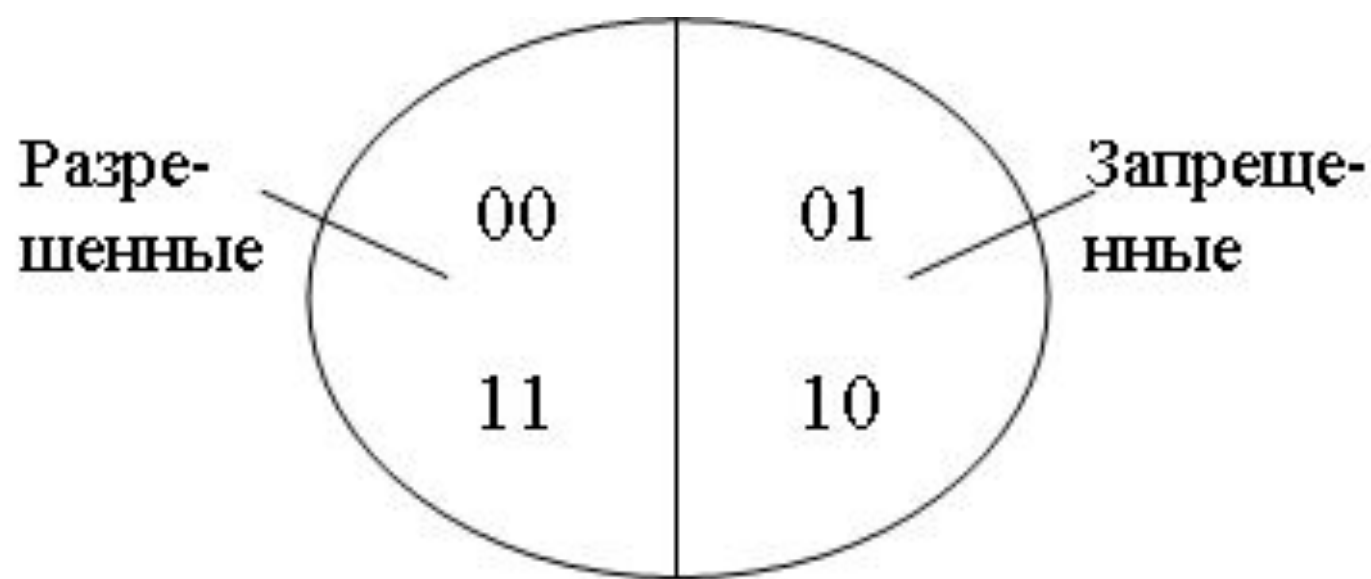
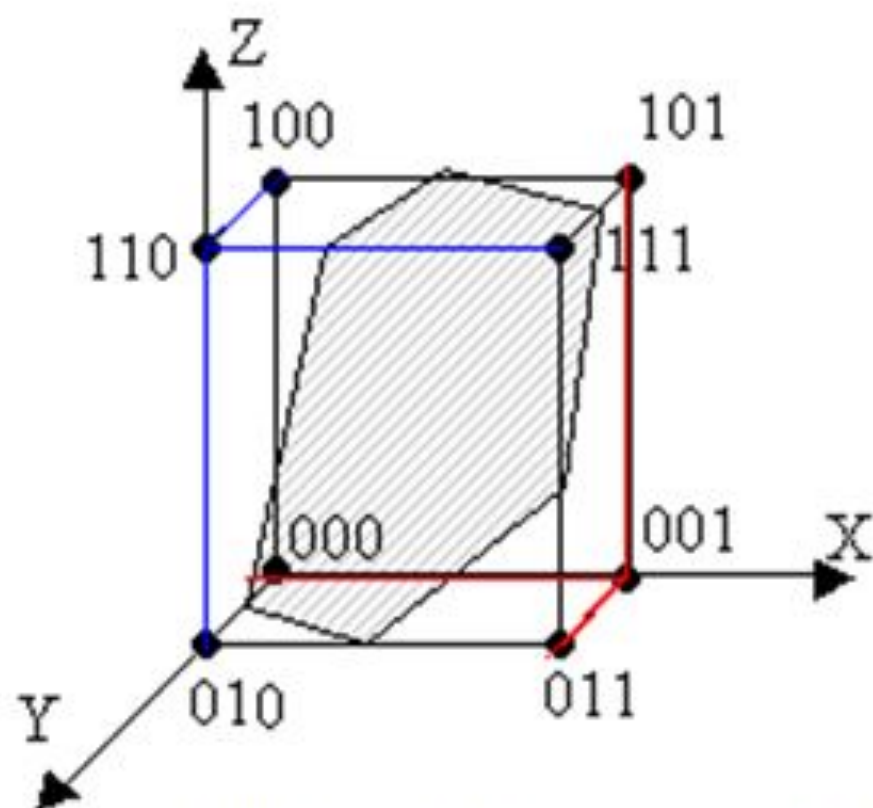


Рис.6.2. Разрешенные и запрещенные кодовые комбинации



Разрешенные комбинации:

001, 110;

запрещенные комбинации: 000,
010, 100, 111, 101, 011;

комбинации, относящиеся к
подмножеству комбинации 001:

101, 000, 011;

комбинации, относящиеся к
подмножеству комбинации 110:

010, 000, 111;

Рис. 6.3. Геометрическая модель помехоустойчивого кода

Под кодовым (Хэмминговым) расстоянием понимают минимальное число позиций, на которых символы данной кодовой комбинации отличаются от символов другой кодовой комбинации.

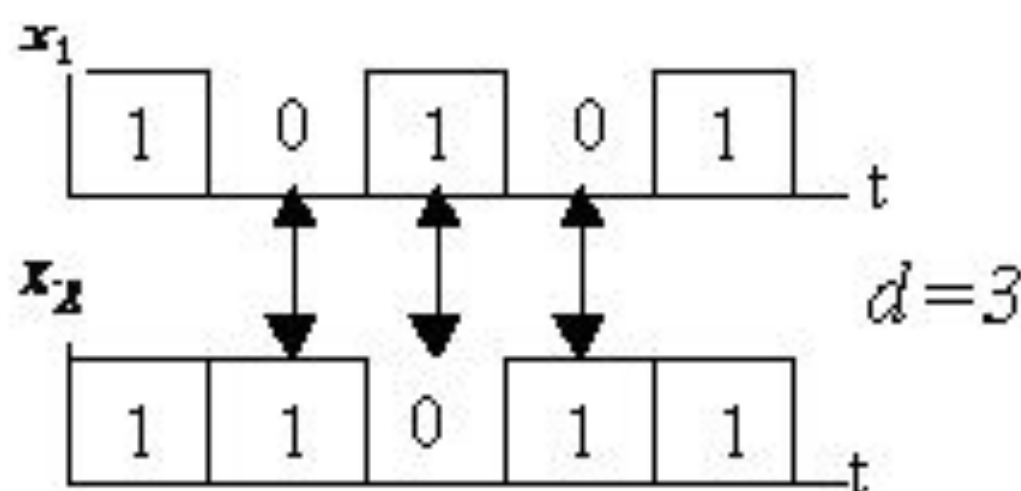


Рис. 6.4. Кодовое расстояние между двумя кодовыми комбинациями

Кодовое расстояние между i -й и j -й кодовыми комбинациями d_{ij}

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n (x_{jk} \oplus x_{ik}),$$

где x_{jk}, x_{ik} - значение символов k -й позиции j -й и i -й кодовых комбинаций, \oplus - суммирование по модулю 2.

Правила сложения по модулю 2:

$$1+1=0; 1+0=0+1=1; 0+0=0.$$

6.2. Классификация помехоустойчивых кодов



Рис. 6.5. Классификация помехоустойчивых кодов

6.3. Основные характеристики помехоустойчивых кодов

Число разрешенных и запрещенных кодовых комбинаций

Число возможных кодовых комбинаций

$$N_0 = 2^n.$$

Число разрешенных кодовых комбинаций

$$N_m = 2^m.$$

Число запрещенных кодовых комбинаций

$$N_3 = N_0 - N_m = 2^n - 2^m,$$

$$\frac{N_0}{N_m} = 2^{n-m} = 2^k,$$

где $k = n - m$ — число избыточных (проверочных) разрядов в блочном коде, m - число информационных разрядов, n - общее число разрядов в блоке.

Избыточность корректирующего кода

$$r = \frac{k}{n} = \frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Относительная скорость кода

$$R_k = \frac{m}{n} = 1 - r.$$

Скорость передачи информации после кодирования

$$I' = H'(X) \frac{m}{n},$$

где $H'(X)$ - производительность источника информации.

Минимальное кодовое расстояние

Минимальное кодовое расстояние d_{\min} определяется при попарном сравнении всех кодовых комбинаций и нахождением минимального значения кодового расстояния.

$$d_{\min} = \min\{d_{ij}\}.$$

Число обнаруживаемых и исправляемых ошибок

Число обнаруживаемых ошибок:

$$t_o \leq d_{\min} - 1.$$

Число исправляемых ошибок

$$t_u \leq \frac{d_{\min} - 1}{2} \text{ - при нечетном } d_{\min}.$$

$$t_u \leq \frac{d_{\min}}{2} - 1 \text{ - при четном } d_{\min}.$$

Корректирующие возможности кодов

Граница Плоткина определяет верхнюю границу кодового расстояния d_{\min} при заданном числе разрядов n в кодовой комбинации и числе информационных разрядов m :

$$d_{\min} \leq \frac{n2^{m-1}}{2^m - 1}.$$

Граница Хэмминга устанавливает максимально возможное число разрешенных кодовых комбинаций 2^m при заданных значениях n и d_{\min} :

$$2^m \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{d_{\min}-1} C_n^i},$$

где C_n^i — число сочетаний из n по i элементов,

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Число проверочных разрядов:

$$k \geq \log_2 \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{d_{\min}-1} C_n^i}.$$

Граница Варшамова - Гильберта для больших значений n определяет нижнюю границу для числа проверочных разрядов, необходимого для обеспечения заданного кодового расстояния:

$$k \geq \log_2 \sum_{i=0}^{d_{\min}-2} C_{n-1}^i .$$

6.4. Границы вероятности ошибочного декодирования

Вероятность того, что комбинация из n разрядов содержит равно i ошибок

$$P_{i \text{ ош}} = C_n^i q^i (1 - q)^{n-i},$$

где q - вероятность искажения одного разряда (определяется каналом связи).

Вероятность правильной регистрации кодовой комбинации из n разрядов равна вероятности того, что в ней содержится не более t_u ошибок

$$P_{\text{пр}} = \sum_{i=0}^{t_u} C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}.$$

Число ошибок t_u и менее исправляется кодом с $d_{\min} \geq 2t_u + 1$.

Вероятность ошибочного декодирования кодовой комбинации

$$1 - P_{\text{пр}} = P_{\text{ош кк}} = 1 - \sum_{i=0}^{t_{\text{з}}} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Эквивалентная вероятность ошибки

$$P_{\text{з}} = 1 - (1 - P_{\text{ош кк}})^{\frac{1}{m}},$$