ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ И ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

ХНУРЭ, факультет **КИУ**, каф **ЭВМ**,
Тел. 70-21-354. Доц. Торба А.А.

ОСНОВНЫЕ ТЕМЫ ЛЕКЦИИ

- ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ
- ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИ-НИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ
- СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕС-КИХ СИГНАЛОВ
- ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИО-ДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ
- СОГЛАСОВАНИЕ СИГНАЛОВ И КАНАЛОВ СВЯЗИ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

- **ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ** предназначенны для передачи, преобразования и хранения информации. К этой группе можно отнести: связные, телемеханические, навигационные, телевизионные системы, электронно-вычислительную и информационно-измерительную технику, автоматизированные системы управления и контроля.
- **ТЕОРИЕЙ ИНФОРМАЦИИ** называется раздел кибернетики, в котором математическими методами изучаются способы измерения количества информации, содержащейся в каких-либо сообщениях, и способы ее передачи.

- Под **ИНФОРМАЦИЕЙ** понимают «совокупность сведений о каких-либо событиях, процессах, объектах управления и т.п., рассматриваемых в аспекте их **передачи** в пространстве и во времени».
- В более общем смысле «**ИНФОРМАЦИЯ** - это содержание связи между материальными объек-тами, проявляющееся в изменении состояний этих объектов».
- «**ИНФОРМАЦИЯ** выступает, как свойство объектов порождать многообразие состояний, которые посредством отражения **передаются** от одного объекта к другому».

- При всех различиях в трактовке понятия **ИНФОРМАЦИЯ**, бесспорно то, что проявляется информация всегда в материально-энергетической форме в виде **СИГНАЛОВ**.
- Возможно и взаимосвязанное определение **СИГНАЛА** как материального носителя информации. Материальную основу **СИГНАЛА** составляет какой-либо физический объект или процесс, называемый носителем (или переносчиком) информации (сообщения).
- В качестве **НОСИТЕЛЕЙ ИНФОРМАЦИИ** используются колебания различной природы, чаще всего гармонические, включая частный случай - постоянное состояние ($f = 0$).

Структурная схема системы передачи информации

- Под **Каналом Связи** понимают любой способ передачи сигналов во **времени** или **пространстве**:
- возможна передача информации в **ПРОСТРАНСТВЕ** с максимальной скоростью (скоростью света) - телевидение, электрические, оптические и др. каналы связи;

- возможна передача информации только во **ВРЕМЕНИ** - запись и воспроизведение информации на магнитные или оптические диски и др. носители;
- возможна передача информации во **ВРЕМЕНИ** и в **ПРОСТРАНСТВЕ**: запись информации на твердый носитель и воспроизведение ее в другом месте.

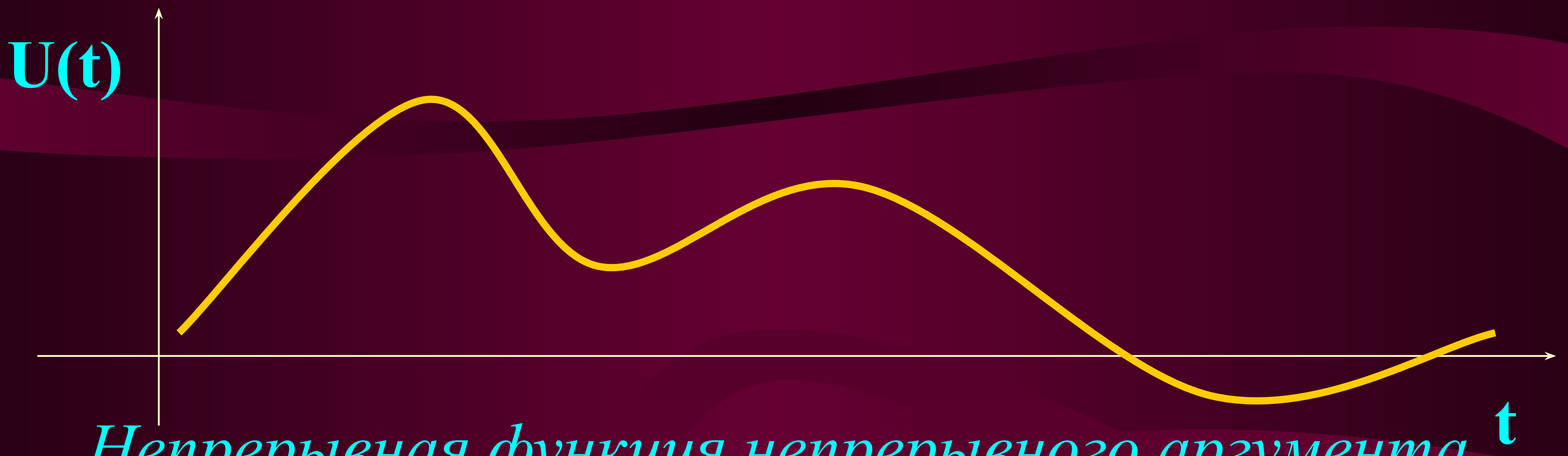
- Электрические сигналы принято подразделять на: детерминированные и случайные.
- **ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ** называют сигналы, параметры которых точно определены в любые моменты времени (даже для моментов времени в будущем).
- **СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ** отличаются тем, что значения их некоторых параметров предсказать невозможно.
- **Случайные сигналы** разделяются на **ПОЛЕЗНЫЕ** (информационные) - несущие интересующую нас информацию; и на **ПОМЕХИ**, которые мешают наблюдению интересующих нас полезных сигналов.

- **ПОЛЕЗНЫЕ СИГНАЛЫ** являются принципиально **случайными колебаниями**, т.к. источник сообщений выдает каждое сообщение с некоторой вероятностью и предсказать точно изменения значений информативного параметра невозможно.
- Например: записав на самописец изменения температуры, передаваемые по каналу связи, мы получим одну из реализаций **случайного сигнала**.
- Наблюдая на осциллографе передаваемый сигнал речи или музыки, мы также получаем реализации **случайного сигнала**.
- С точки зрения теории информации **детерминированный сигнал**, т.е. сигнал, у которого известны все параметры, нет смысла передавать.

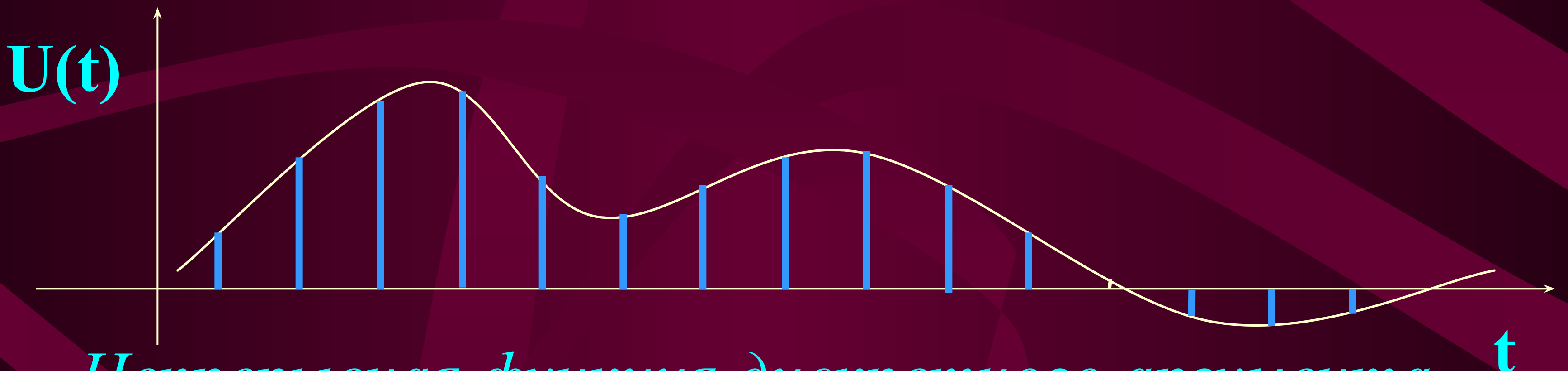
- Тем не менее, **детерминированные сигналы** необходимо изучать, т.к. результаты анализа детерминированных сигналов являются основой для изучения более сложных **случайных сигналов**.
- **Детерминированные сигналы** иногда специально создаются и передаются для целей измерения, наладки и регулировки каналов передачи информации, исполняя роль **эталонов**. Например: тестовые таблицы в телевидении.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

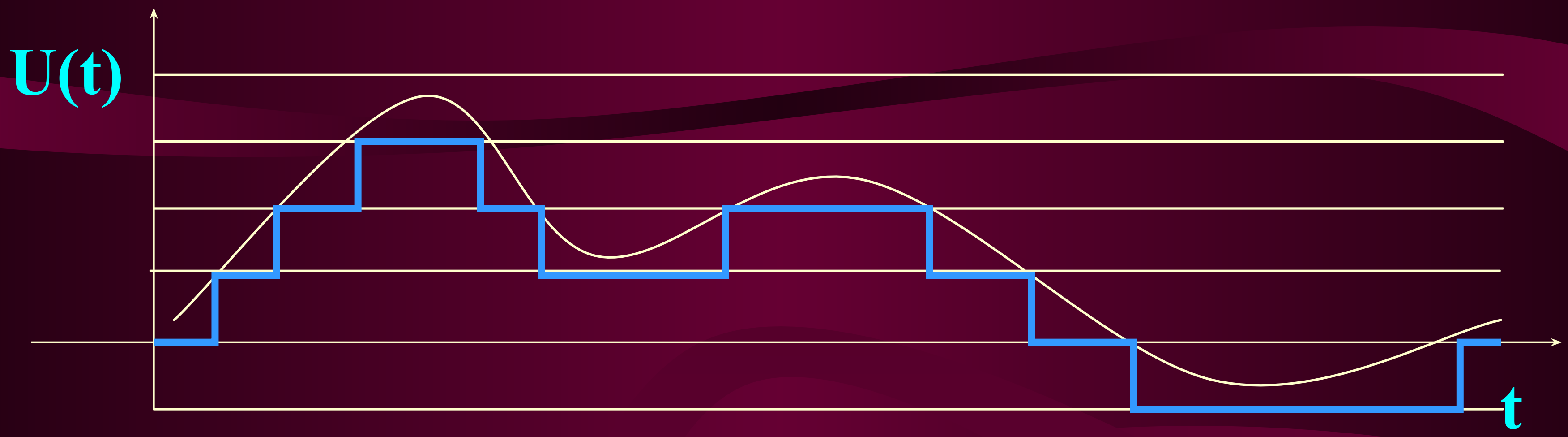
- В зависимости от структуры информационных параметров сигналы подразделяются на: **дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.**
- Сигнал считают **ДИСКРЕТНЫМ** по данному параметру, если число значений, которое может принимать этот параметр, - конечно.
- Если множество возможных значений параметра образуют континуум, то сигнал считают **НЕПРЕ-РЫВНЫМ** по данному параметру.
- Сигнал, дискретный по одному параметру и непрерывный по другому, - называют **ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫМ.**



Непрерывная функция непрерывного аргумента, например: непрерывная функция времени



Непрерывная функция дискретного аргумента, например функция, значения которой отсчитывают в отдельные (дискретные) моменты времени;



Дискретная (квантованная) функция непрерывного аргумента, например: времени

Дискретная функция дискретного аргумента

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

- Рассмотренные **математические модели** сигналов отражают изменение их параметра (уровня) **во времени**. На экране **осциллографа** можно наблюдать такие изменения уровня сигнала во времени.
- Известно, что с помощью математического преобразования **Фурье** каждой **временной функции** можно поставить в соответствие ее отображение в виде **частотного спектра**. Существуют приборы - спектроанализаторы, которые позволяют наблюдать **спектральные** (частотные) **характеристики сигналов.**

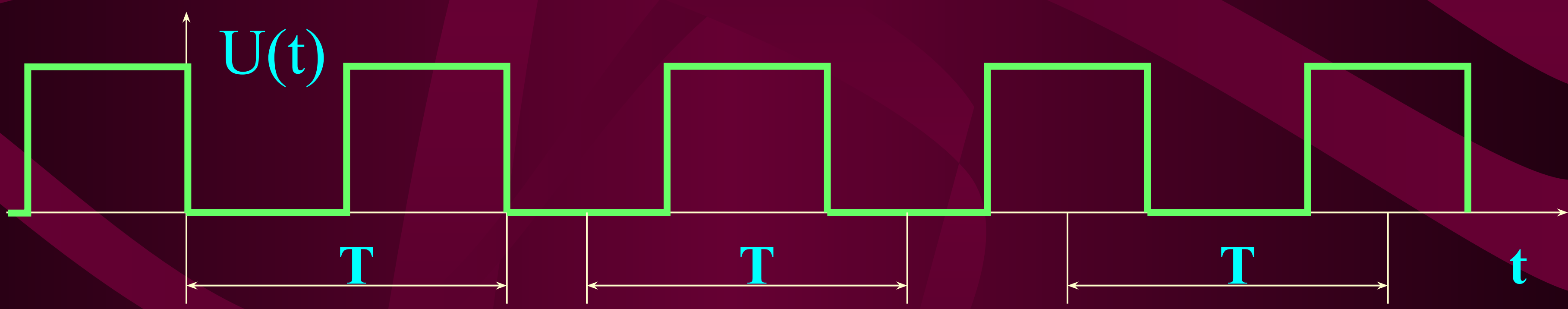
- Таким образом, одни и те же сигналы можно наблюдать во **временном** или **спектральном** (частотном) базисе.
- Это два разных **способа представления** (описания, анализа) сигналов, между которыми существует **однозначное соответствие**, т.е. каждому **временному** представлению сигнала соответствует единственное **спектральное** (частотное) представление и наоборот.

- Периодическим сигналом будем называть сигнал, для которого справедливо равенство:
- , $$U(t) = U(t + nT) \qquad (1.1)$$

где: ***n*** - **целые числа** от $-\infty$ до $+\infty$;

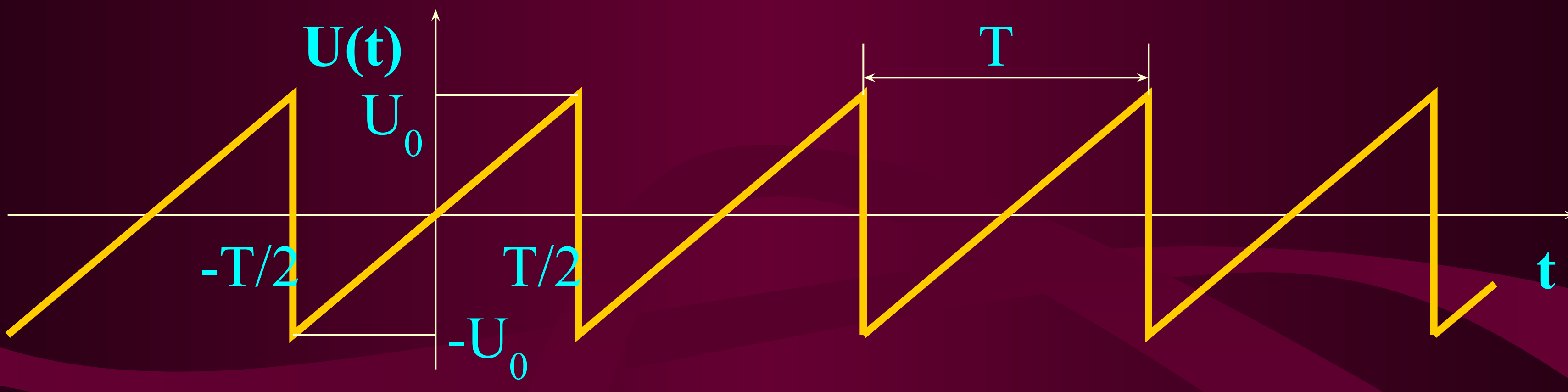
T - **период функции** (расстояние между двумя одноименными точками).

- Простейший пример периодической функции - **МЕАНДР**:

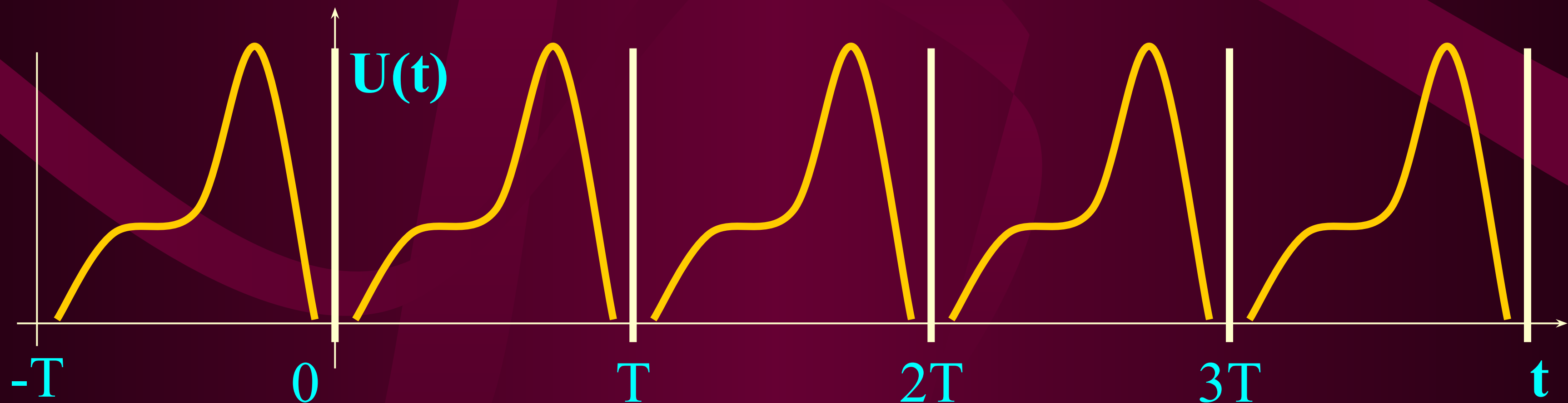


Периодическая функция - меандр

В пределах одного периода эти функции могут иметь произвольную форму:



При **спектральном анализе** периодических сигналов подразумевается, что сигнал существует **во времени** от **-∞** до **+∞.**



Временную периодическую функцию *U(t)* можно представить в виде **дискретного спектра**:

- ,

$$U(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S^{*}(k\varpi_{0})*e^{jk\varpi_{0}t} \qquad (1.2)$$

где:

$$S^{*}(k\varpi_{0})=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}U(t)*e^{-jk\varpi_{0}t}dt \qquad (1.3)$$

В этих формулах : ***T*- период** временной функции;

k – аргумент (целые числа от **- ∞** до **+∞)**;

- , -

$$\varpi_{0}=2\cdot\pi\cdot f=2\cdot\pi/T \qquad (1.4)$$

круговая частота периодического сигнала (она однозначно определяется **периодом сигнала *T***).

- Преобразование **(1.3)** называют **ПРЯМЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ** для периодических сигналов. Формула **(1.2)** - **ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.**

- Функцию $S^*(k\varpi_0)$ принято называть **КОМПЛЕКСНЫМ СПЕКТРОМ** периодического сигнала ***U(t)*****.** Этот спектр - **ДИСКРЕТНЫЙ**, т. к.

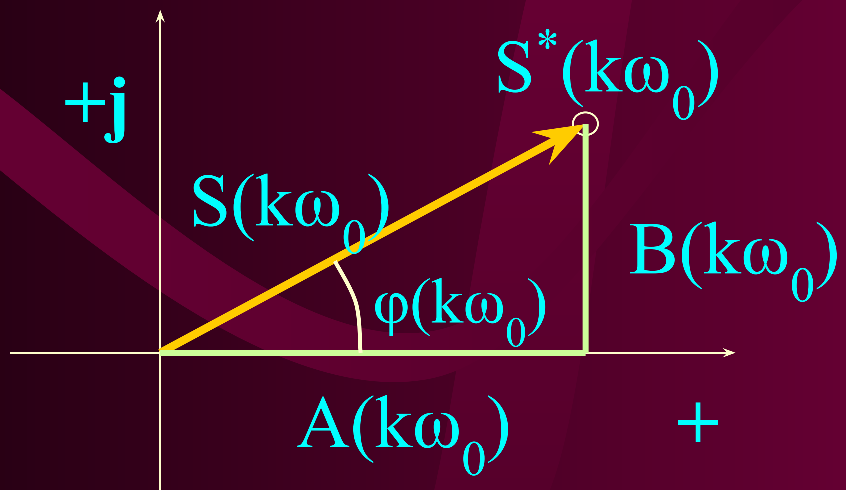
функция $S^*(k\varpi_0)$ определена на частотной оси только для целых значений ***k*****.** Значение функции при конкретных значениях ***k*** называется **КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДОЙ** спектра.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА (в отличие от обычных, действительных) имеют **два параметра**. Эти числа можно представить в **показательной форме**:

- $$S^{*}(k\varpi_0) = S(k\varpi_0) * e^{j\varphi(k\varpi_0)}, \quad (1.5)$$

где : $S(k\varpi_0)$ - спектр амплитуд (модули комплексных чисел),

$\varphi(k\varpi_0)$ - спектр фаз (фазы комплексных чисел)



Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексные числа можно представить двумя параметрами и в **алгебраической форме** :

$$S^*(k\varpi_0) = A(k\varpi_0) + jB(k\varpi_0), \quad (1.6)$$

где:
$$A(k\varpi_0) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t) * \cos(k\varpi_0 t)dt, \quad (1.7)$$

$$B(k\varpi_0) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} U(t) * \sin(k\varpi_0 t)dt. \quad (1.8)$$

Формула (1.7) называется **КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ**, а формула (1.8) - **СИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ**.

Если **временное представление** сигнала ***U(t)*** является ***четной функцией времени***, то синус-преобразование Фурье равно **нулю**: ***$B(k\omega_0)=0$***.

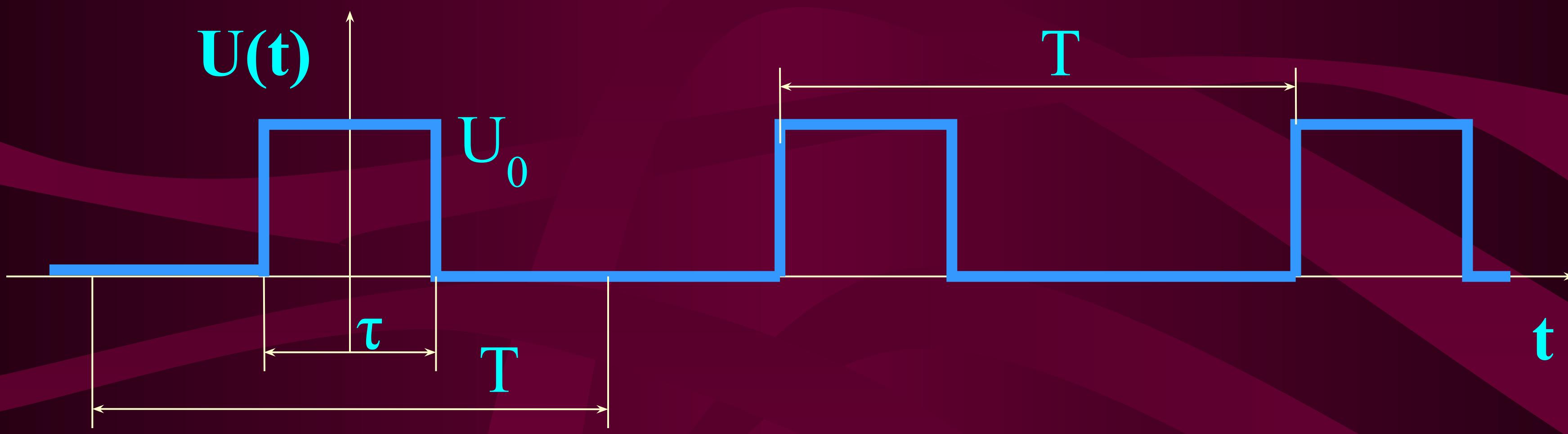
Если ***U(t)*** - ***нечетная функция времени***, то нулю равно косинус-преобразование Фурье: ***$A(k\omega_0)=0$***.

Известны формулы перехода от **алгебраической** формы представления комплексного числа к **показательной**:

$$S(k\varpi_0)=\sqrt{A^2(k\varpi_0)+B^2(k\varpi_0)}, \tag{1.9}$$

$$\varphi(k\varpi_0)=arctg\,\frac{B(k\varpi_0)}{A(k\varpi_0)} \tag{1.10}$$

- **ПРИМЕР – 1:** Рассчитаем **спектры** амплитуд и фаз периодической последовательности прямоугольных импульсов, длительностью $\boldsymbol{\tau}$, амплитудой $\boldsymbol{U_0}$ и периодом $\boldsymbol{T}$:

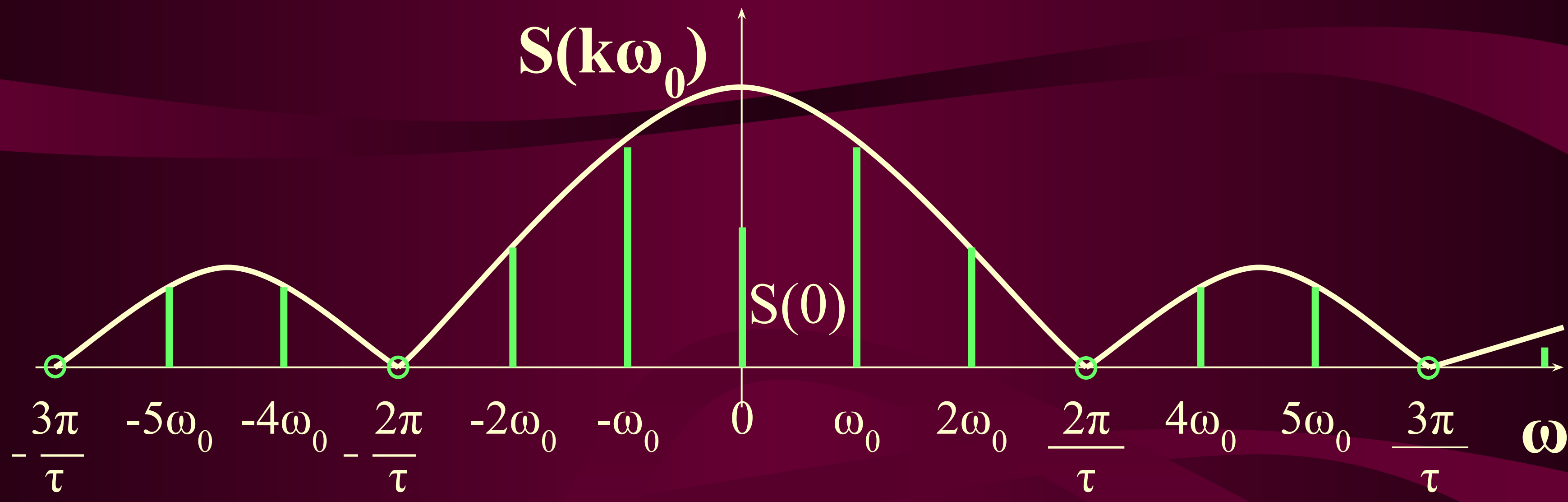


$$S^*(k\varpi_0) = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 * e^{-jk\varpi_0 t}\,dt$$

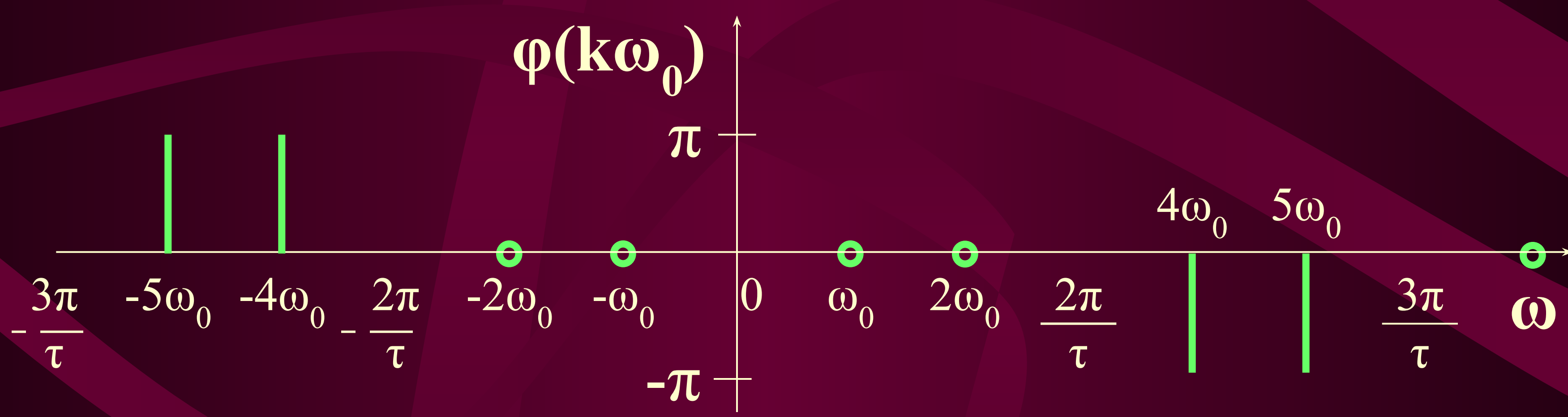
$$S^*(k\varpi_0) = 2\frac{\tau}{T}U_0\frac{sin(k\varpi_0\tau/2)}{k\varpi_0\tau/2} = \frac{2U_0}{Q} * \frac{sin(k\varpi_0\tau/2)}{k\varpi_0\tau/2}$$

- $Q = T / \tau$ - скважность импульсов.
- **Огибающая спектра амплитуд** (пунктирная линия на рис.) изменяется по закону $(\sin x) / x$. На частотах спектра, кратных
- $\omega = 2\pi / \tau = \omega_0 T / \tau = \omega_0 Q$,

огибающая модуля спектра амплитуд равна нулю. Приведенный на рис. модуль спектра амплитуд соответствует **скважности** прямоугольных импульсов, равной : $Q = 3$. Составляющие спектра (гармоники) с номером, **кратным** Q, обращаются в нуль. Если скважность (а также кратные ей числа) выражены дробными числами, то в нуль не обращаются соответствующие составляющие спектра.

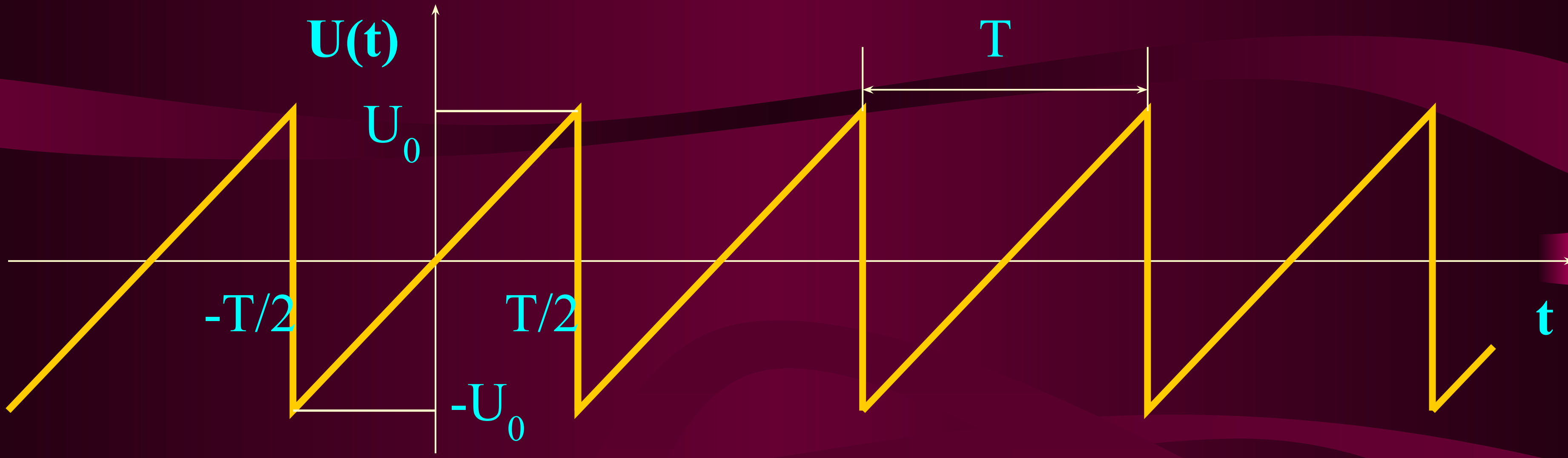


Модуль спектра прямоугольного периодического сигнала



Фаза спектра прямоугольного периодического сигнала

- Составляющие спектра до первого нуля огибающей имеют **фазы**, равные **нулю**. После каждого перехода огибающей спектра амплитуд через нуль фазы гармонических составляющих изменяются на **180°.**
- **Постоянная составляющая** сигнала - ***S(0)*** равна средней **площади** импульса в пределах одного периода.

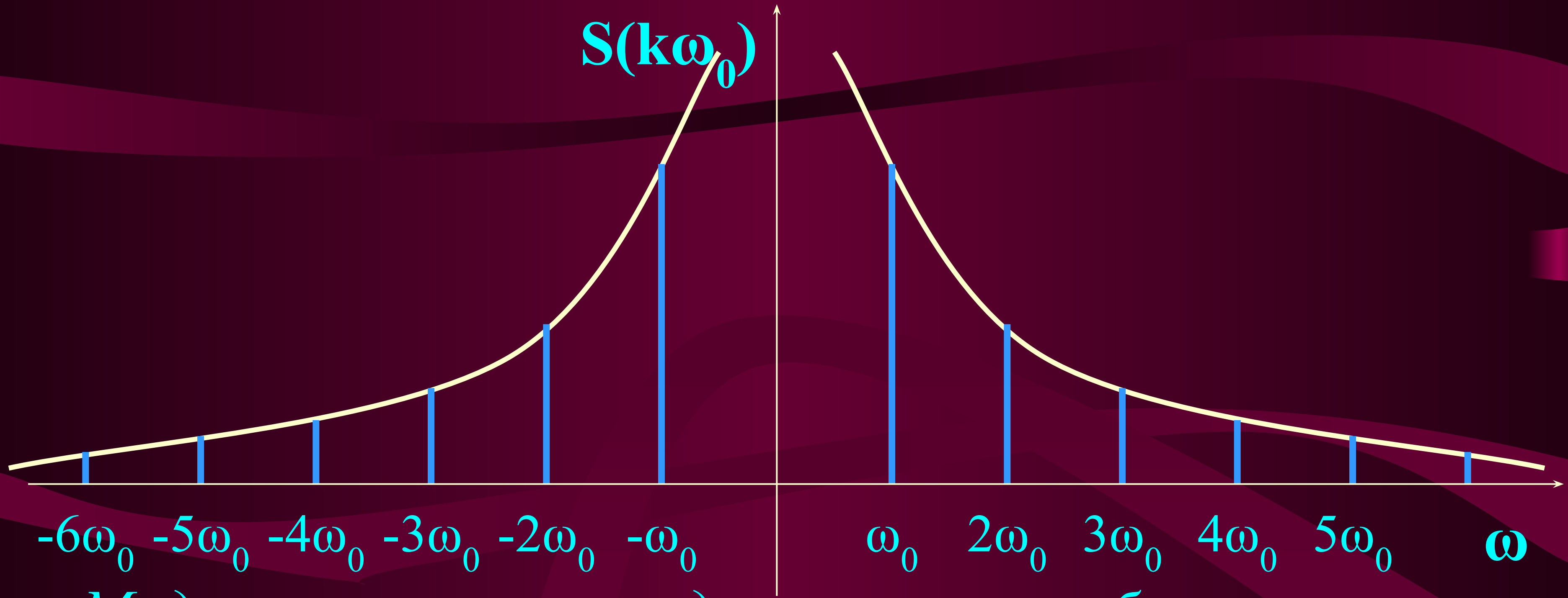


- Для пилообразного сигнала, заданного временной функцией в пределах одного периода:

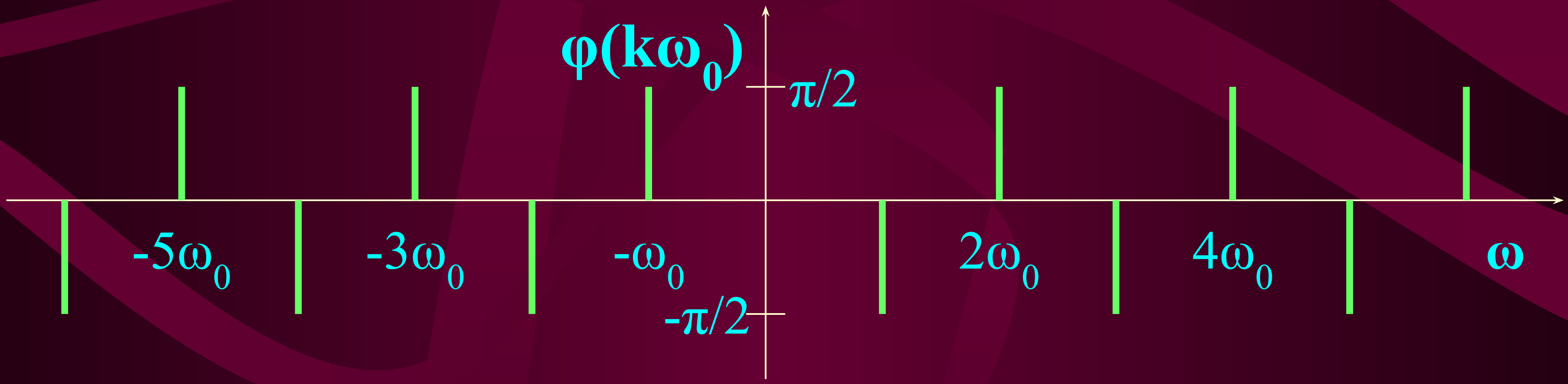
- , $U(t) = U_0 \frac{t}{T/2}$ при : $-T/2 < t < T/2$

комплексный дискретный спектр равен :

$$S^*(k\varpi_0) = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T/2} U_0 \frac{t}{T/2} * e^{-jk\varpi_0 t}\,dt = j\frac{2}{\pi}U_0 \frac{\cos(k\pi)}{k}$$



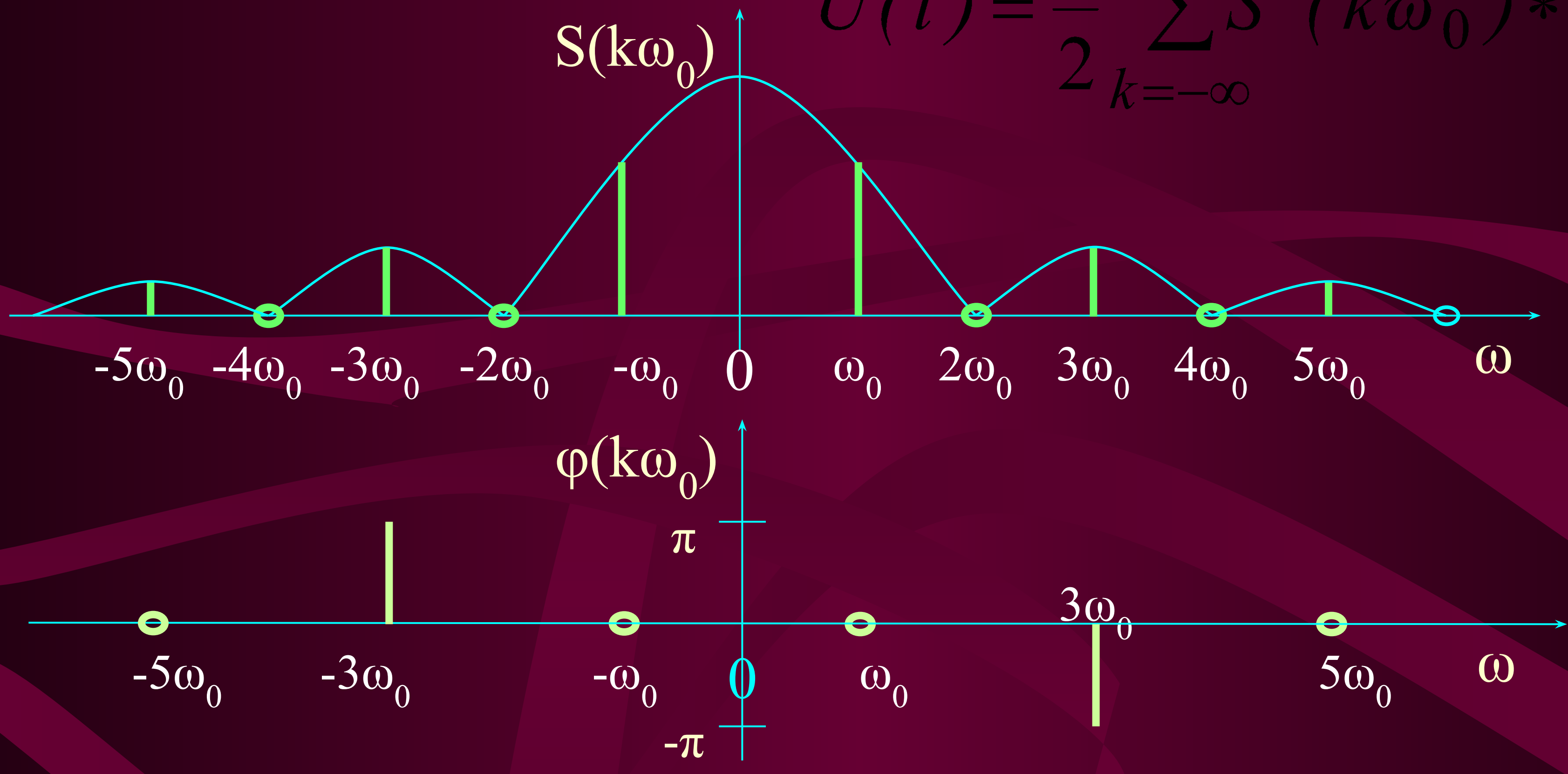
Модуль спектра периодического пилообразного сигнала



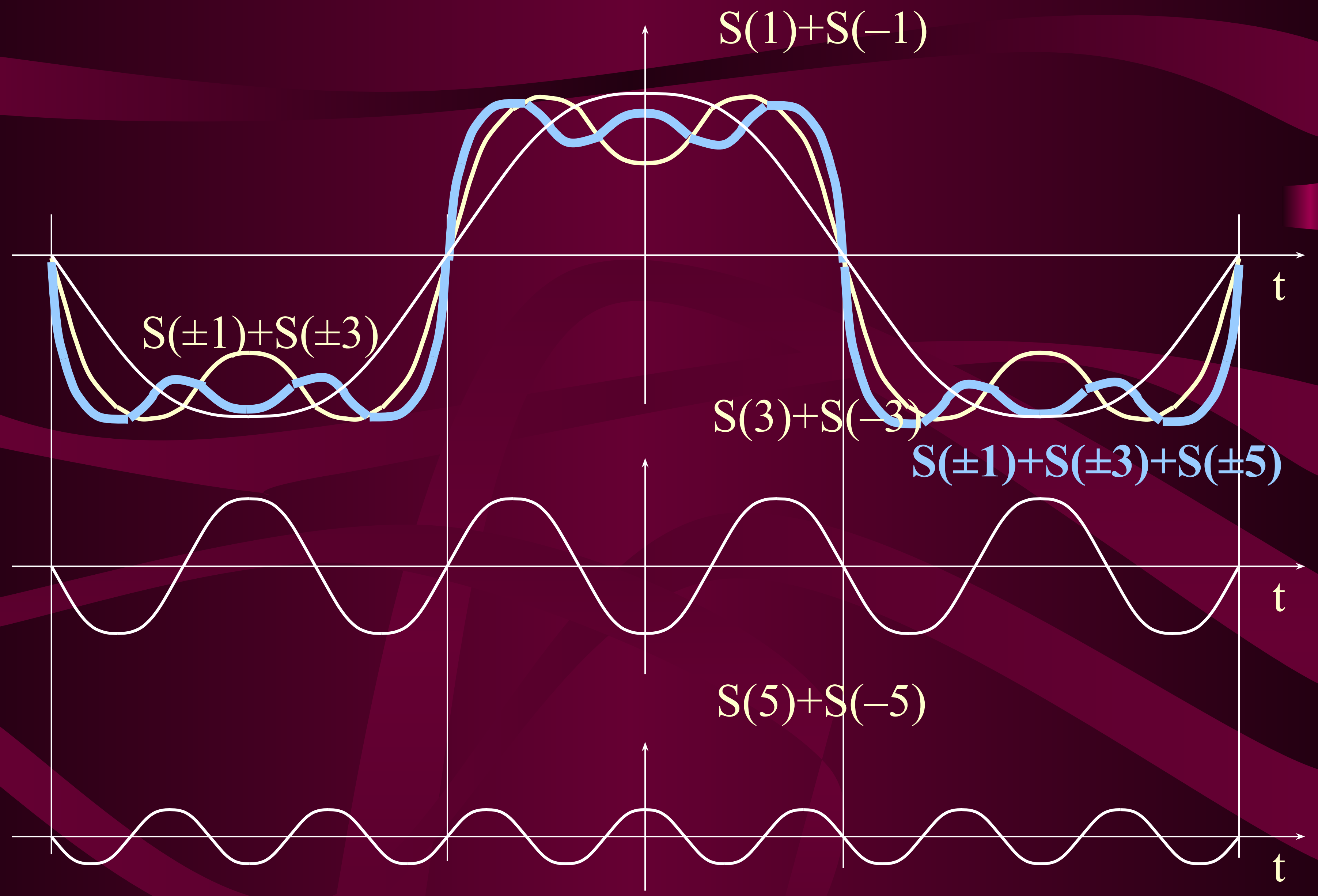
Фаза спектра периодического пилообразного сигнала

ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

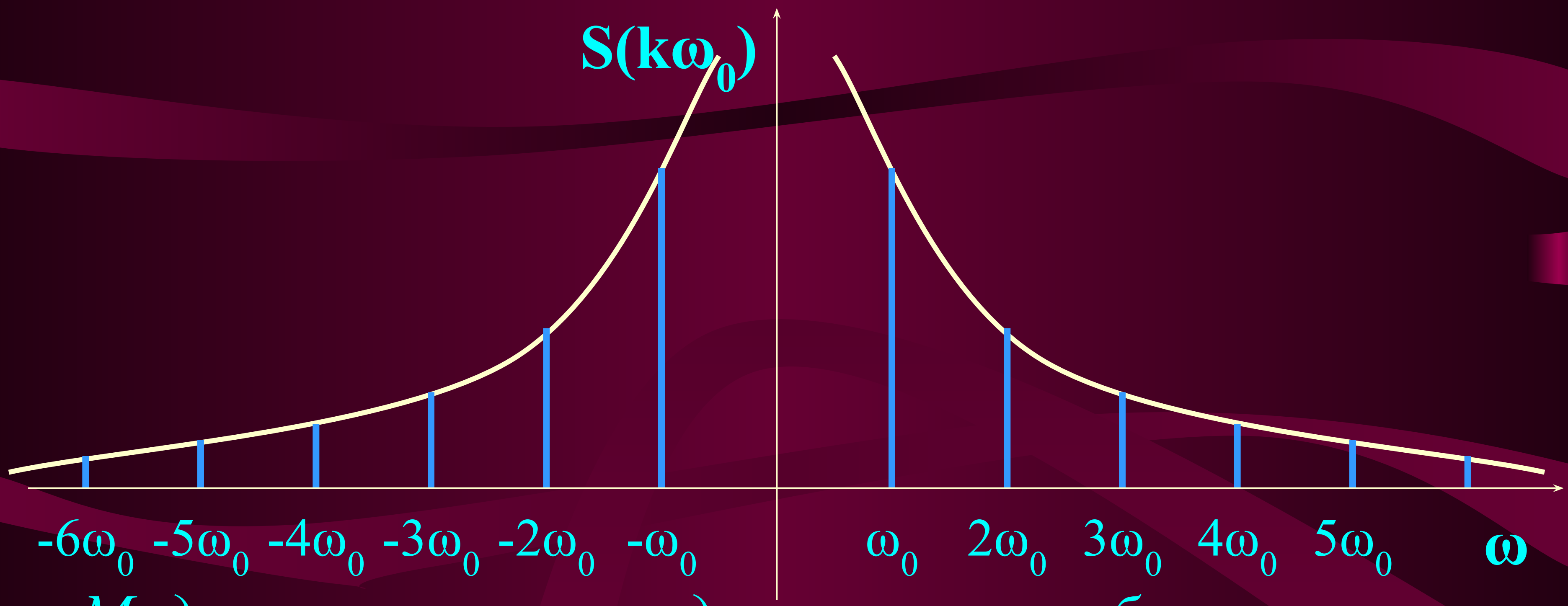
$$U(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S^{*}(k\varpi_0)*e^{jk\varpi_0 t}$$



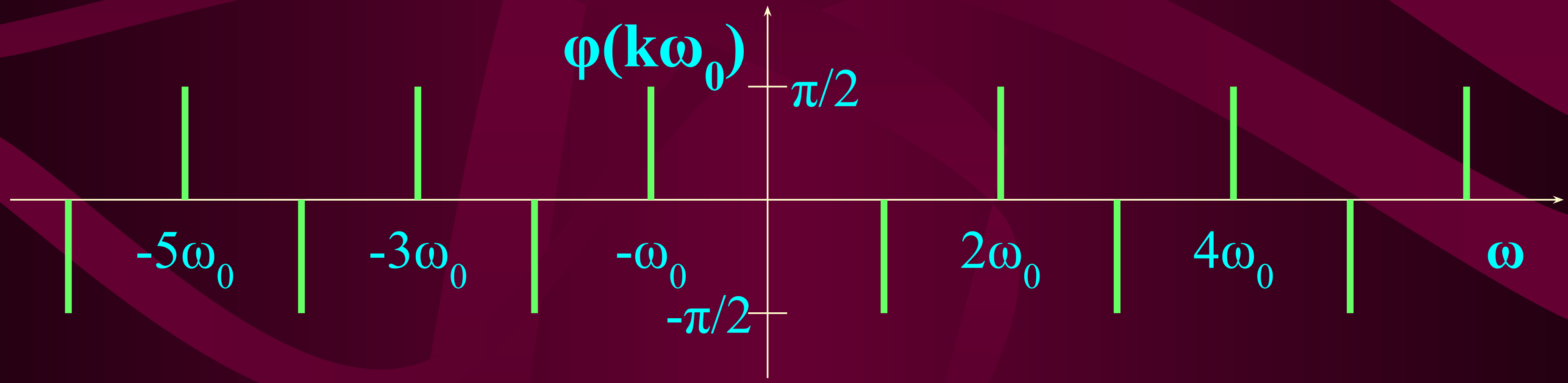
$$1/2[S(1)*e^{j\omega_0 t}+S(-1)*e^{-j\omega_0 t}]=S(1)*\cos(\omega_0 t)$$



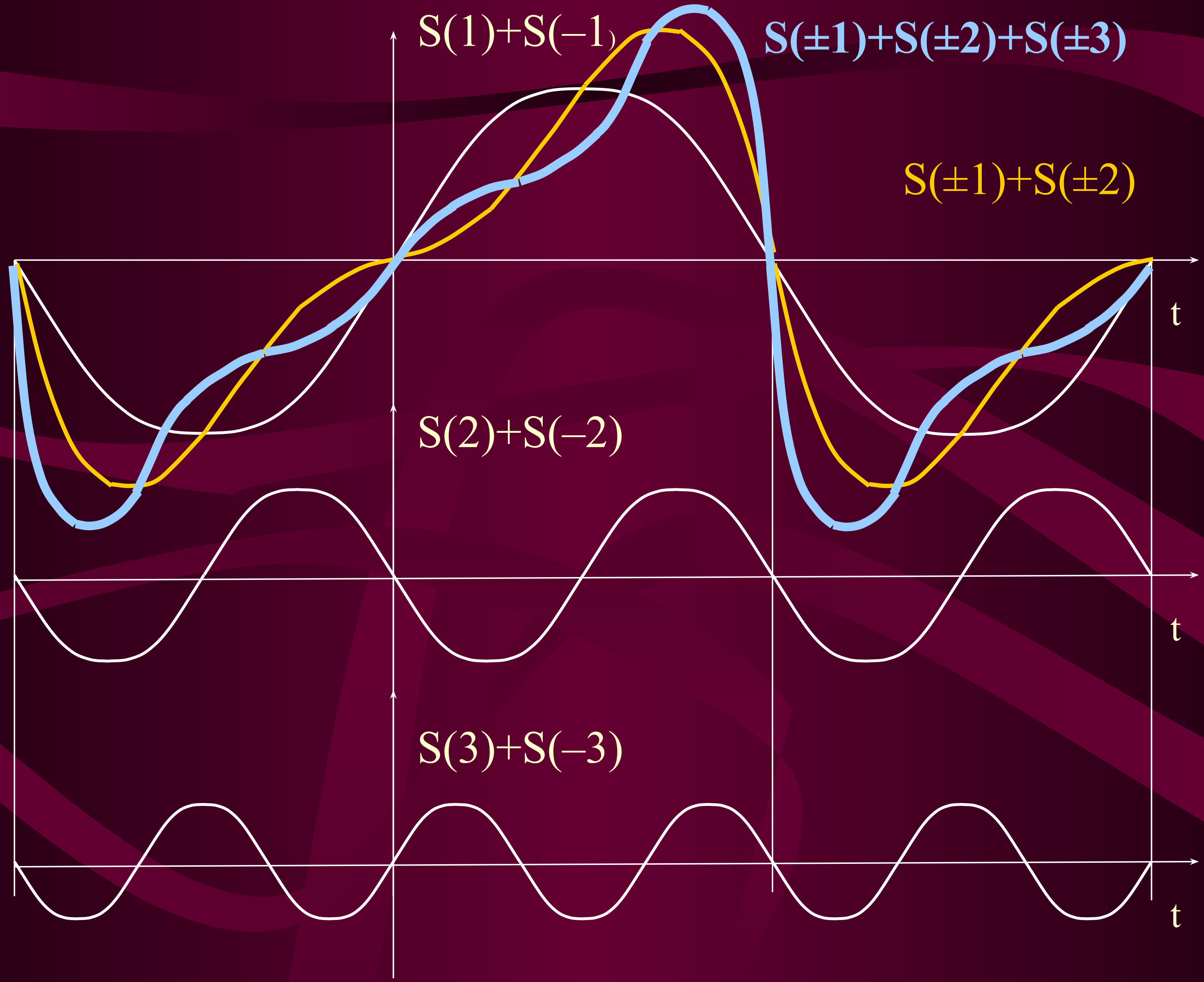
S(1)+S(–1)
S(±1)+S(±3)
S(3)+S(–3)
S(±1)+S(±3)+S(±5)
S(5)+S(–5)
t
t
t



Модуль спектра периодического пилообразного сигнала



Фаза спектра периодического пилообразного сигнала

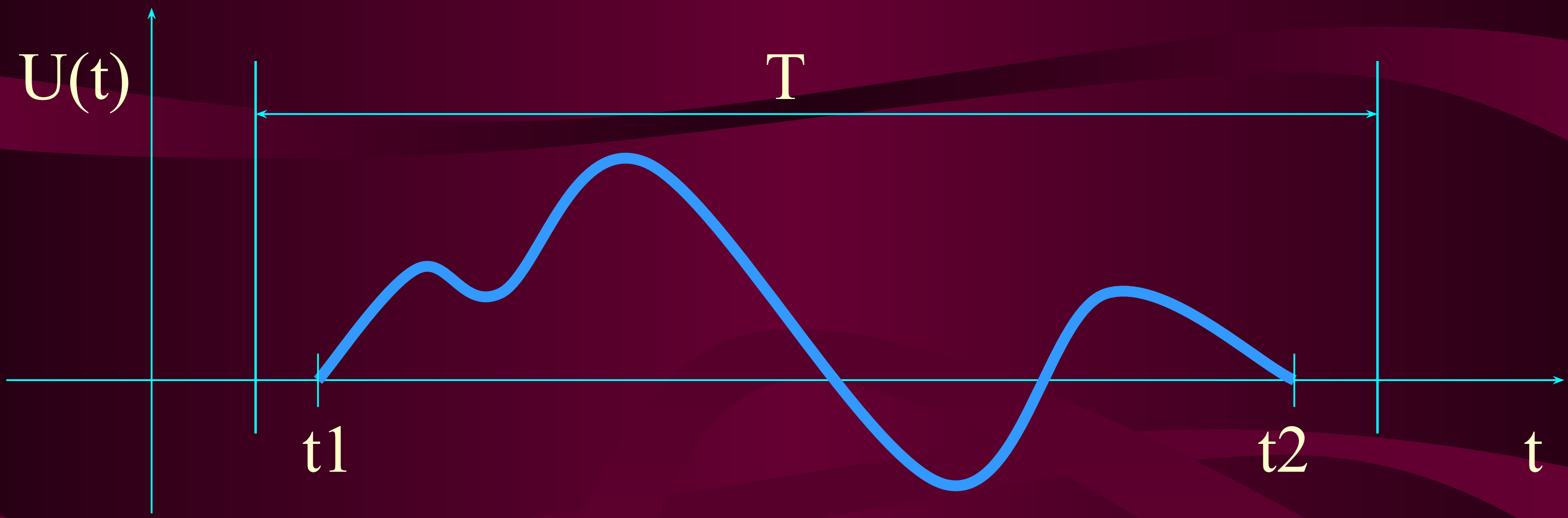


S(1)+S(–1)
S(±1)+S(±2)+S(±3)
S(±1)+S(±2)
t
S(2)+S(–2)
t
S(3)+S(–3)
t

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

- **Реальные сигналы** конечны во времени, и поэтому не могут считаться **периодичес-кими.** Даже те сигналы, которые мы называем периодическими, имеют начало и конец во времени; и, строго говоря, **периодическими не являются**.

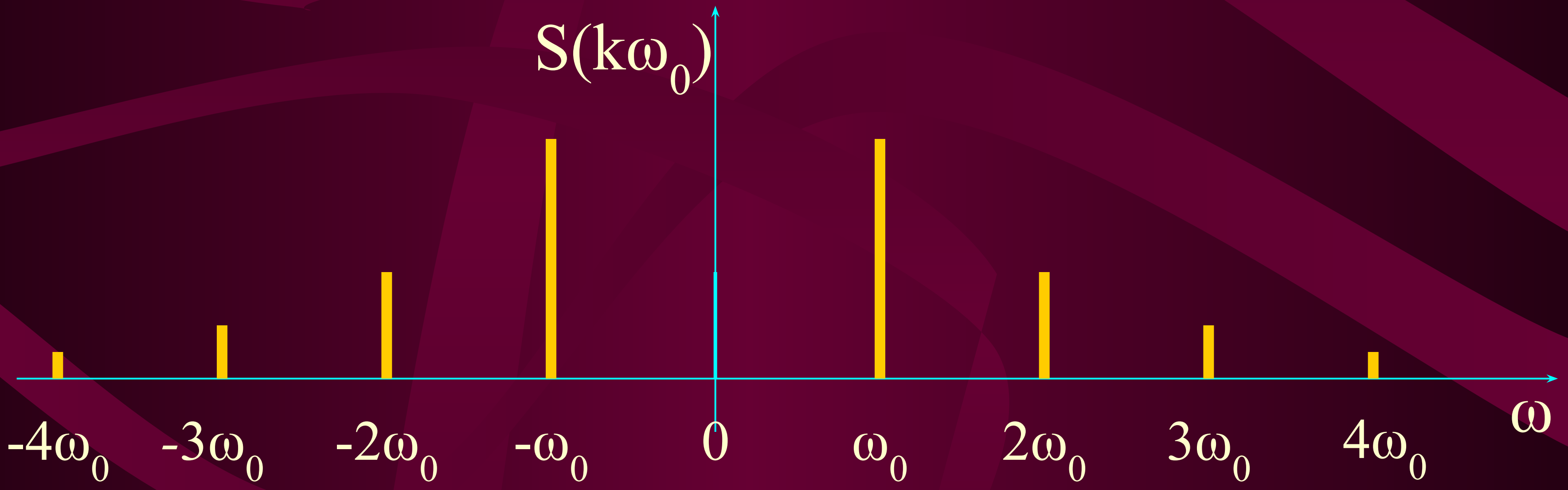
Распространим гармонический (спектральный) анализ на непериодические сигналы.



- Выделим произвольный отрезок времени ***T***, включающий в себя интервал ***t1...t2***, ***на котором сигнал отличен от нуля***. Для этого интервала можно рассчитать дискретный спектр по известной формуле

$$S^{*}(k\varpi_{0}) = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t2} U(t) * e^{-jk\varpi_{0}t}\,dt$$

- Однако, полученный дискретный спектр соответствует периодическому сигналу с периодом T



- Для того, чтобы выбранная модель сигнала соответствовала реальному непериодическому сигналу, необходимо увеличить ***T* от -∞ до +∞.**
- При этом **расстояние между дискретными спектральными составляющими** будет уменьшаться до **нуля**, т.е. получаем **сплошной** (а не дискретный, линейчатый) спектр. Но и **амплитуда** каждой гармонической (спектральной) составляющей стремится к **нулю**.
- Расстояние между спектральными составляющими: $\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi/T}$ превращается в бесконечно малую величину, и ее представляют в виде «$\boldsymbol{d\omega}$». Последовательность спектральных составляющих с частотами $\boldsymbol{k\omega_0}$ становится сплошной (континуумом) с текущим параметром «$\boldsymbol{\omega}$».

- Поскольку спектральные составляющие ***$S^*(k\omega_0)$*** и расстояние между ними ***$d\omega_0 = 2\pi/T$*** превращаются в **бесконечно малые**, и оперировать ими при работе с реальными сигналами неудобно, вводят новое понятие – **СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ** или **СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА**:

$$S^*(\varpi) = \frac{S^*(k\varpi)}{d\varpi} = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) * e^{-j\varpi t} dt$$

- Хотя интервал интегрирования задан в бесконечных пределах, но реально сигнал ***U(t)*** **отличен от нуля** только в интервале ***t1..t2***, и интегрирование необходимо проводить только в этом интервале.

- Аналогично, как и с периодическими сигналами, **ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ** для непериодических сигналов имеет вид:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\varpi) * e^{j\varpi t} d\varpi$$

- Аналогично с периодическими сигналами можно представить комплексную функцию в показательном или алгебраическом виде:

$$S^*(\varpi) = S(\varpi) * e^{j\varphi(\varpi)} = A(\varpi) + jB(\varpi)$$

- где:

$$A(\varpi) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) * \cos(\varpi t) \cdot dt$$

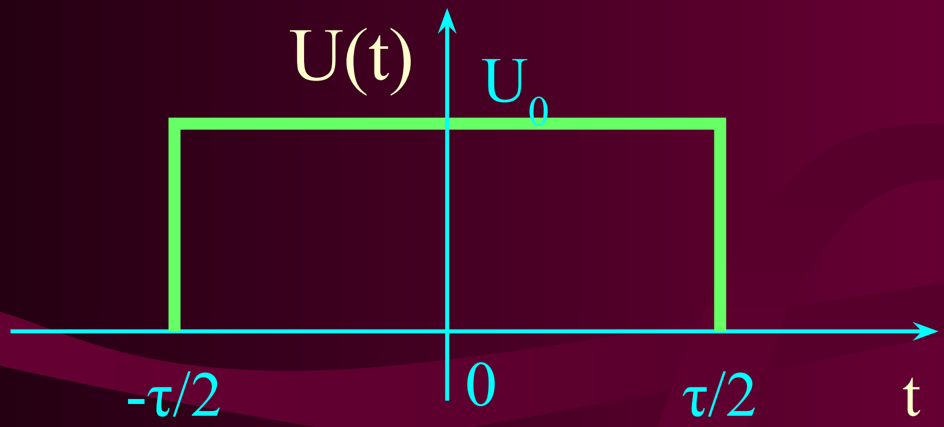
$$B(\varpi) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) * \sin(\varpi t) \cdot dt$$

- Справедливы также формулы перехода от **алгебраической** формы представления комплексных чисел – в **показательную**:

$$S(\varpi) = \sqrt{A^2(\varpi) + B^2(\varpi)}$$

$$\varphi(\varpi) = arctg \frac{B(\varpi)}{A(\varpi)}$$

- **Задача 1.3** – Определим спектральную плотность одиночного прямоугольного импульса

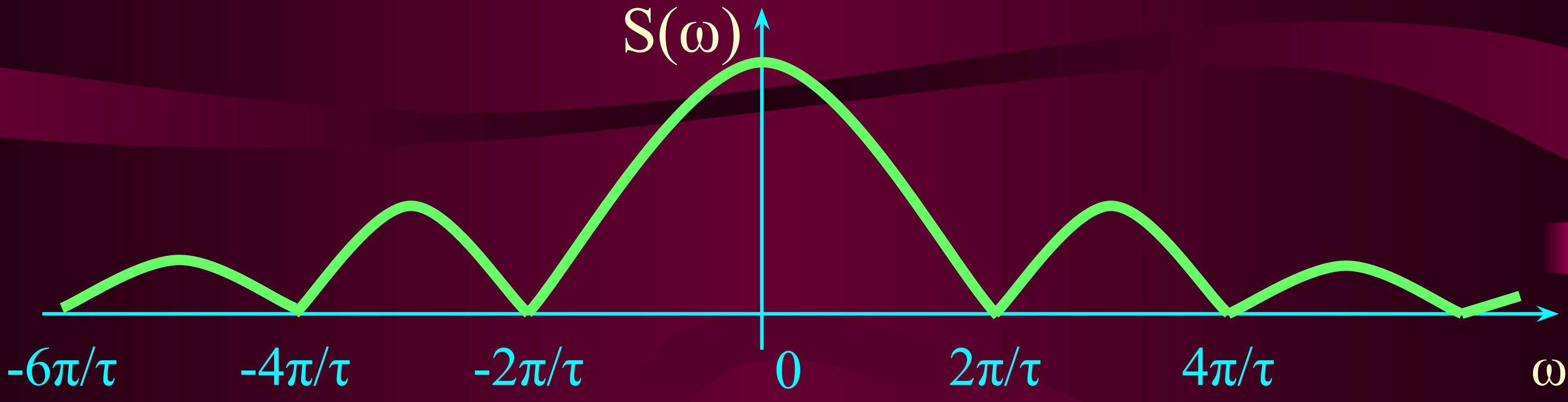


$U(t) = U_0$ при: $-\tau/2 \le t \le \tau/2$

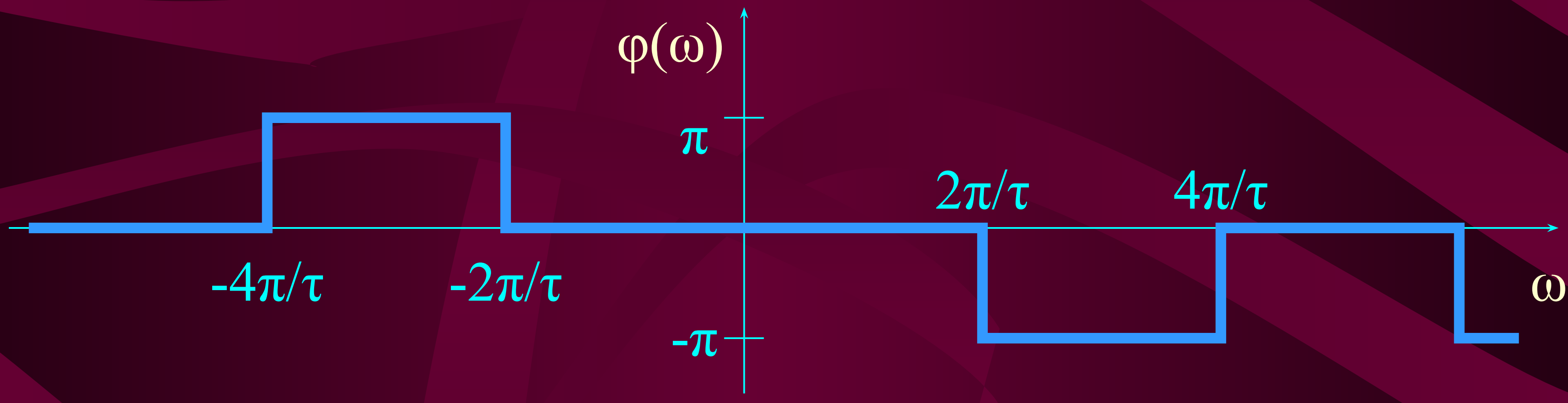
$U(t) = 0$ при остальных t.

$$S^*(\varpi) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 * e^{-j\varpi t} dt = U_0 * \tau \frac{\sin(\varpi\tau/2)}{\varpi\tau/2}$$

- График **модуля спектральной плотности** одиночного прямоугольного импульса совпадает с огибающей спектра **периодического сигнала**



Модуль спектральной плотности прямоугольного импульса



Фаза спектральной плотности прямоугольного импульса

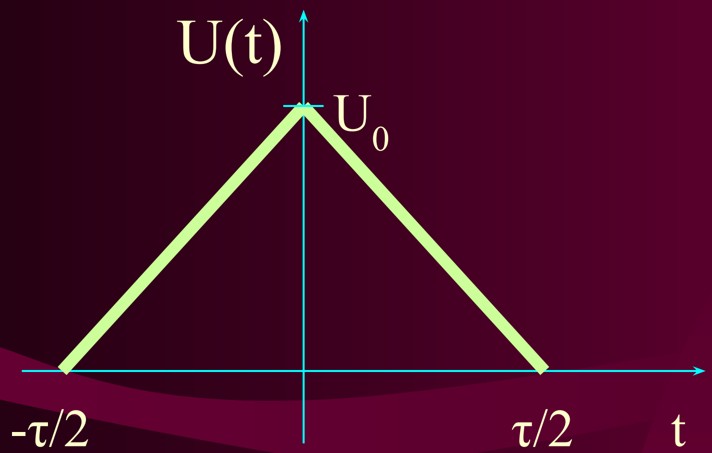
- Отметим интересную особенность **прямого** и **обратного** **ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ**. Их формулы отличаются **постоянным множителем** и знаком фазы. Поэтому можно говорить о **симметрии** прямого и обратного преобразования Фурье.
- Так, сигналу с модулем спектральной характеристики ***S(ω)*** в виде **прямоугольника** будет соответствовать одиночный импульс во временном базисе в виде графика ***sin(x) / x***.

- Для **преобразования Лапласа**, как и для **преобразования Фурье** (которое является частным случаем преобразования Лапласа) справедливы следующие соотношения:

- т.к. преобразования Лапласа и Фурье являются **линейными**, то **алгебраической сумме** исходных функций соответствует **алгебраическая сумма** преобразованных функций;
- если **продифференцировать** исходную функцию, то это соответствует **умножению** ее преобразованной функции **на оператор** (для преобразования Лапласа – «p», для преобразования Фурье – «$j\omega$»);
- аналогично: **интегрированию** исходной функции соответствует **деление** преобразованной (отображенной) функции на оператор (для преобразования Фурье – на «$j\omega$»);
- **сдвиг во времени** исходной функции на «t_0» приводит только к изменению **фазовой характеристики** спектра на величину «ωt_0» :

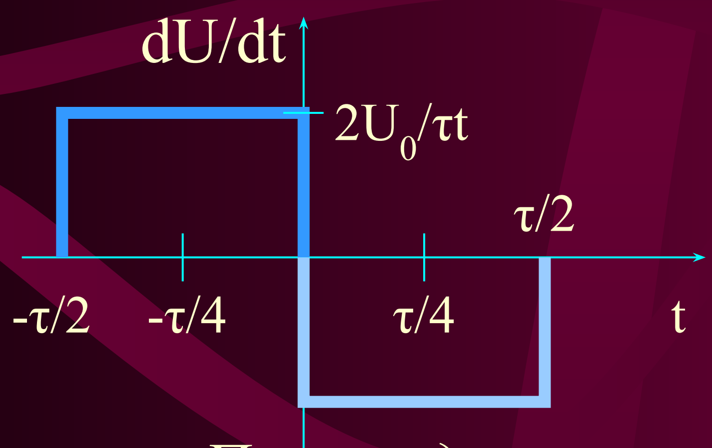
$$S^*(\varpi) = S_1^*(\varpi) * e^{-j\varpi t_0}$$

Применим эти соотношения для расчета спектральной характеристики треугольного импульса



Треугольный импульс

$$U(t)=\begin{cases} U_0\left(\dfrac{t}{\tau/2}+1\right); при -\tau/2\le t\le 0 \\ U_0\left(1-\dfrac{t}{\tau/2}\right); при 0\le t\le \tau/2 \end{cases}$$



Производная треугольного импульса

Спектральная характеристика для **положительного импульса:**

$$S1(\varpi)=\frac{U_0}{\tau/2}*\frac{\tau}{2}*\frac{\sin(\varpi\tau/4)}{\varpi\tau/4}*e^{j\varpi\tau/4}.$$

- Для отрицательного импульса спектральная характеристика имеет вид:

$$S2(\varpi) = -U_0 * \frac{\sin(\varpi\tau/4)}{\varpi\tau/4} * e^{-j\varpi\tau/4}$$

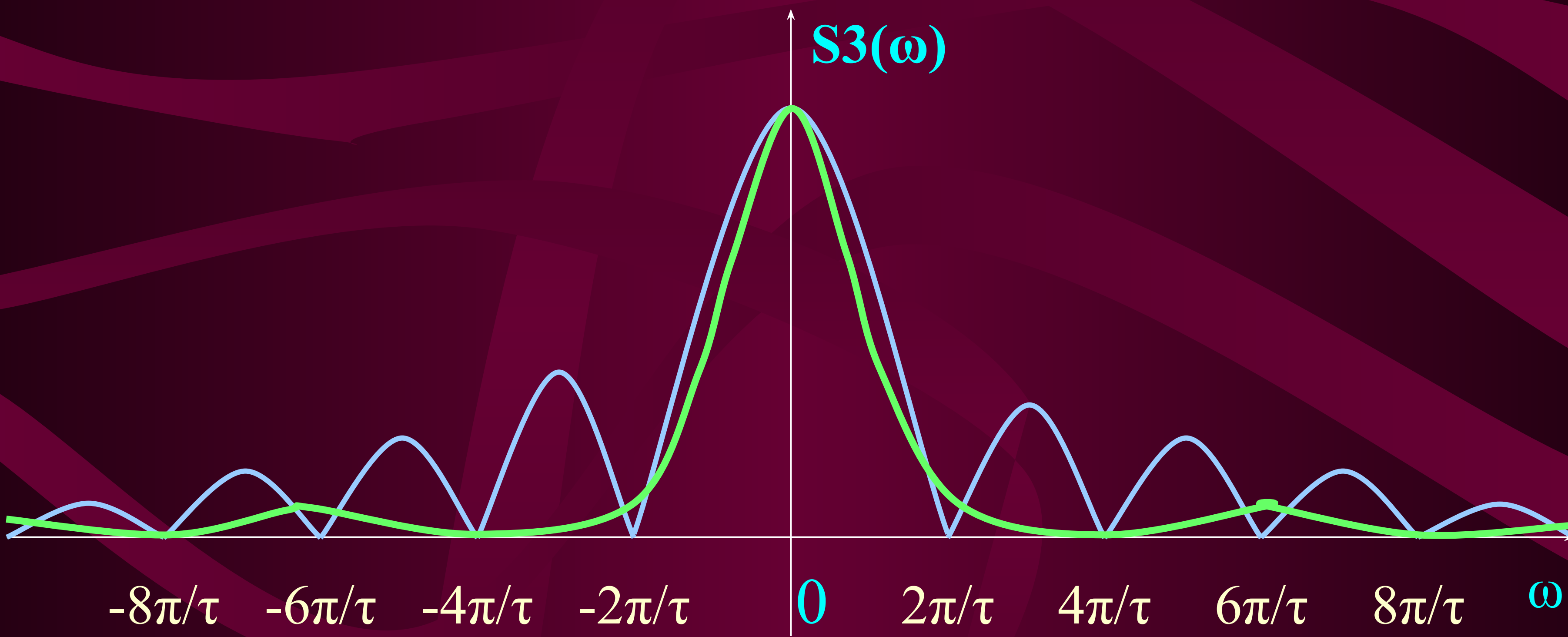
- Суммарная спектральная характеристика двух импульсов:

$$S1(\varpi) + S2(\varpi) = U_0 \frac{\sin(\varpi\tau/4)}{\varpi\tau/4} * (e^{j\varpi\tau/4} - e^{-j\varpi\tau/4}) =$$

$$= j2U_0 \frac{\sin^2(\varpi\tau/4)}{\varpi\tau/4}$$

• Спектральная плотность *S3* треугольного импульса

$$S3(\varpi) = \frac{2U_0}{\varpi} * \frac{\sin^2(\varpi\tau/4)}{\varpi\tau/4} = \frac{U_0\tau}{2}\left(\frac{\sin(\varpi\tau/4}{\varpi\tau/4}\right)^2$$

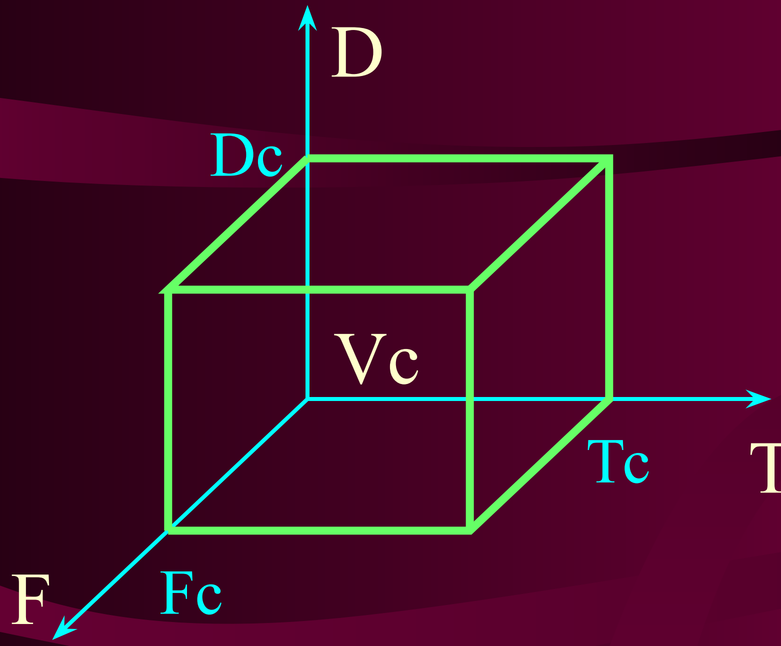


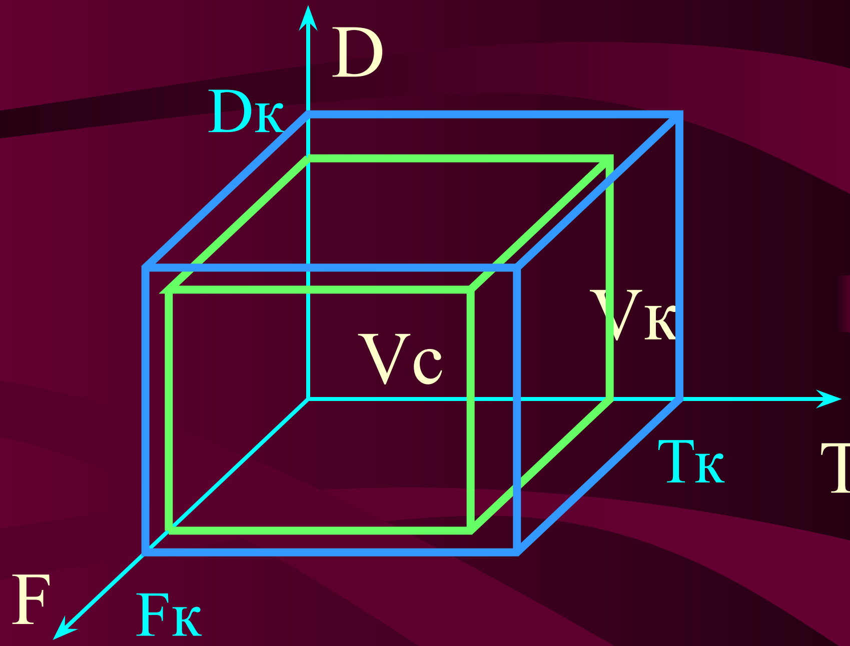
СОГЛАСОВАНИЕ СИГНАЛОВ И КАНАЛОВ СВЯЗИ

- Для неискаженной передачи сигнала необходимо согласование характеристик **канала связи** и **параметров сигнала**, т.е. «**объем сигнала**» V_c должен был **не более** «**объема канала**» $V_к$ (пропускной способности канала передачи информации)

$$V_к = F_к * D_к * T_к \geq V_c = F_c * D_c * T_c$$

- ***Fк*** – полоса частот канала связи;
- ***Fc*** – полоса частот сигнала;
- ***Dк*** – динамический диапазон канала связи;
- ***Dc*** – динамический диапазон сигнала;
- ***Tк*** – время работы канала связи;
- ***Tc*** – длительность сигнала.





- Это условие является **необходимым**, но не **достаточным** условием согласования сигнала с каналом. **Достаточное условие**:

Tк ≥ Tc; Fк ≥ Fc; Dк ≥ Dc.

- Если одно из этих условий не выполняется, но выполняется **основное условие** (***Vк ≥ Vс***), возможна передача информации с **преобразованием сигнала**.
- Например, если **полоса сигнала *Fс*** больше полосы **канала связи *Fк***, возможна предварительная запись сигнала на магнитофон, а при передаче – воспроизведение этого сигнала с меньшей скоростью. При этом полоса частот сигнала **пропорционально уменьшается**, но **увеличивается время** передачи сигнала ***Tс*.**
- Известны случаи, когда при передаче сигнала по телефонной линии **скорость работы** модема приходится **уменьшать** с **ростом помех** в канале (т.е. при **уменьшении динамического диапазона** канала ***Dк***). Вследствие этого возрастает время передачи сигнала ***Tк***.

Вопросы для экспресс-контроля

- **1.** Чем отличаются **детерминированные** сигналы от **случайных**?
- **2.** Чем отличаются спектры **периодических** сигналов от спектров **непериодических** сигналов?
- **3.** Какой параметр периодического сигнала во **временном базисе** определяет расстояние между дискретными **спектральными составляющими**?
- **4.** Для каких сигналов обращаются в нуль **мнимые** составляющие спектра? Для каких сигналов обращаются в нуль **действительные** составляющие спектра?

Вопросы для экспресс-контроля

- **5.** Назовите основные соотношения между **временными** функциями сигналов и их отображением в **спектральном базисе**.
- **6.** **Необходимое** и **достаточное** условие согласования **сигнала** и **канала связи**. Привести примеры преобразования сигналов для выполнения условий согласования.

ЛЕКЦИЯ ОКОНЧЕНА

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ