ТЕМА:

Линии второго порядка, заданные каноническими уравнениями.

7. **Парабола и её каноническое уравнение**

7. **Парабола и её каноническое уравнение**

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус, и называемой *директрисой*.

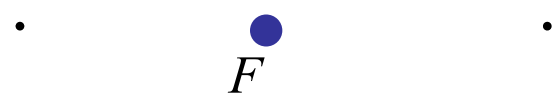
7. **Парабола и её каноническое уравнение**

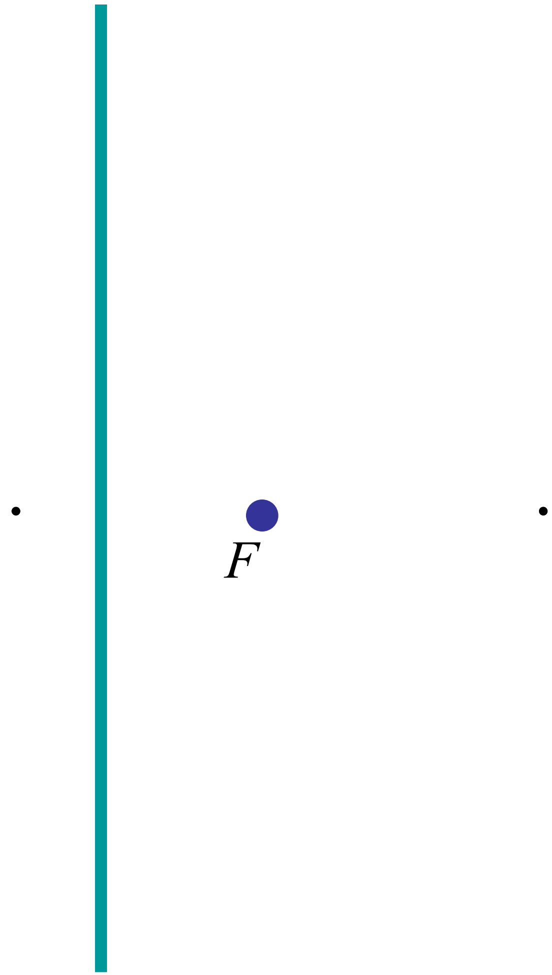
Расстояние от фокуса параболы до её директрисы называется *параметром параболы*.

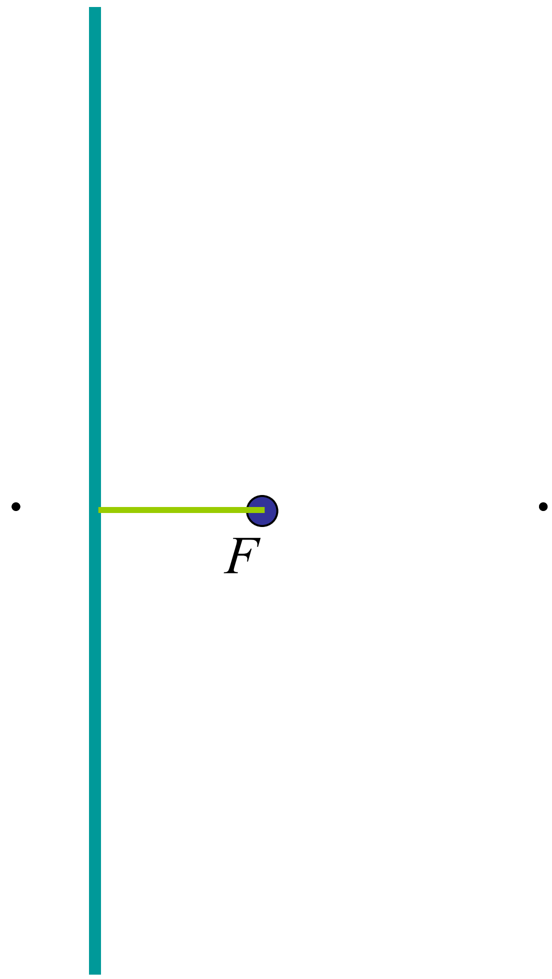
7. **Парабола и её каноническое уравнение**

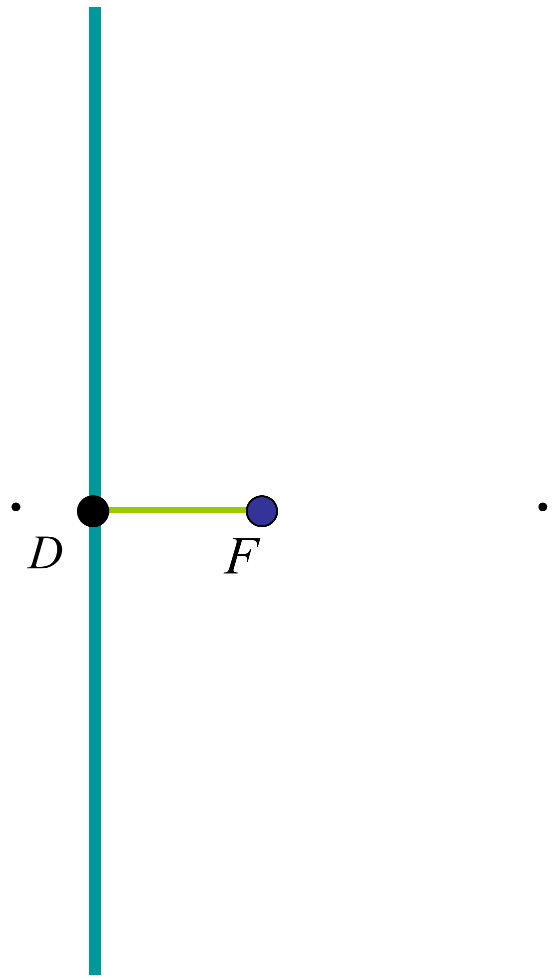
Расстояние от фокуса параболы до её директрисы называется *параметром параболы*.

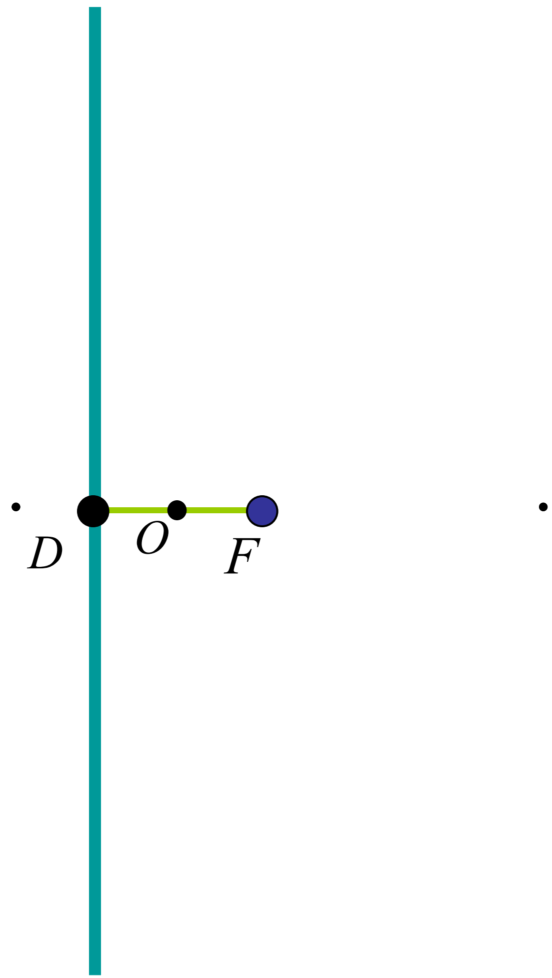
Эксцентриситет параболы принимается равным 1


F

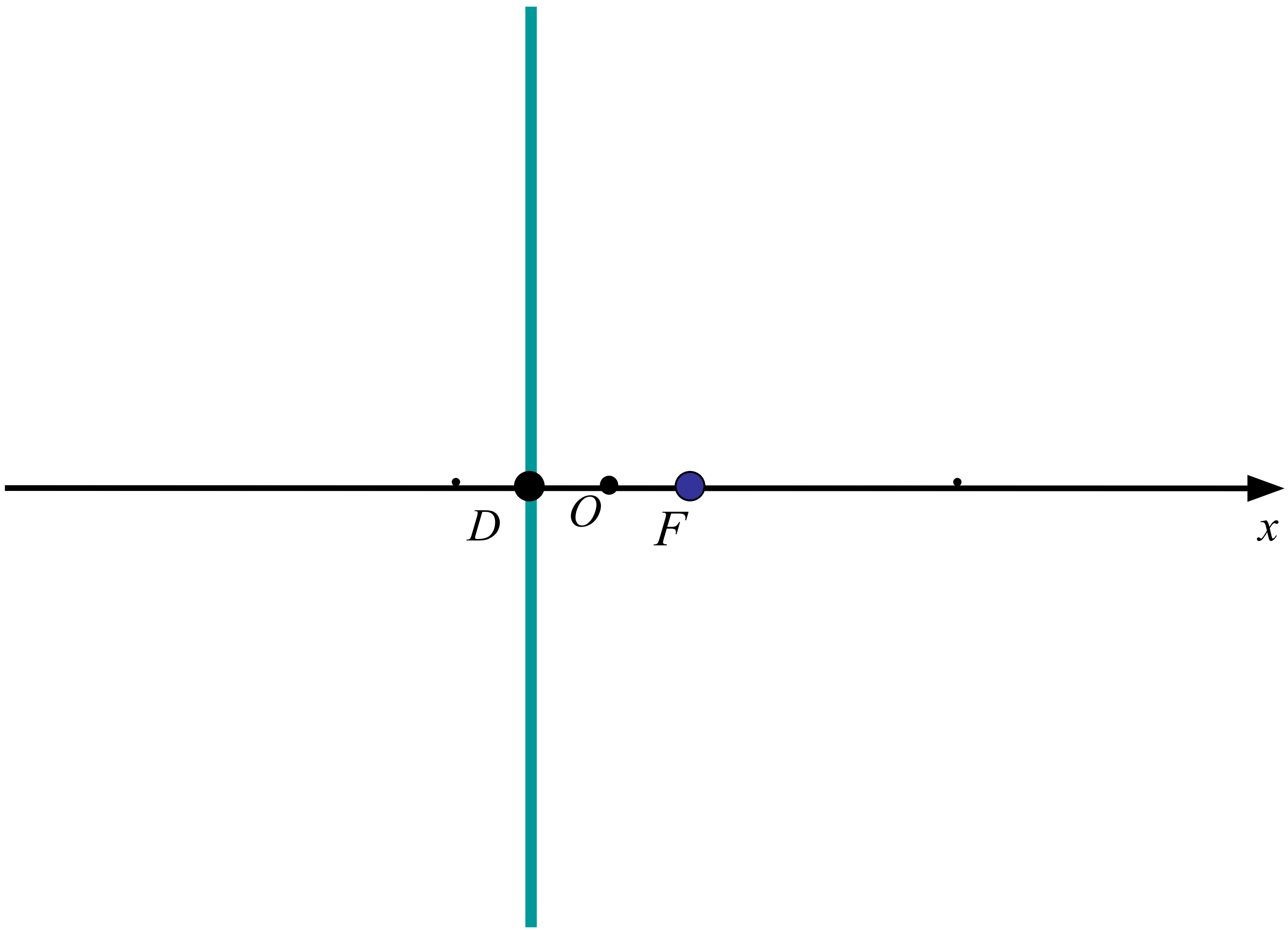

F


F

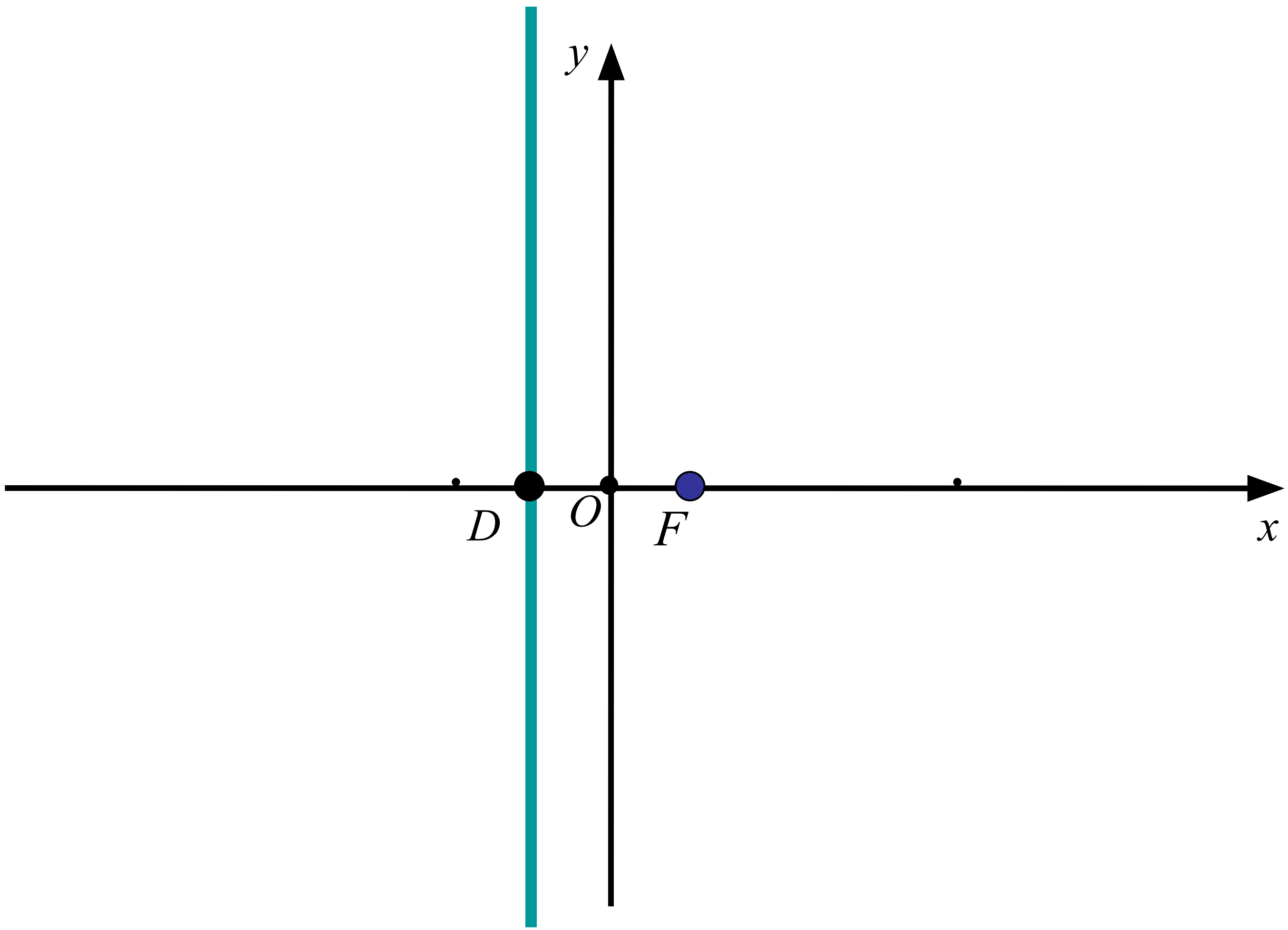

D
F



D
O
F



D
O
F
x


y
x
D
O
F

Расстояние FD обозначим p (параметр параболы).

Расстояние FD обозначим p (параметр параболы).

тогда в выбранной системе координат фокус F будет иметь координаты

Расстояние *FD* обозначим *p* (параметр параболы). тогда в выбранной системе координат фокус *F* будет иметь координаты $F(\frac{p}{2};0)$

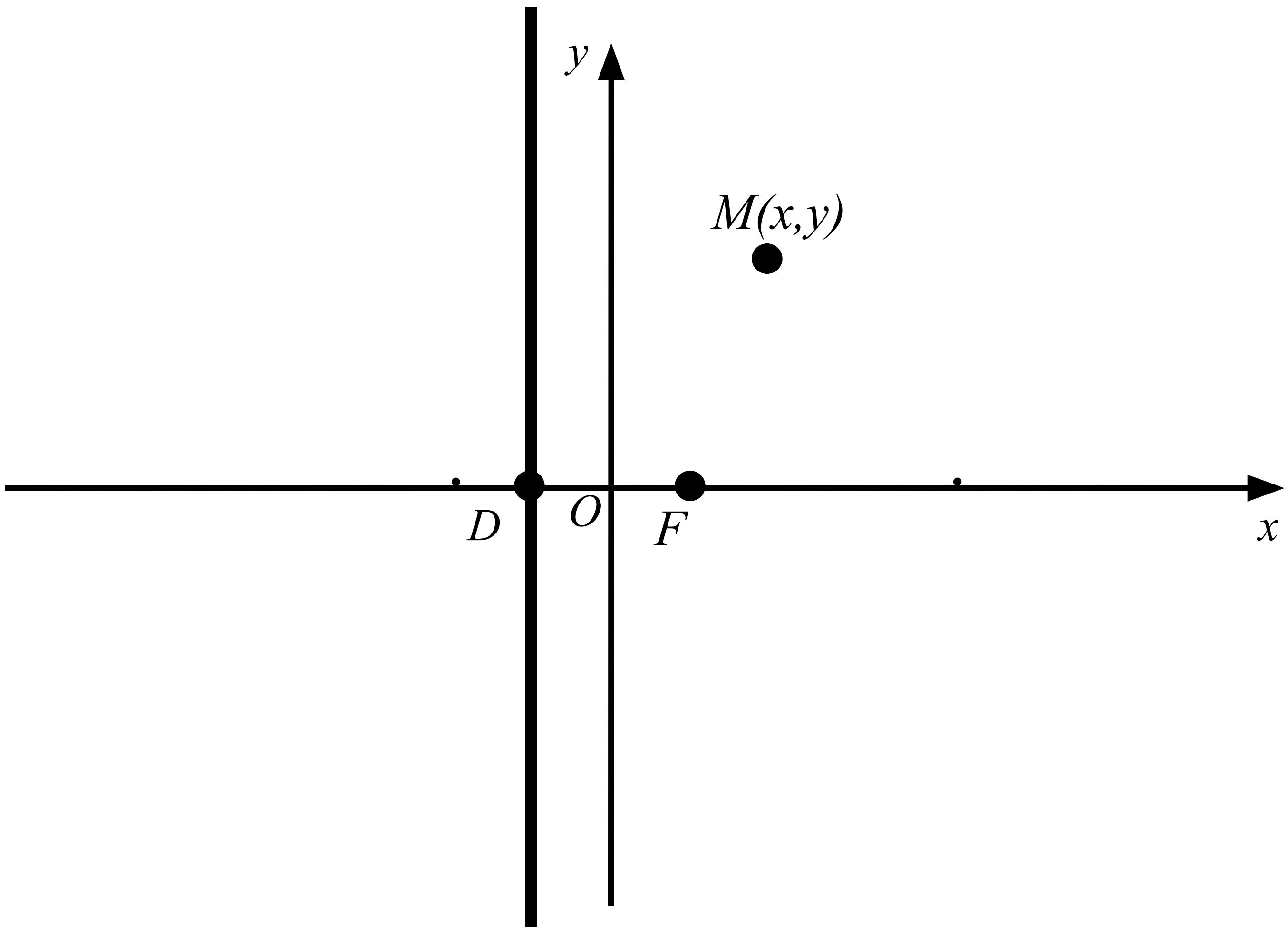
Расстояние *FD* обозначим *p* (параметр параболы).

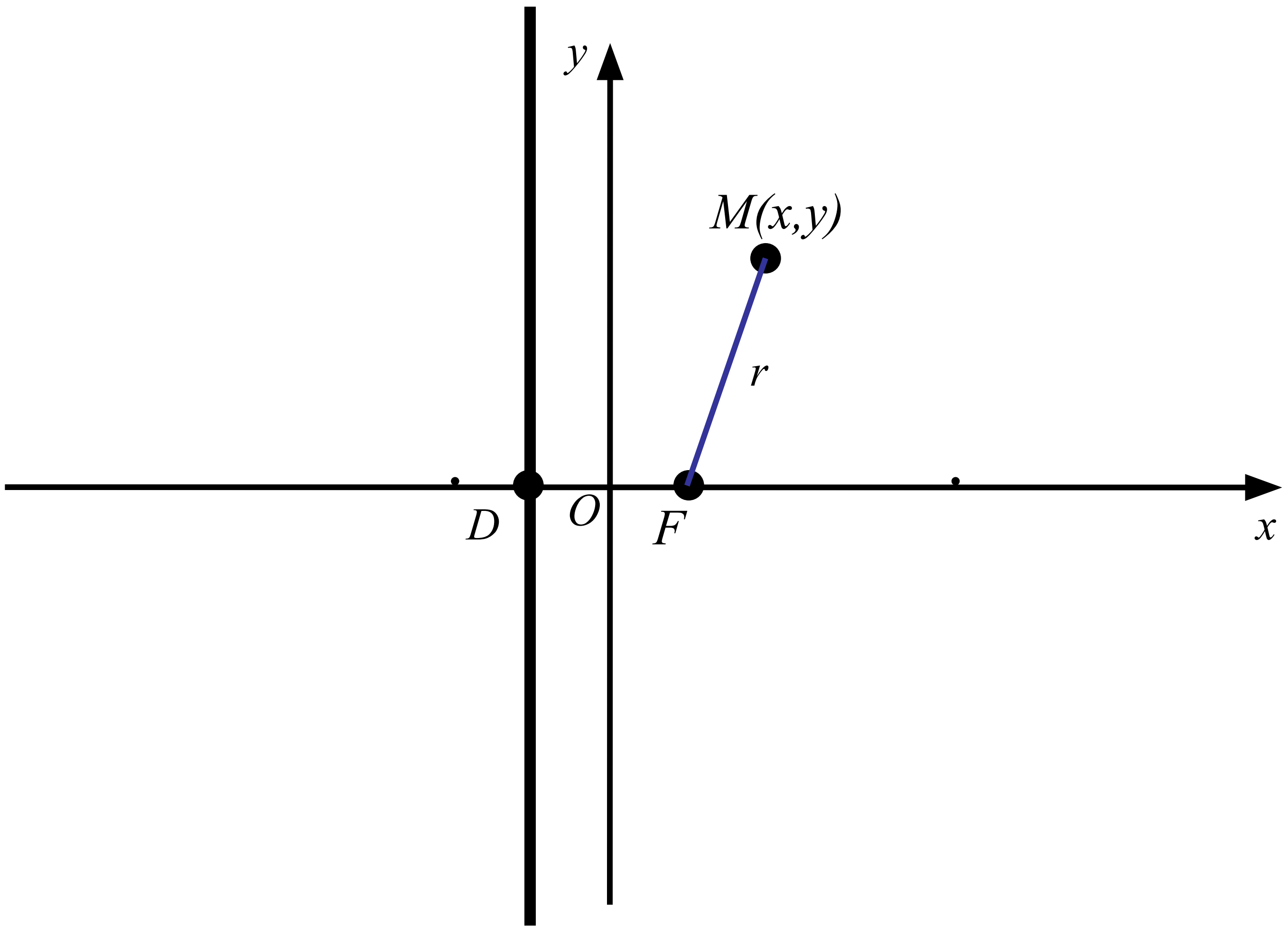
тогда в выбранной системе координат фокус *F* будет иметь координаты $F(\frac{p}{2};0)$

а уравнение директрисы

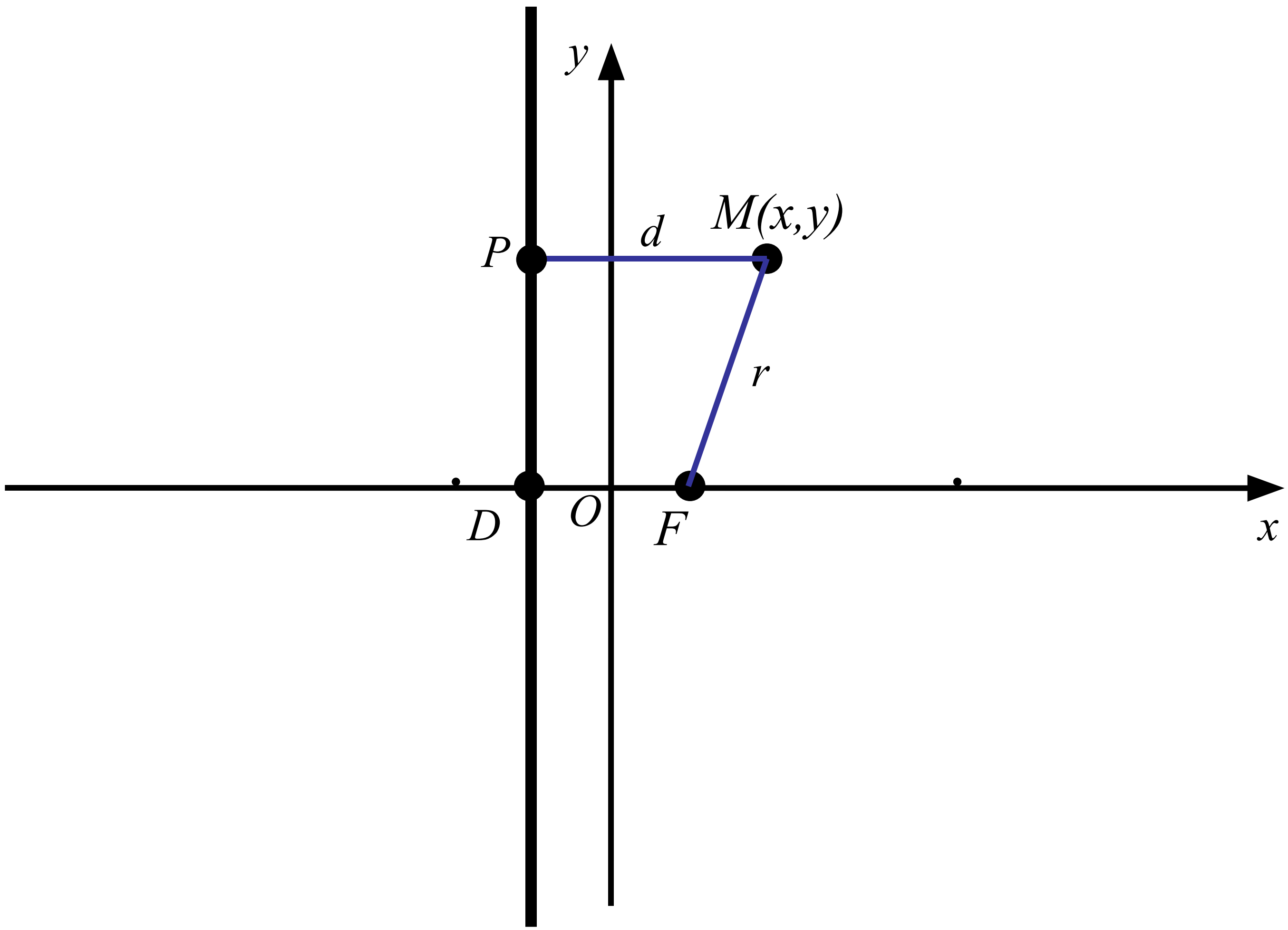
Расстояние FD обозначим p (параметр параболы). тогда в выбранной системе координат фокус F будет иметь координаты $F(\frac{p}{2};0)$

а уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$


y
M(x,y)
D
O
F
x



y
M(x,y)
r
D
O
F
x



y
M(x,y)
P
d
r
D
O
F
x

Точка $M(x;y)$ лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = d}$

Точка *M(x;y)* лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = d}$

$r = |FM| =$

Точка $M(x;y)$ лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = d}$

$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Точка *M(x;y)* лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = d}$

$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = |PM| =$$

Точка *M(x;y)* лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда ***r* = *d***

$$r = |FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = |PM| = \left|x + \frac{\eth}{2}\right|$$

Точка *M(x;y)* лежит на данной параболе тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r = d}$

$$r=|FM|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

$$d=|PM|=\left|x+\frac{\eth}{2}\right|$$

То уравнение параболы примет вид

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{\eth}{2}\right|$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{\eth}{2}\right|$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left| x + \frac{\eth}{2} \right|$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4}$$

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px$$

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Т.к. ордината $\boldsymbol{y}$ в каноническом уравнении параболы входит во 2-й степени, то

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Т.к. ордината $\boldsymbol{y}$ в каноническом уравнении параболы входит во 2-й степени, то ось Ox является осью симметрии параболы (1).

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Т.к. ордината ***y*** в каноническом уравнении параболы входит во 2-й степени, то ось Ox является осью симметрии параболы (1).

Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется *вершиной* параболы.

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Т.к. ордината ***y*** в каноническом уравнении параболы входит во 2-й степени, то ось Ox является осью симметрии параболы (1).

Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется *вершиной* параболы.

Имеет только одну вершину в точке

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Т.к. ордината ***y*** в каноническом уравнении параболы входит во 2-й степени, то ось Ox является осью симметрии параболы (1).

Точка пересечения параболы с её осью симметрии называется *вершиной* параболы.

Имеет только одну вершину в точке $O(0;0)$.

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Всякая прямая пересекает параболу не более чем в двух точках

8. **Исследование формы параболы**

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Всякая прямая пересекает параболу не более чем в двух точках (т.к. прямая определяется уравнением 1-ой степени, а парабола - уравнением 2-ой степени)

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1) ⇒,** что $x \geq 0$

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1)** $\Rightarrow$**,** что $x \geq 0$ (т. к. $p > 0$, а $x = \dfrac{y^2}{2p}$)

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1) ⇒,** что $x \geq 0$ (т. к. $p > 0$, а $\left. x = \dfrac{y^2}{2p} \right)$

Разрешая уравнение (1) относительно $\boldsymbol{y}$

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1) ⇒,** что $x \geq 0$ (т. к. $p>0$, а $x = \dfrac{y^2}{2p}$)

Разрешая уравнение (1) относительно $\boldsymbol{y}$ и беря лишь неотрицательные значения

$$y = \sqrt{2px}$$

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1) ⇒,** что $x \geq 0$ (т. к. $p > 0$, а $\left(x = \frac{y^2}{2p} \right)$

Разрешая уравнение (1) относительно ***y*** и беря лишь неотрицательные значения

$$y = \sqrt{2px}$$

видим, что в полуинтервале [0;+∞],

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1)** $\Rightarrow$**,** что $x \geq 0$ (т. к. $p > 0$, а $\left. x = \frac{y^2}{2p} \right)$

Разрешая уравнение (1) относительно ***y*** и беря лишь неотрицательные значения

$$y = \sqrt{2px}$$

видим, что в полуинтервале [0;+∞],

y - возрастающая функция, причем

$$\lim_{x \to +\infty} y =$$

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

Из **(1)** **⇒,** что $x \geq 0$ (т. к. $p > 0$, а $\left. x = \dfrac{y^2}{2p} \right)$

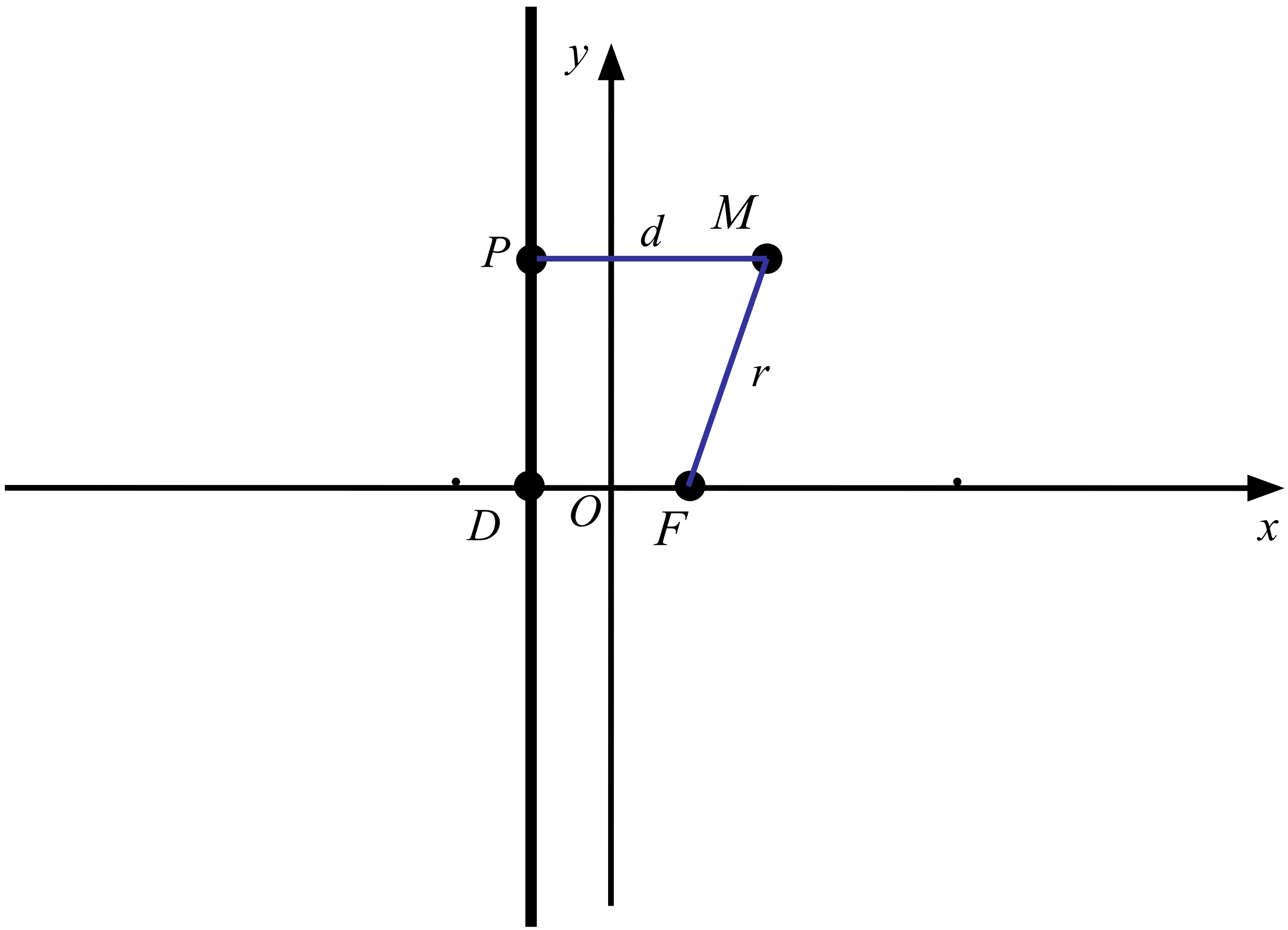
Разрешая уравнение (1) относительно ***y*** и беря лишь неотрицательные значения

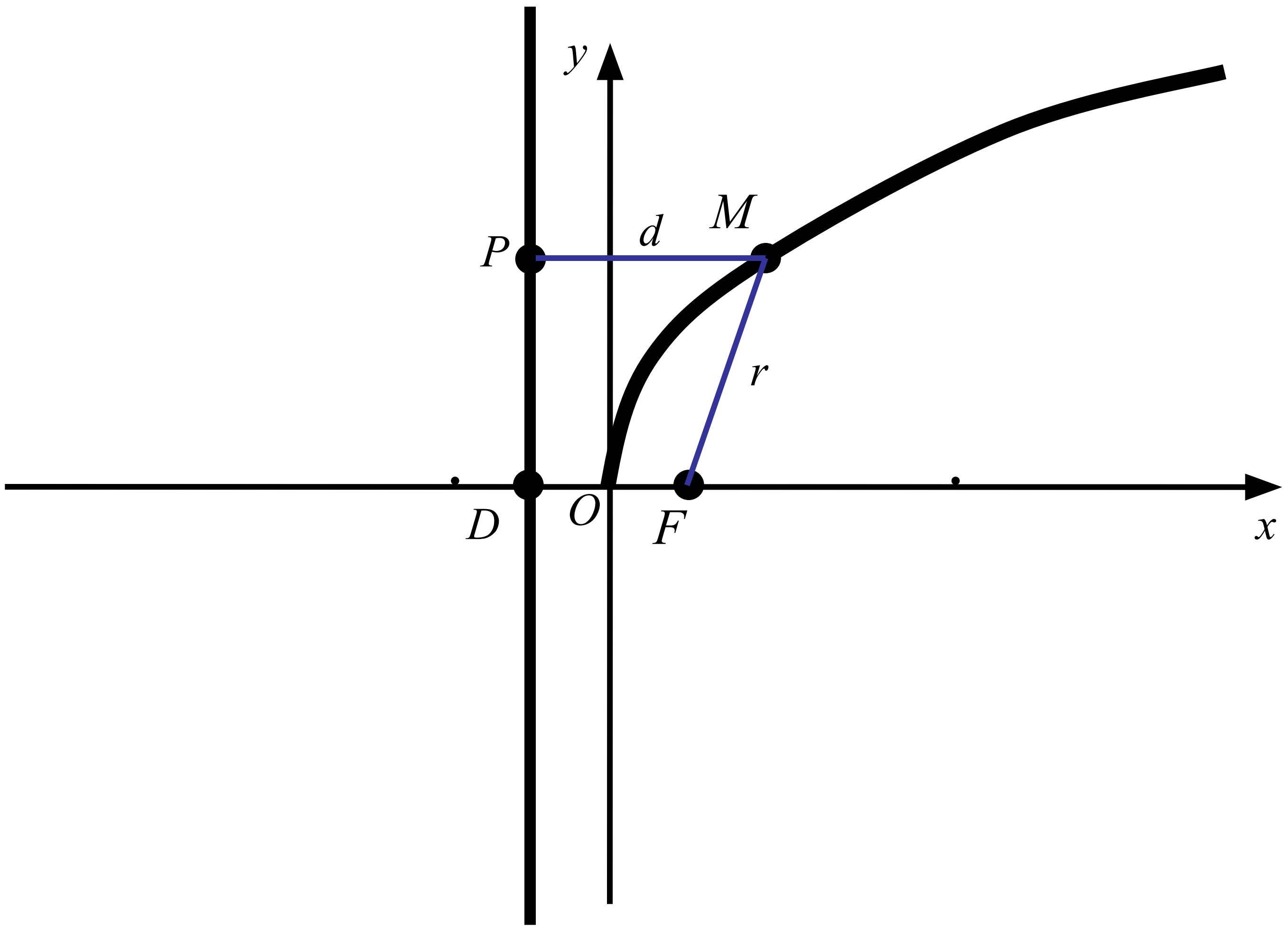
$$y = \sqrt{2px}$$

видим, что в полуинтервале $[0;+\infty]$,

y - возрастающая функция, причем

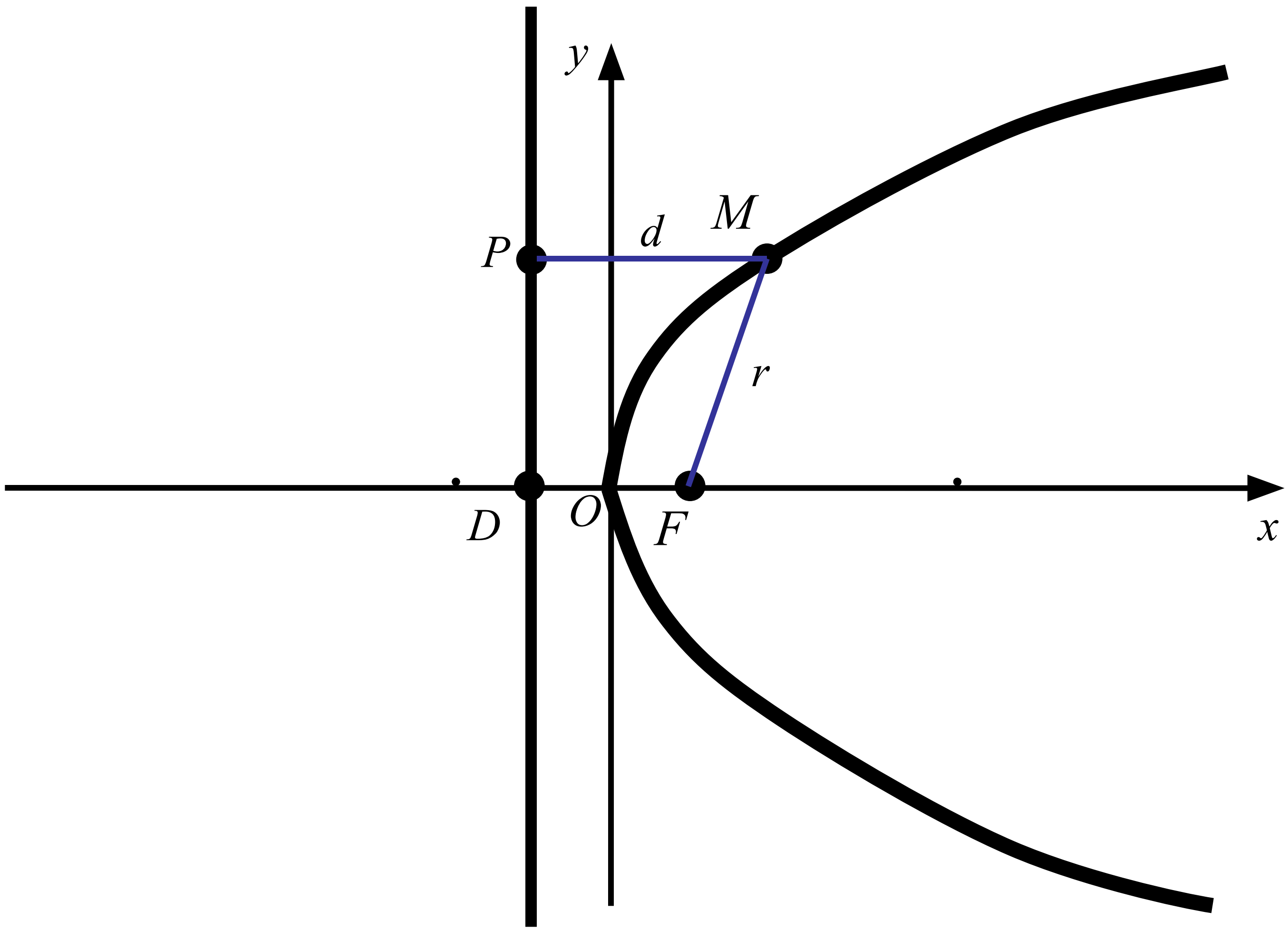
$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$


y
M
d
P
r
D
O
F
x



y
M
P
d
r
D
O
F
x

$$y^2 = 2px \quad (1)$$



Уравнение $y^2 = -2px$ (2), где $\boldsymbol{p}>0$, Уравнение $y^2 = -2px$ (2), где $\boldsymbol{p}$>0,

сводиться к уравнению (1) заменой $\boldsymbol{x}$ на $-\boldsymbol{x}$, Уравнение $y^2 = -2px$ (2), где $\boldsymbol{p}$>0,

сводиться к уравнению (1) заменой $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{-x}$,

- т. е. путём преобразования системы координат, которая соответствует изменению положительного направления оси Ox на противоположное.

Уравнение $y^2 = -2px$ (2) , где $\boldsymbol{p}>0$,

сводиться к уравнению (1) заменой $\boldsymbol{x}$ на $-\boldsymbol{x}$,

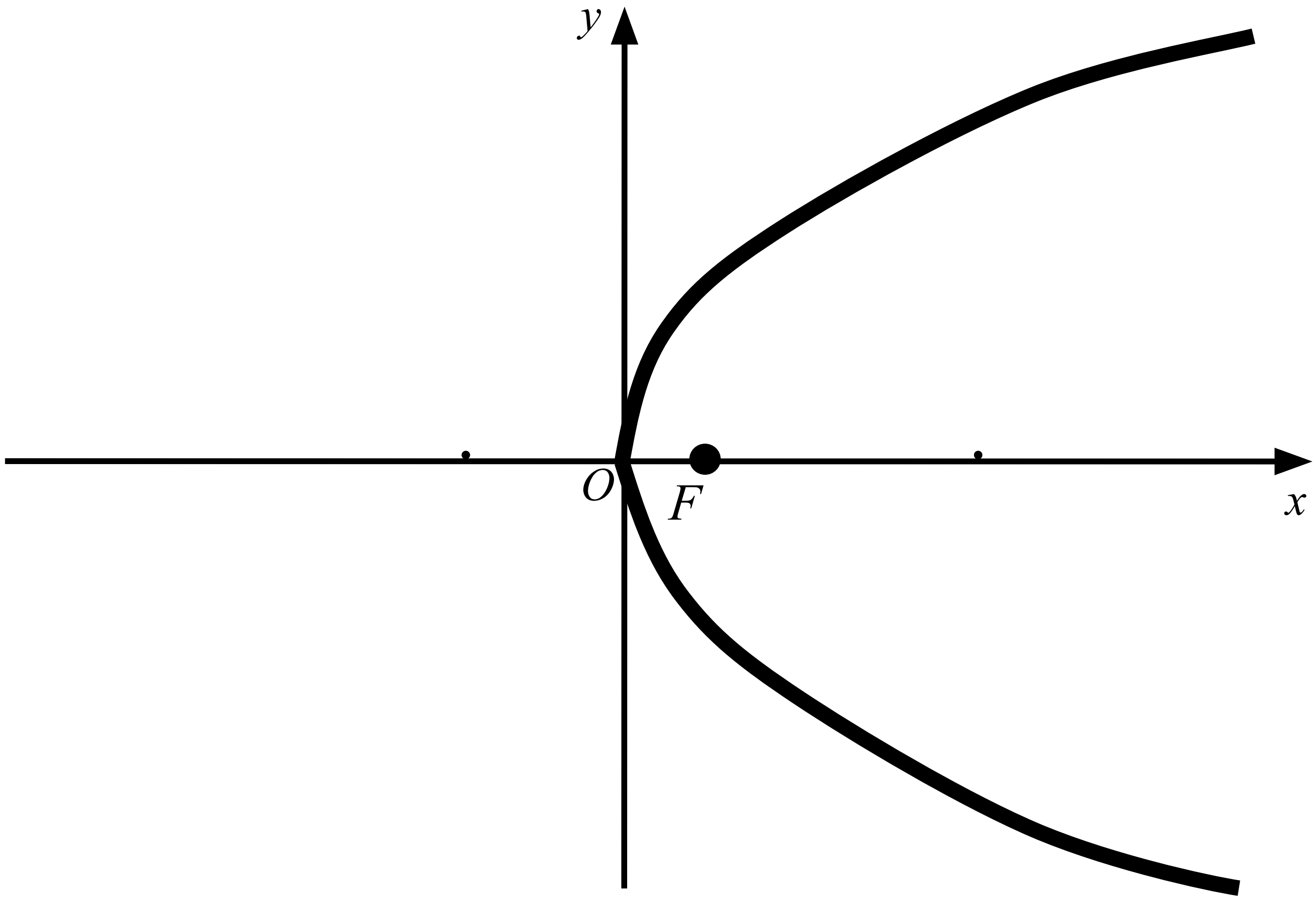
т. е. путём преобразования системы координат, которая соответствует изменению положительного направления оси Ox на противоположное.

Отсюда следует, что парабола $y^2 = -2px$

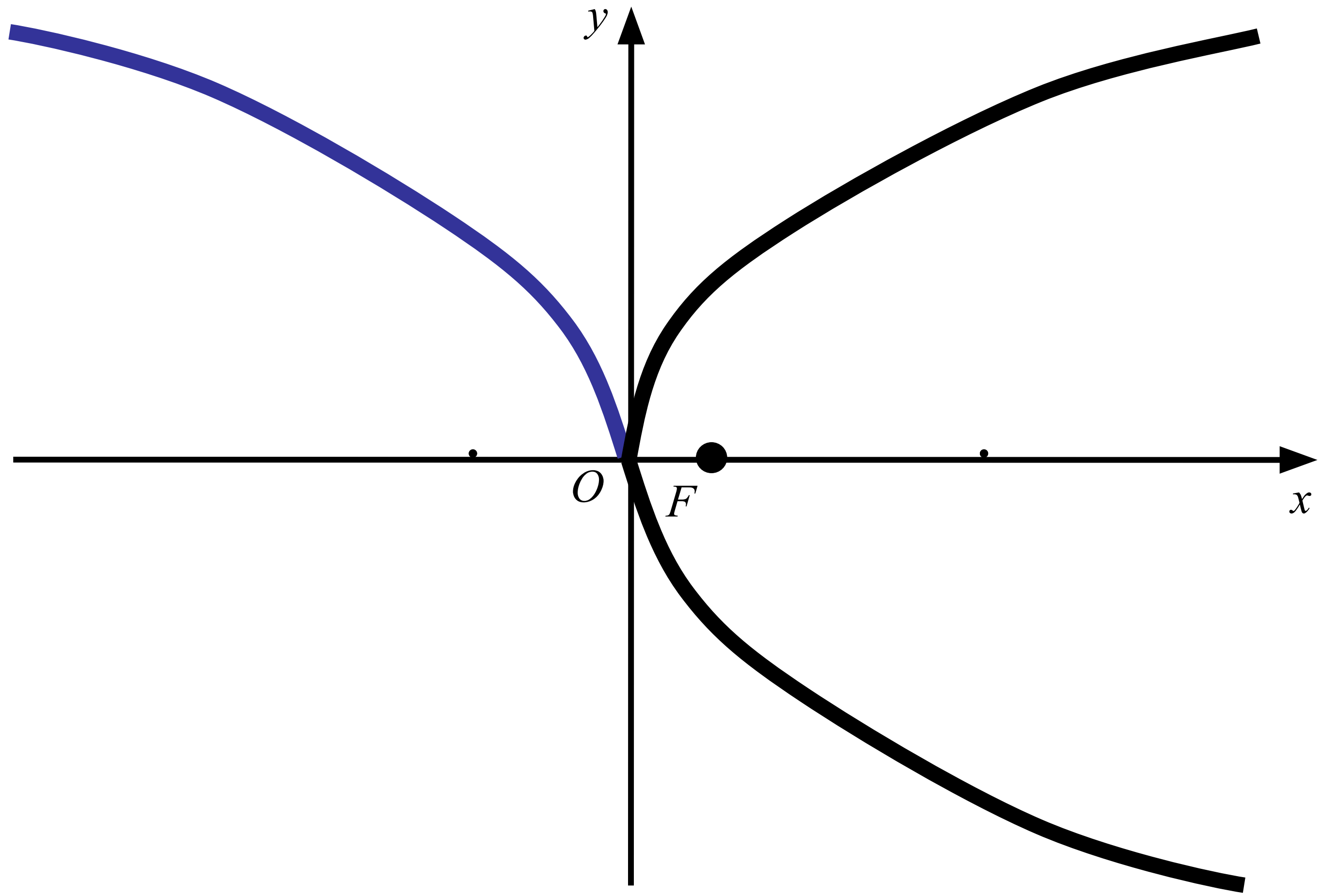
симметрична с параболой $y^2 = 2px$

относительно оси Oy

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

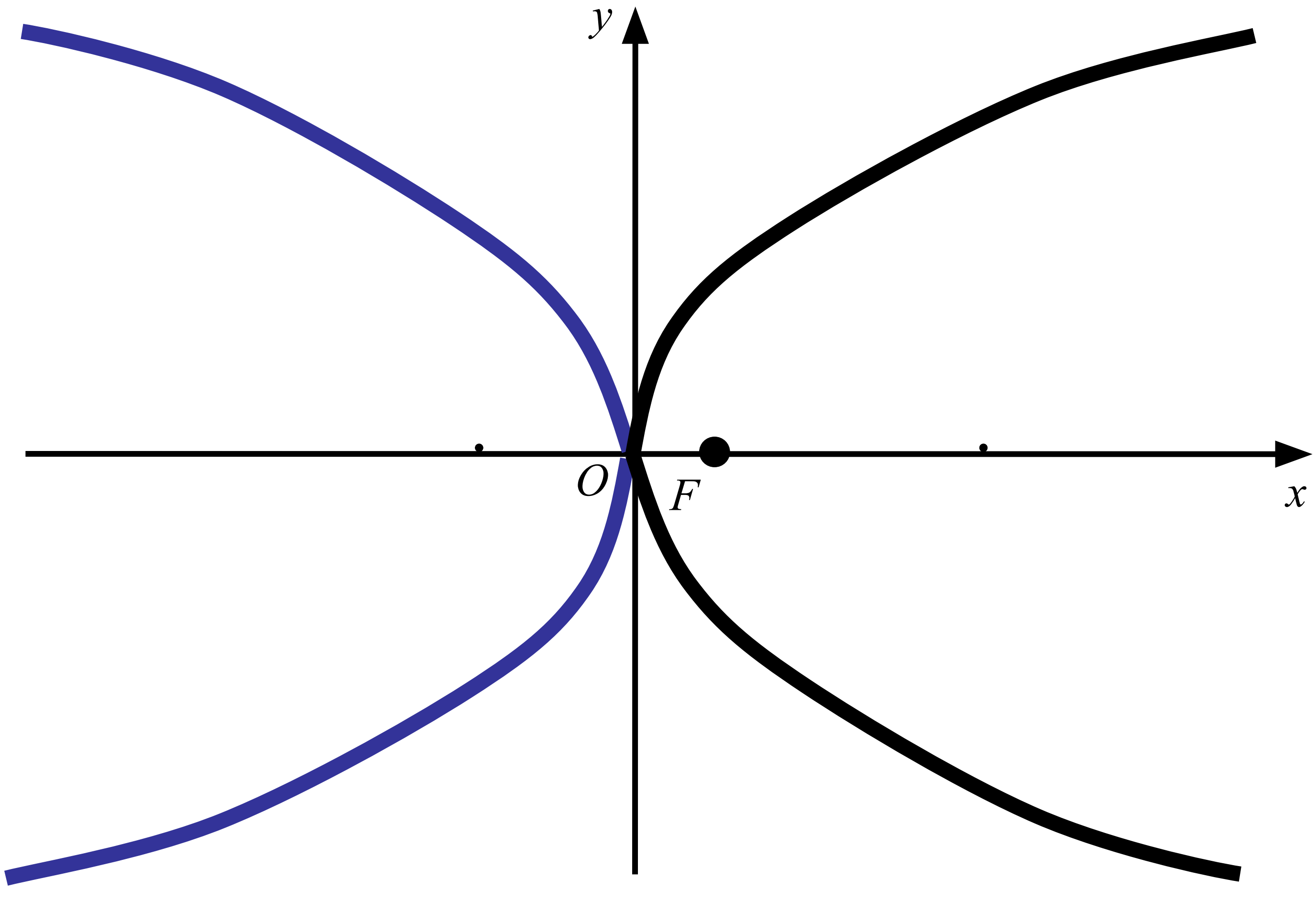


$$y^2 = 2px \quad (1)$$

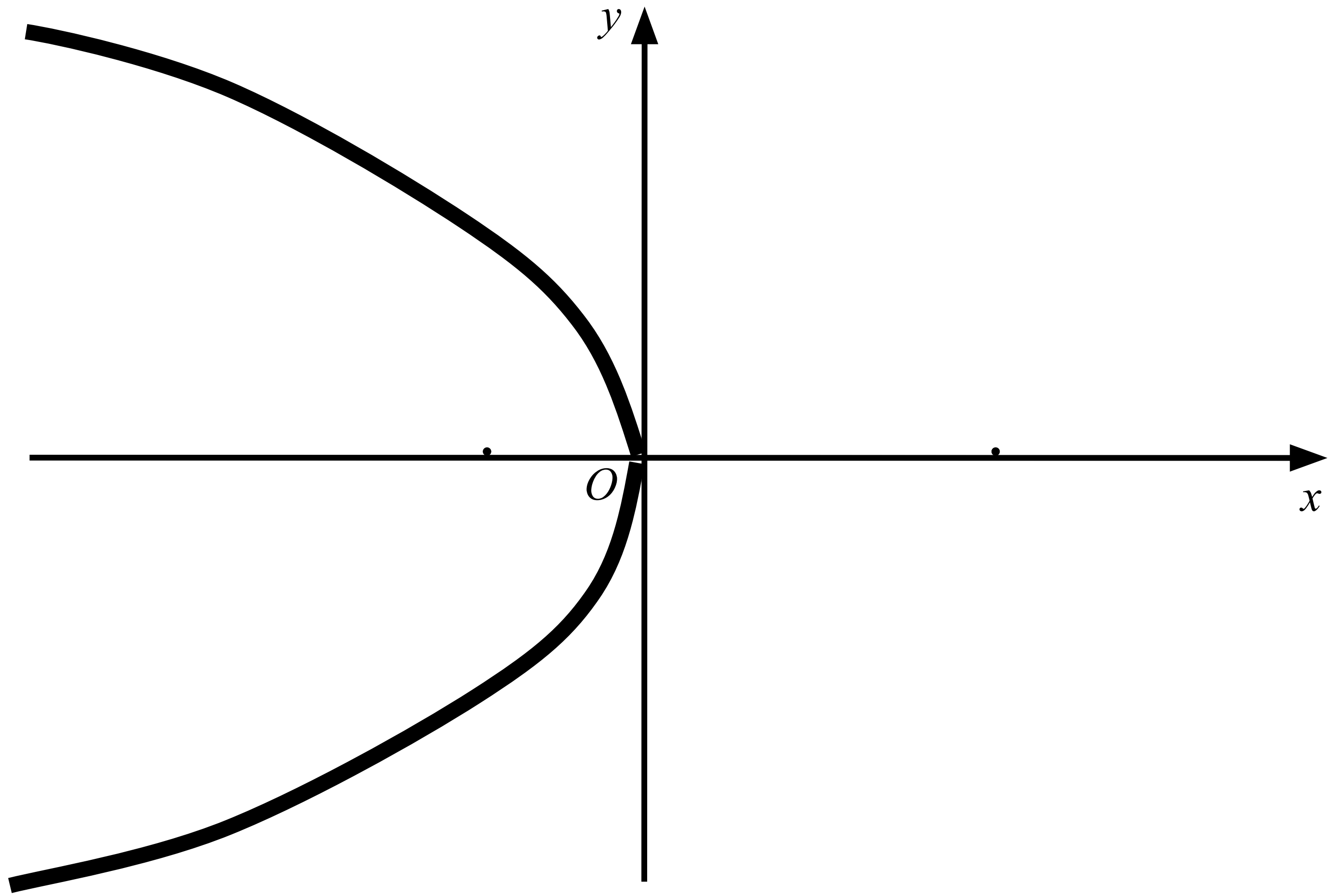


$$y^2 = -2px \quad (2)$$

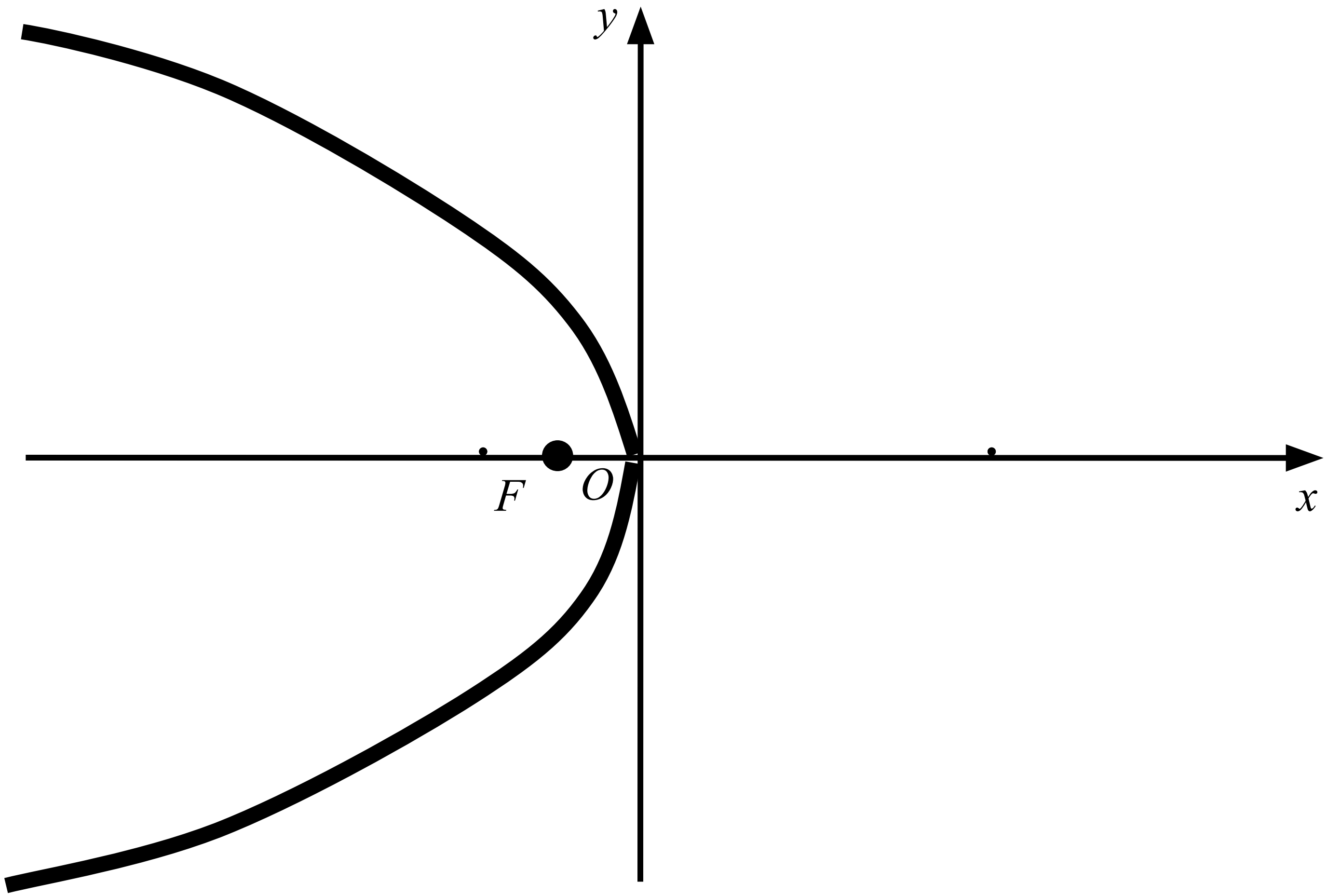
$$y^2 = 2px \quad (1)$$



$$y^2 = -2px \quad (2)$$

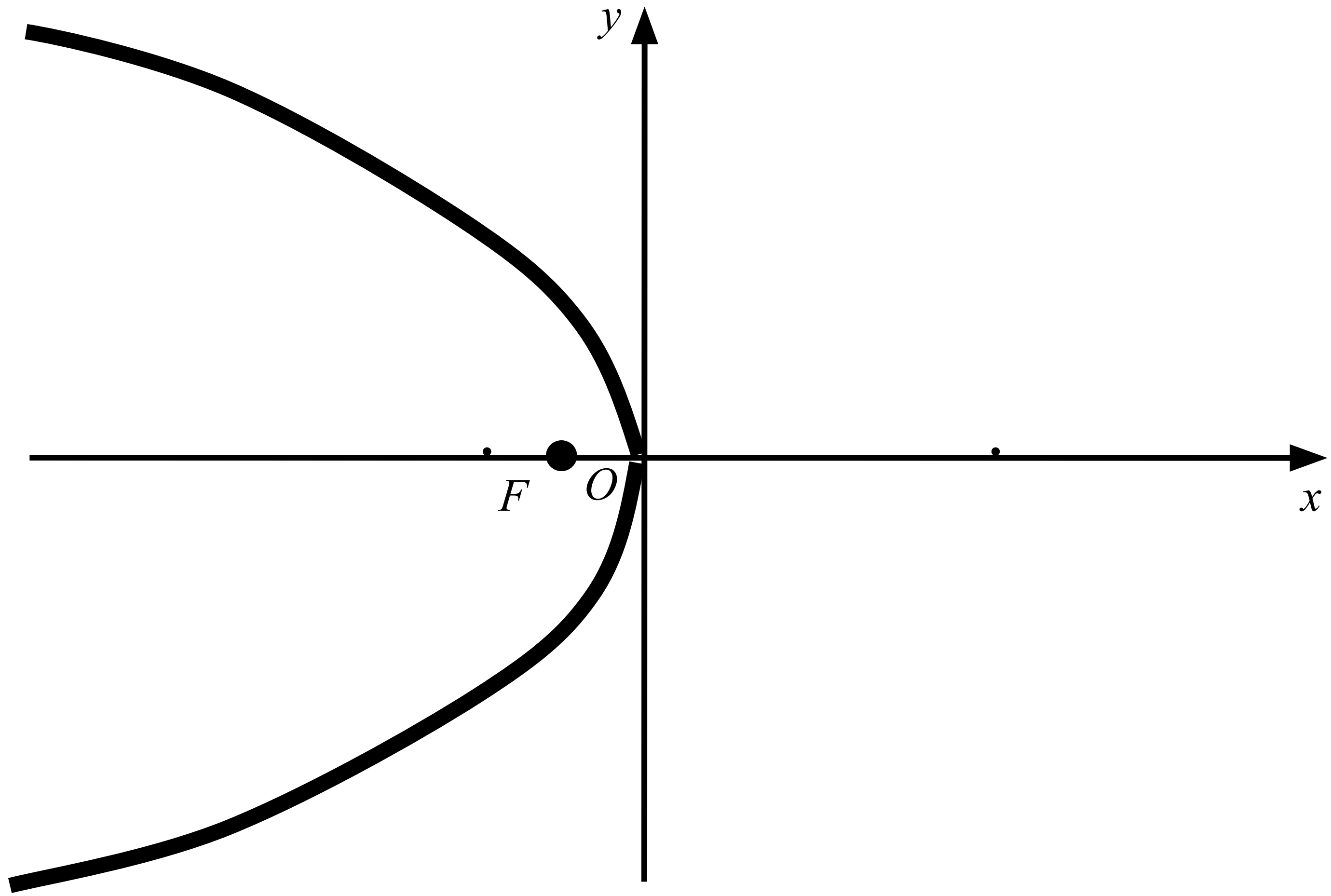


$$y^2 = -2px \quad (2)$$



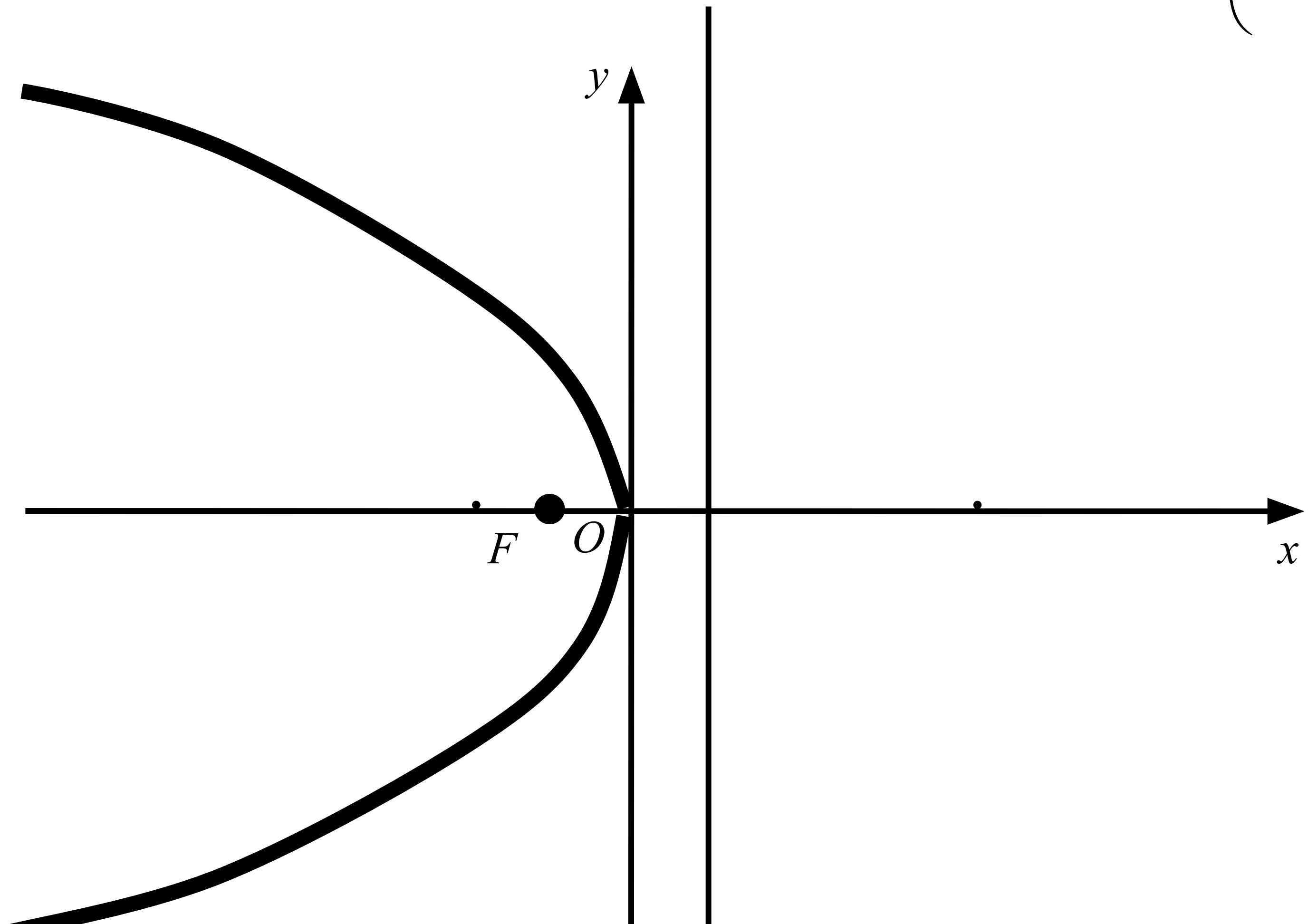
$$y^2 = -2px \quad (2)$$

$$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$$



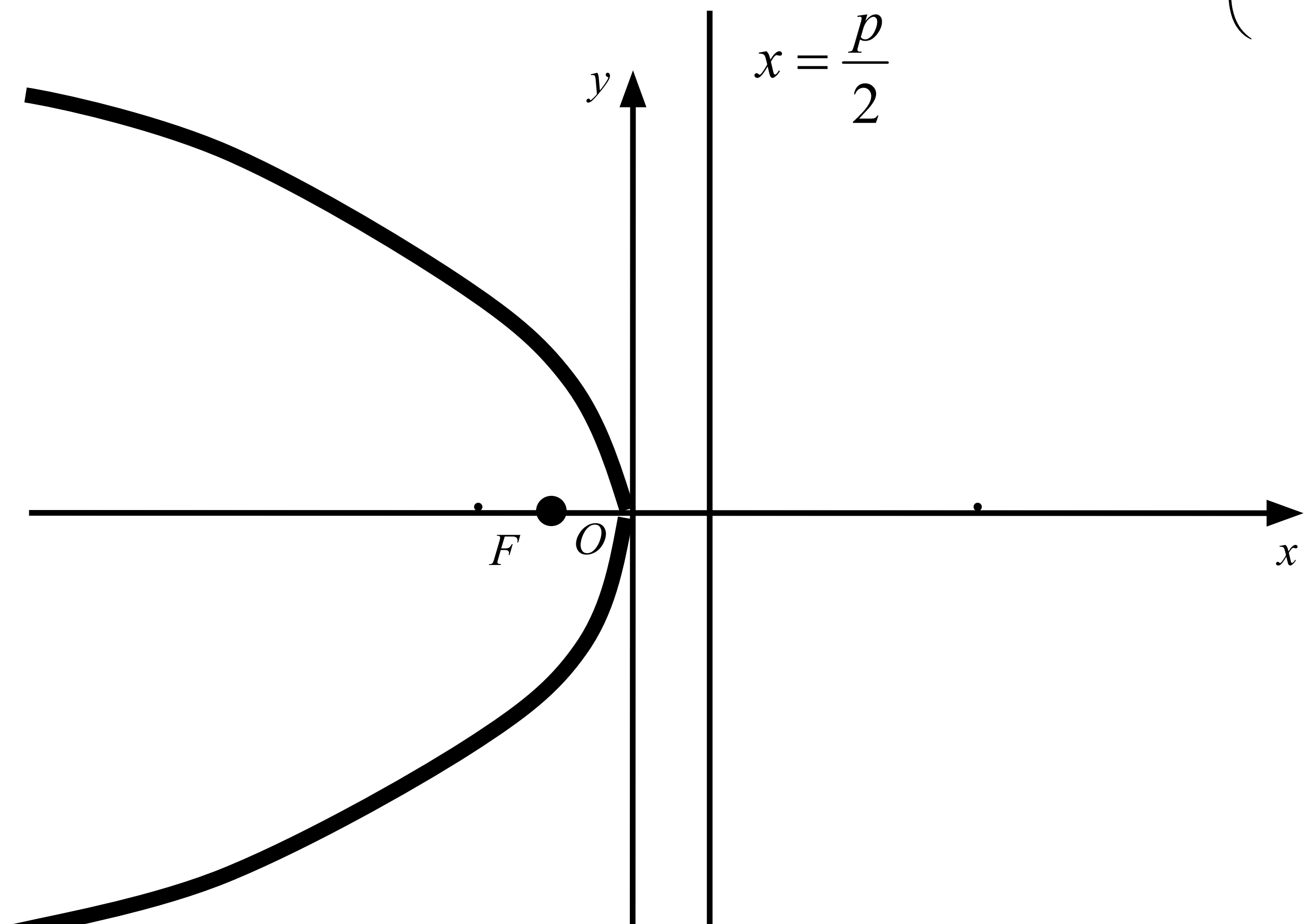
$$y^2 = -2px \quad (2)$$

$$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$$



$$y^2 = -2px \quad (2)$$

$$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$$



Аналогичными рассуждениями устанавливаем, что каждое из уравнений

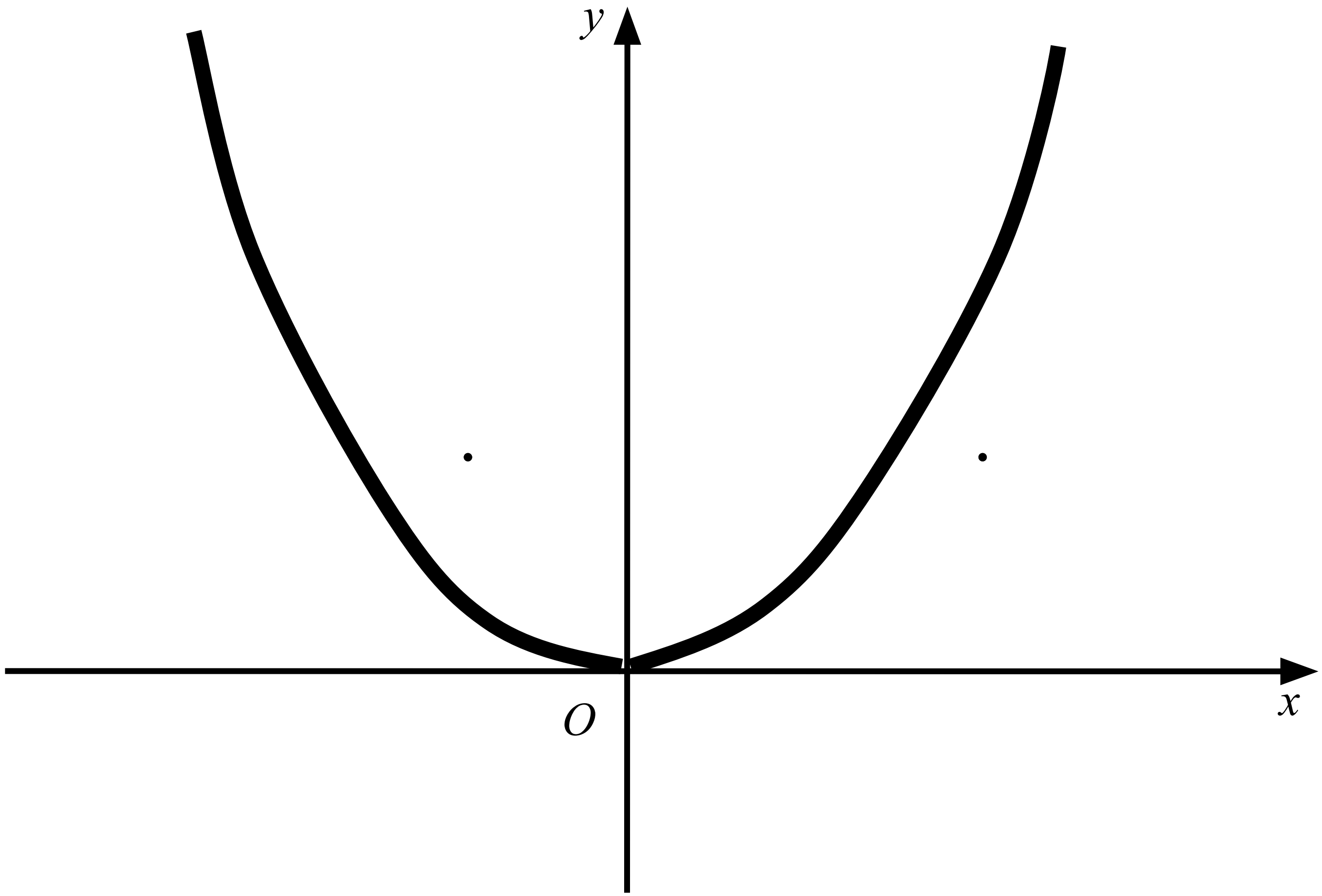
$$x^2 = 2py \quad (3)$$

где $p>0$

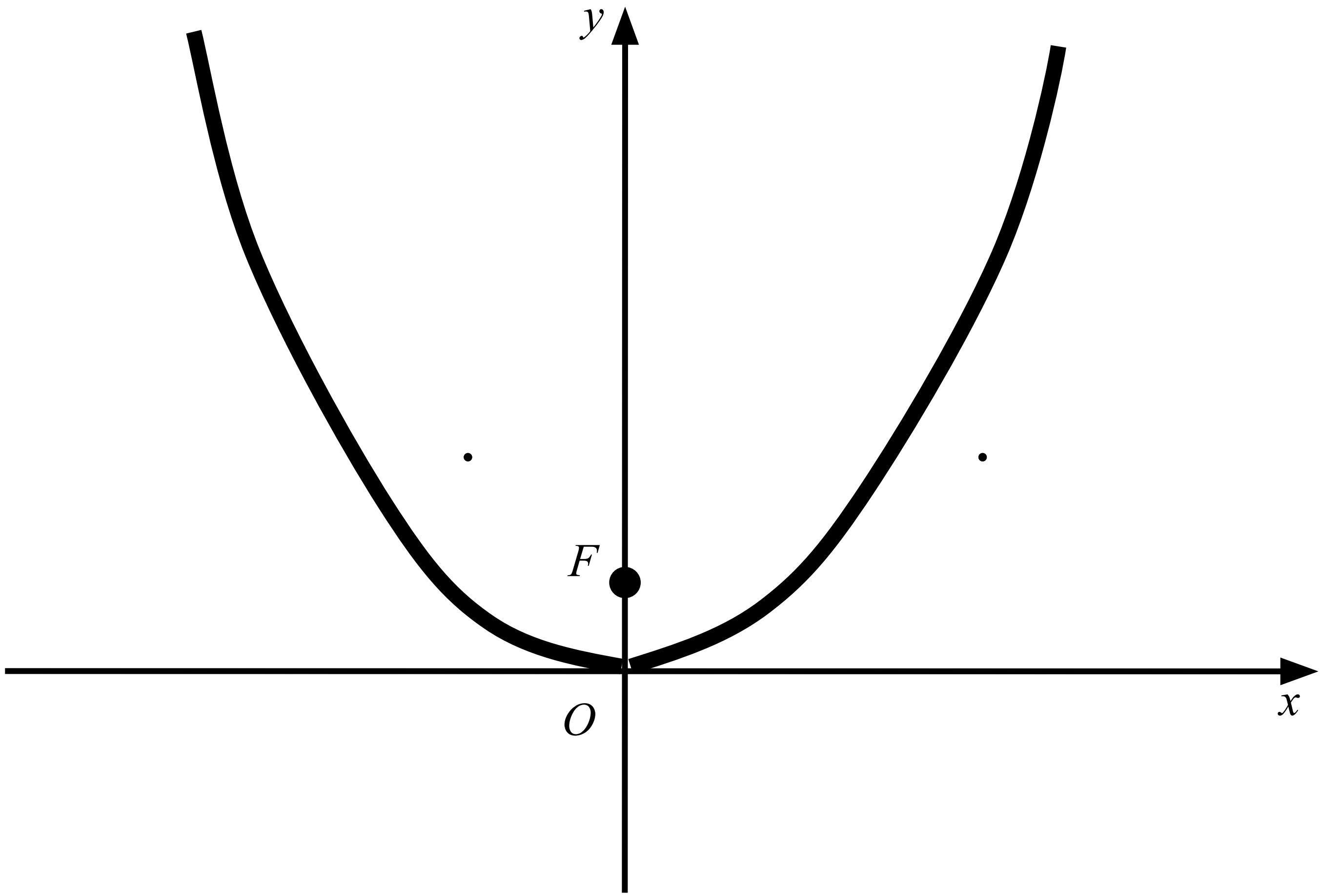
$$x^2 = -2py \quad (4)$$

определяет параболу с вершиной в начале координат и осью симметрии Oy

$$x^2 = 2py \quad (3)$$

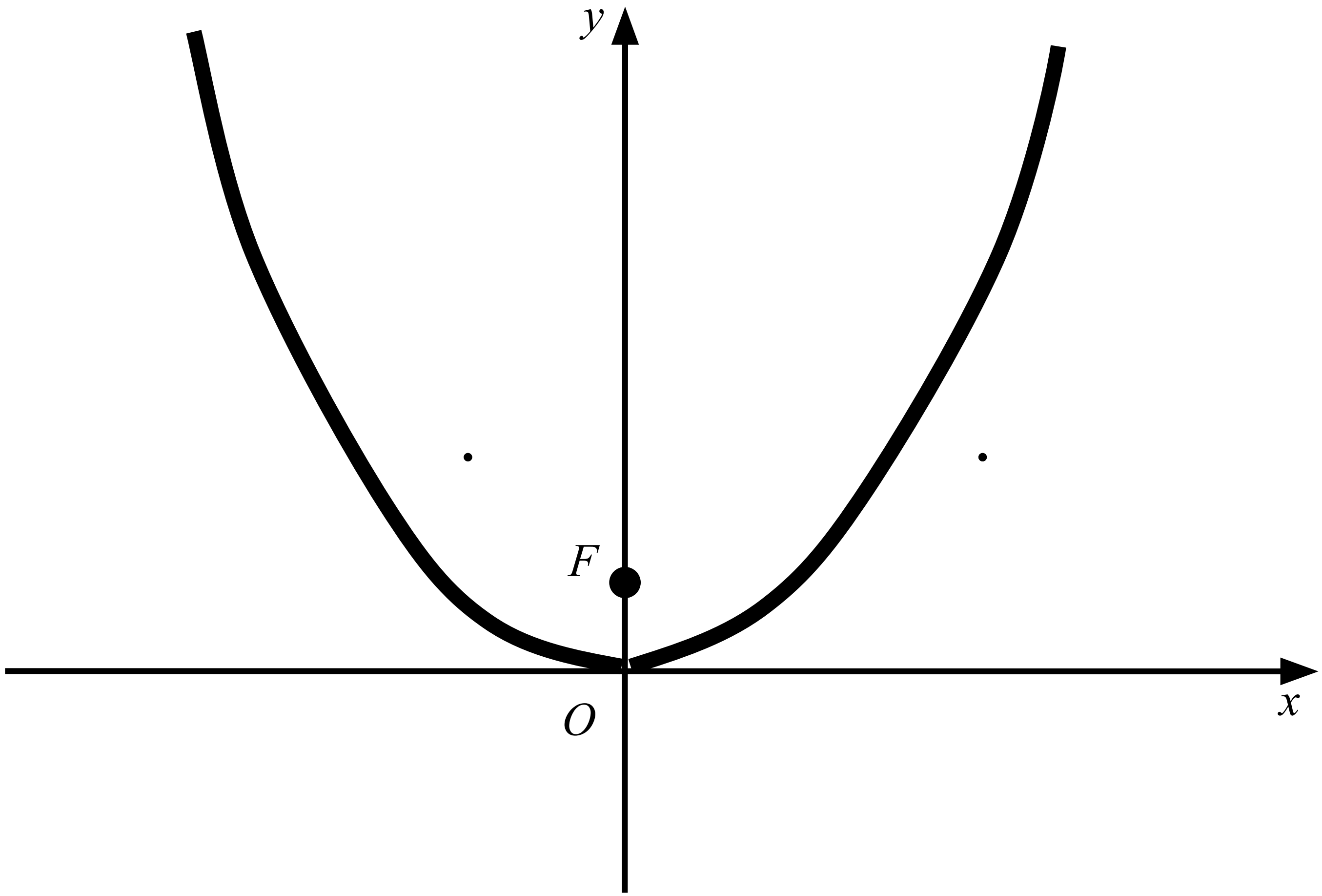


$$x^2 = 2py \quad (3)$$



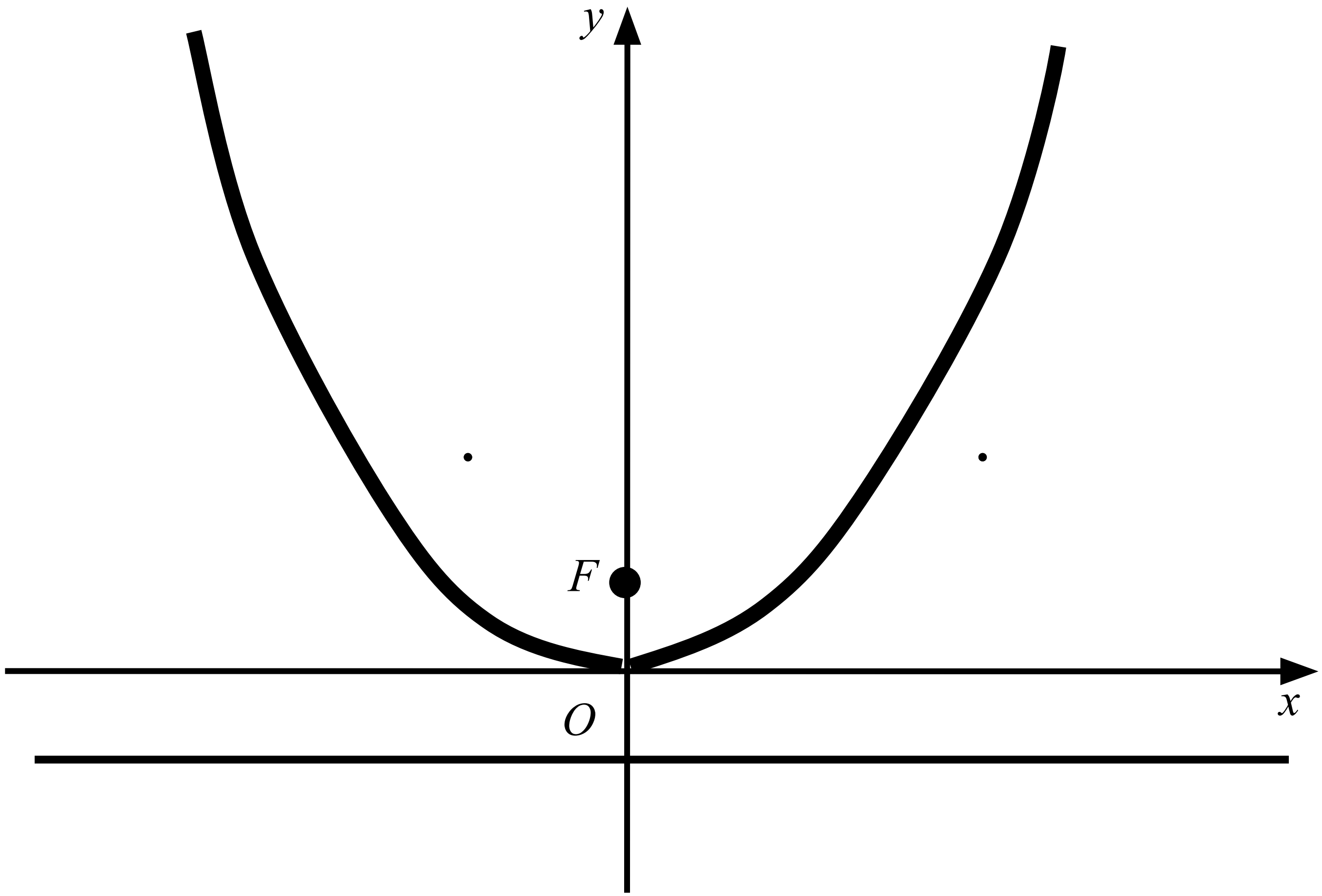
$$x^2 = 2py \quad (3)$$

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$$

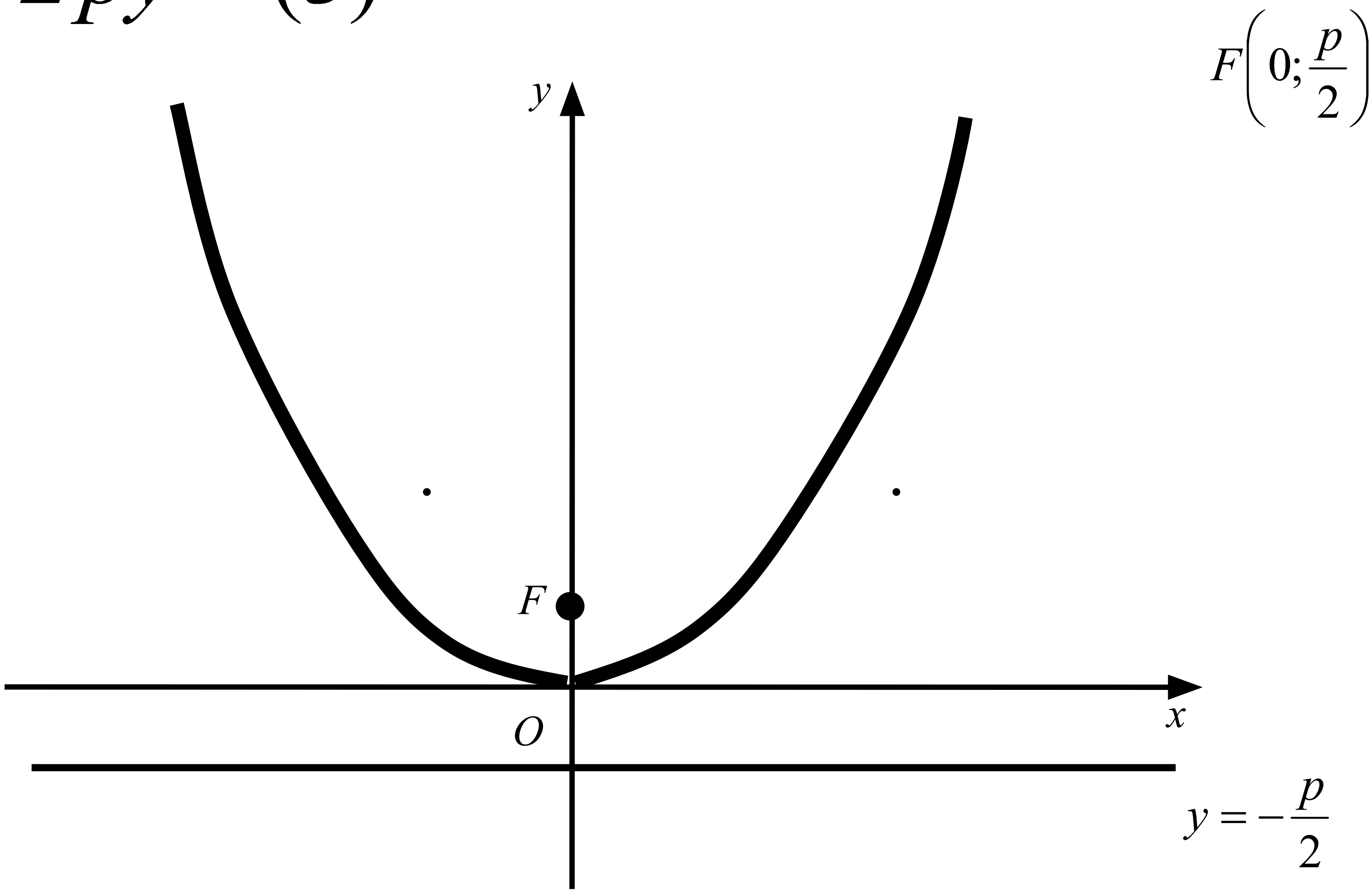


$$x^2 = 2py \quad (3)$$

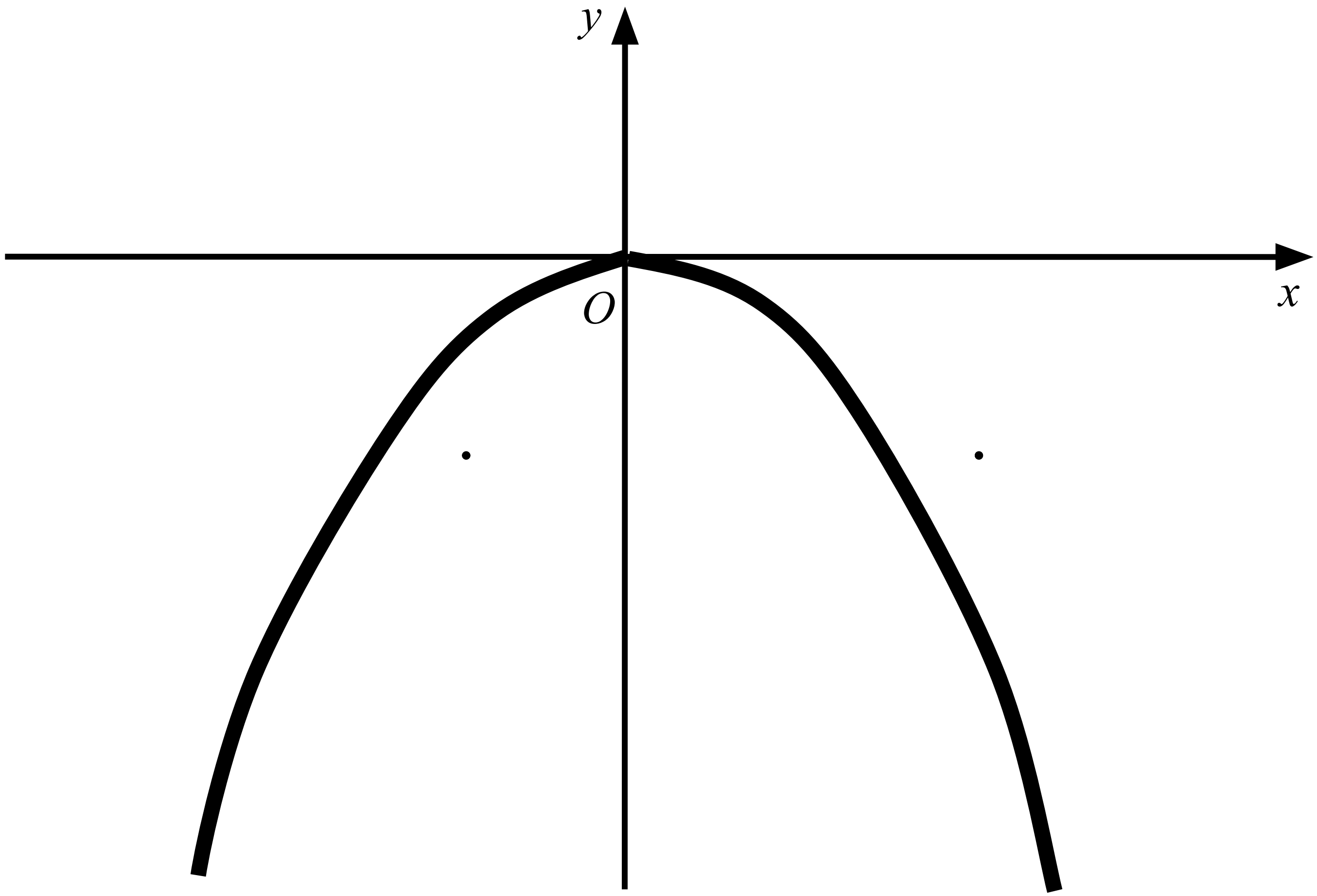
$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$



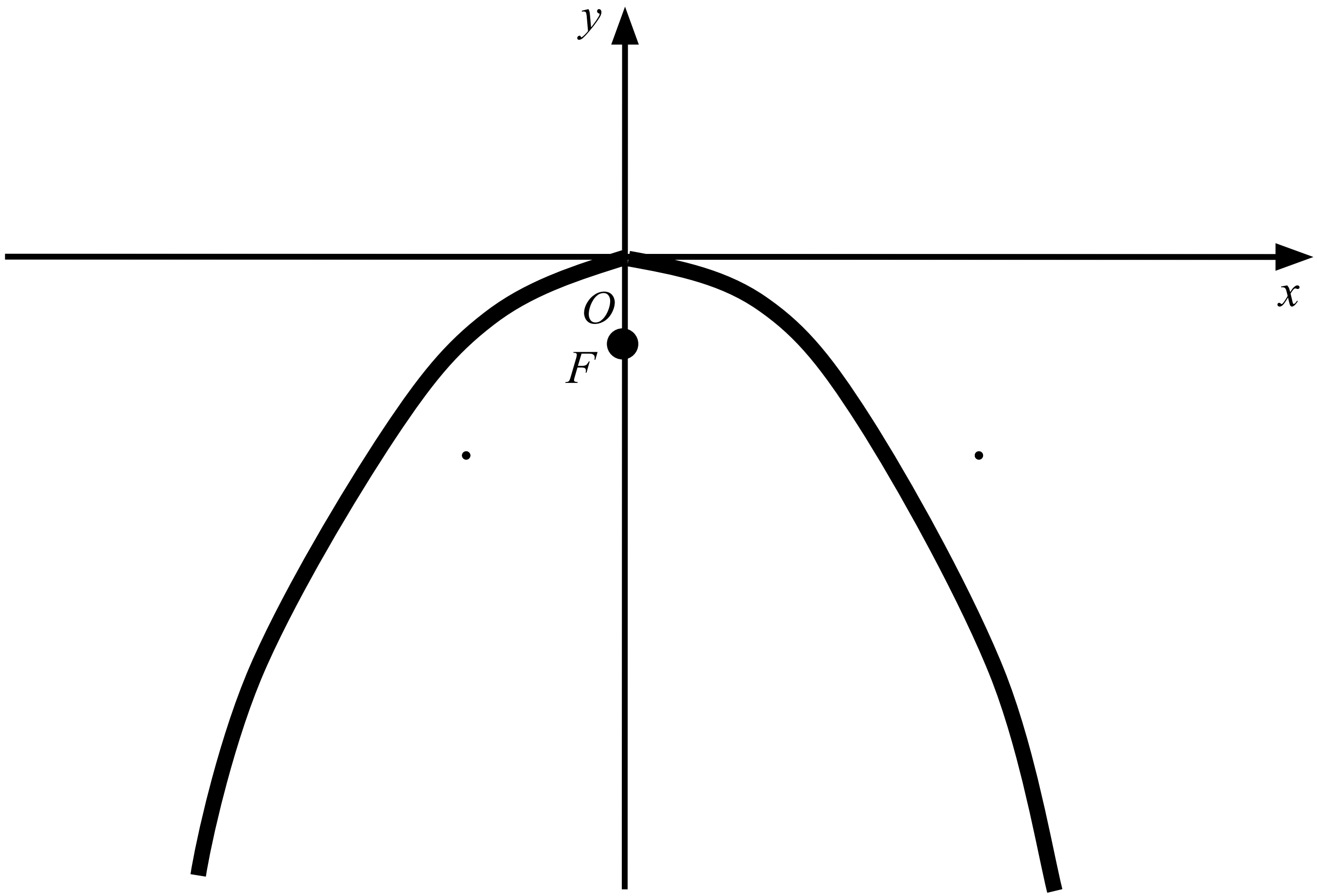
$$x^2 = 2py \quad (3)$$



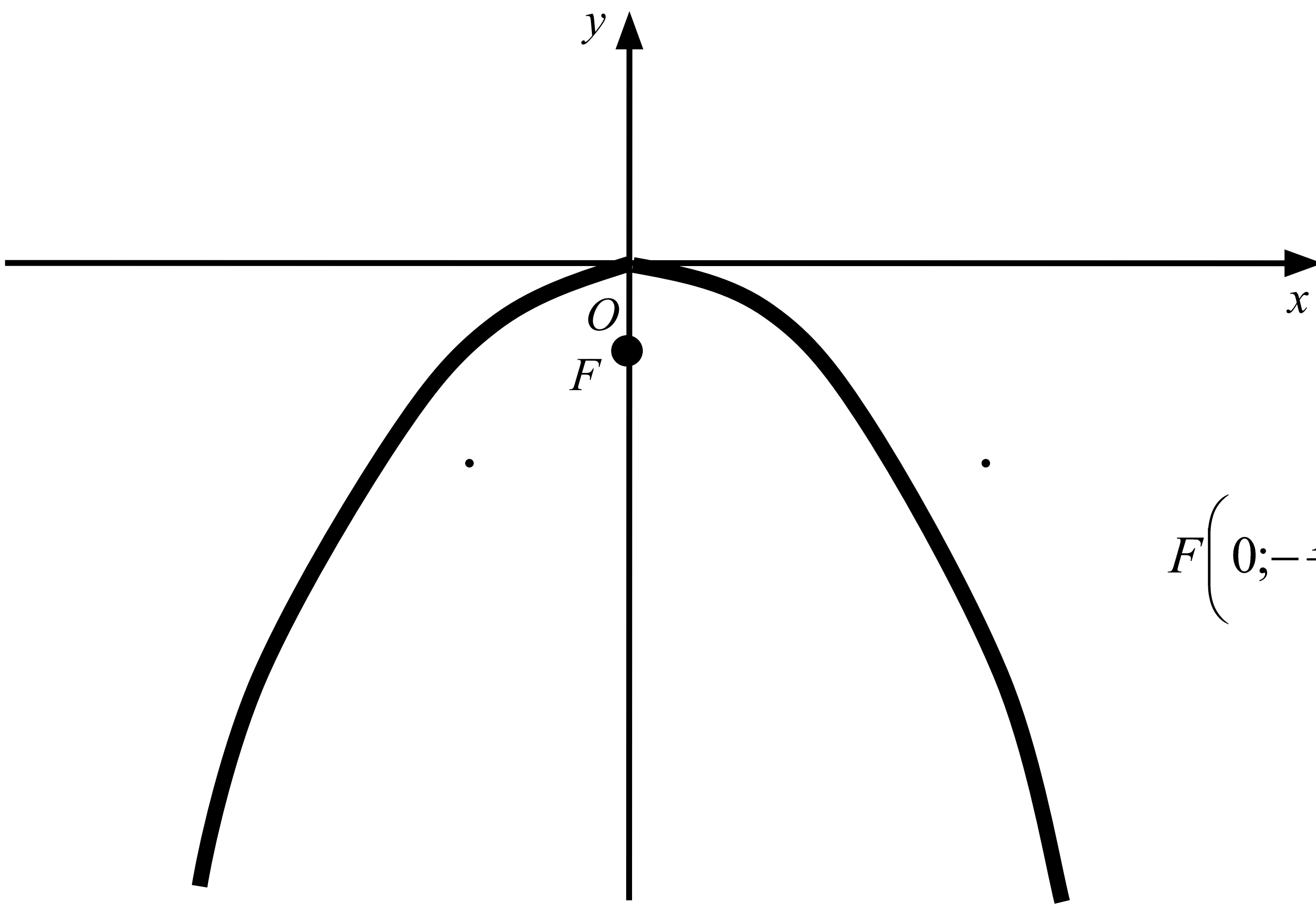
$$x^2 = -2py \quad (4)$$



$$x^2 = -2py \quad (4)$$

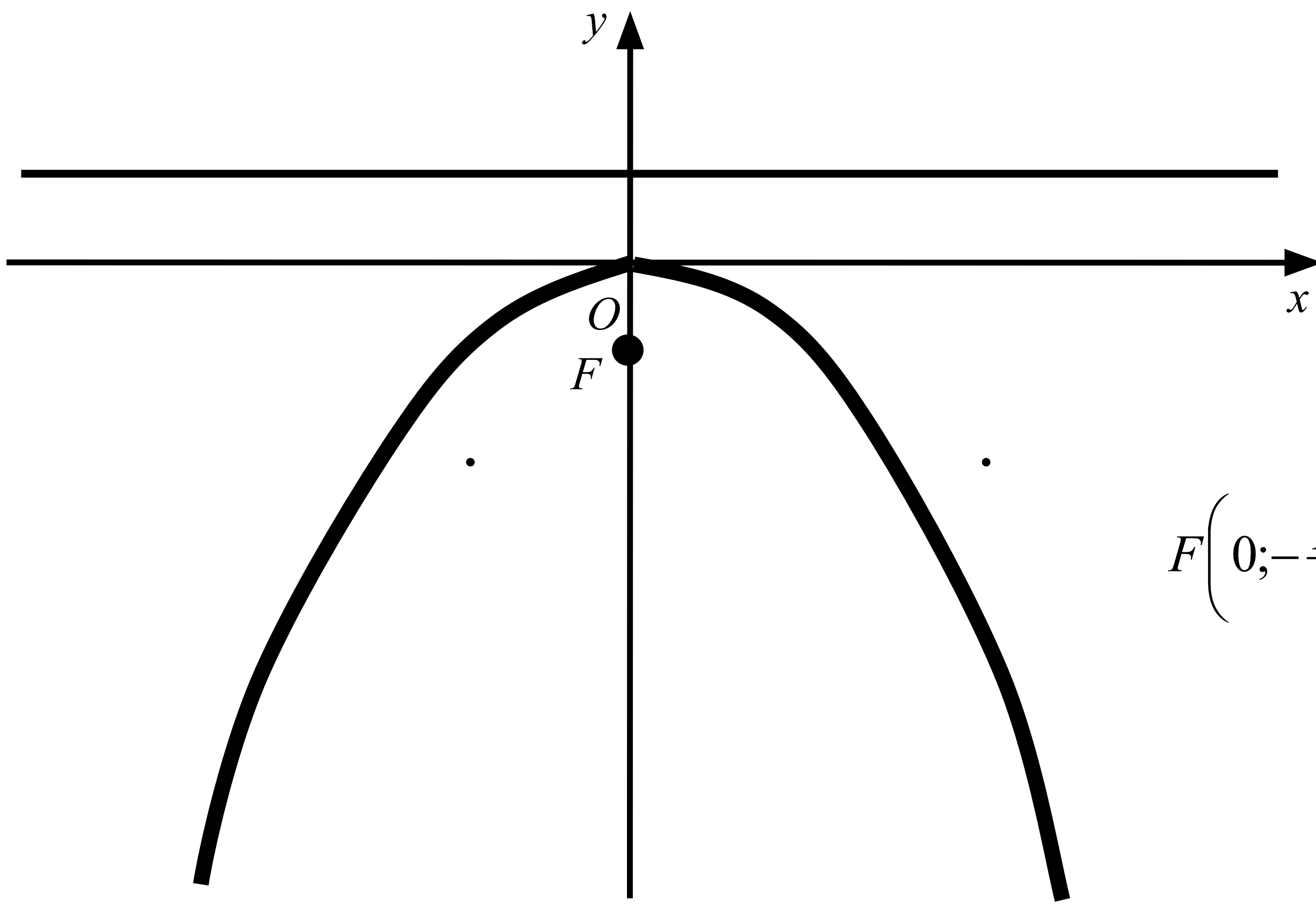


$$x^2 = -2py \quad (4)$$



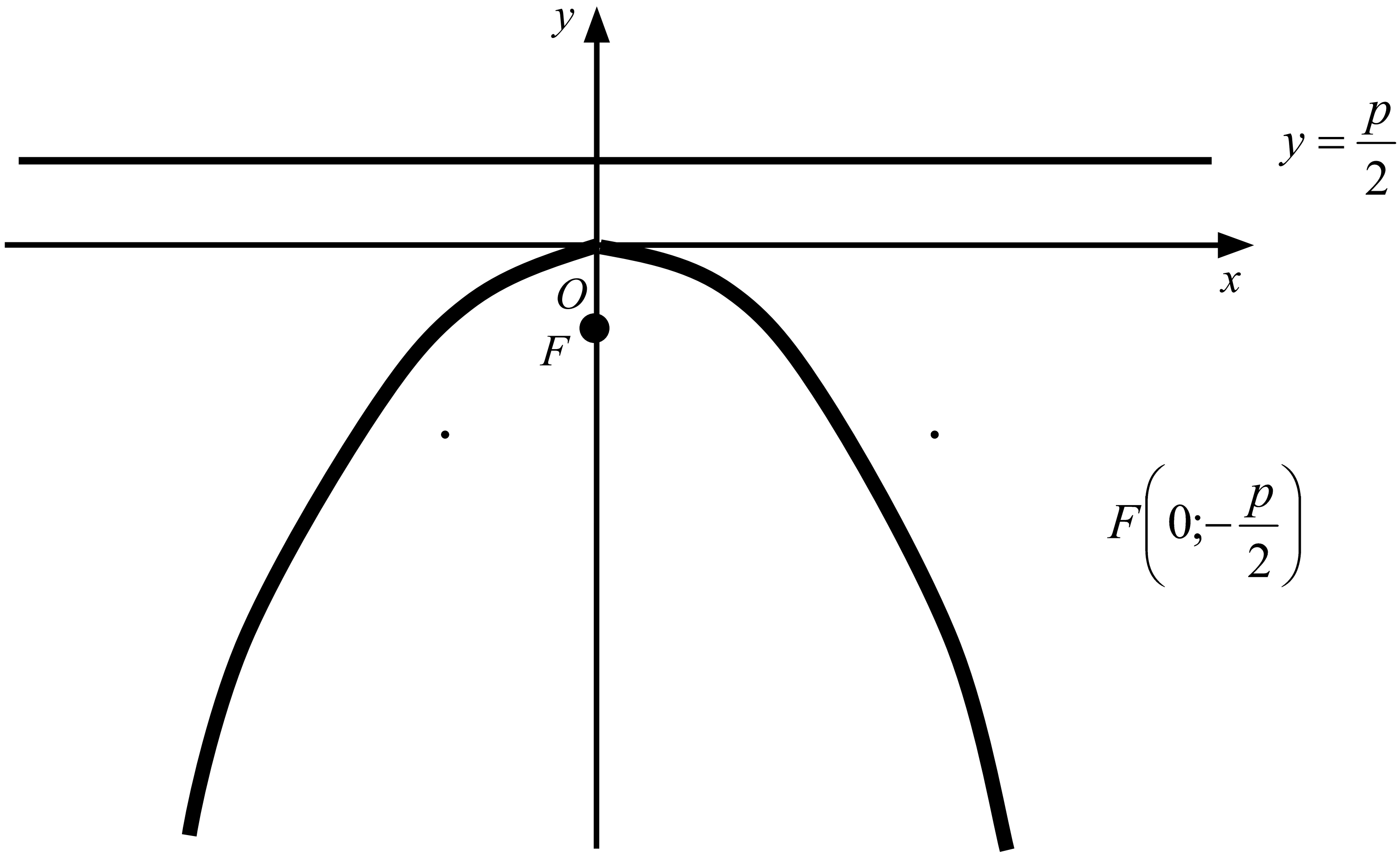
$$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$$

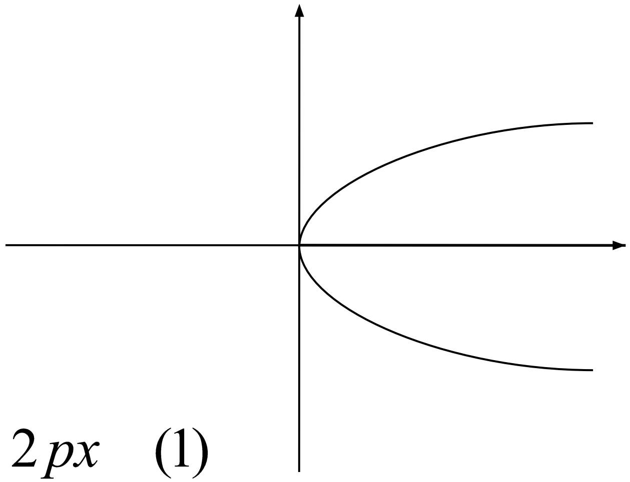
$$x^2 = -2py \quad (4)$$



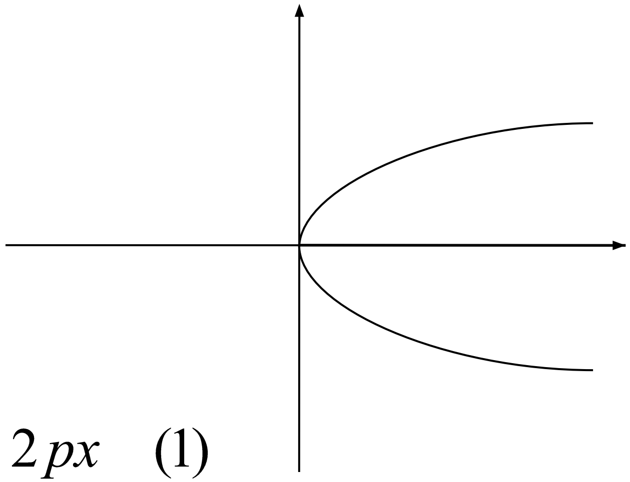
$$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$$

$$x^2 = -2py \quad (4)$$

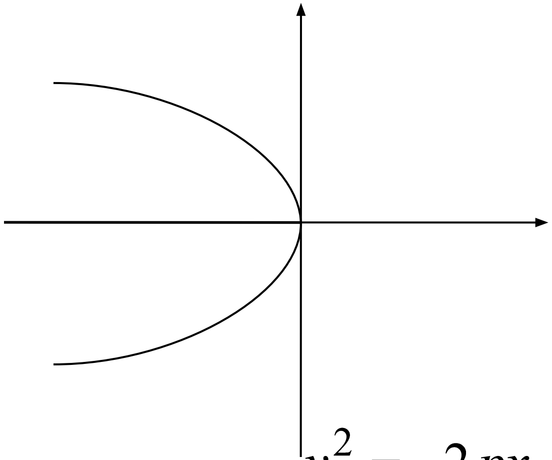




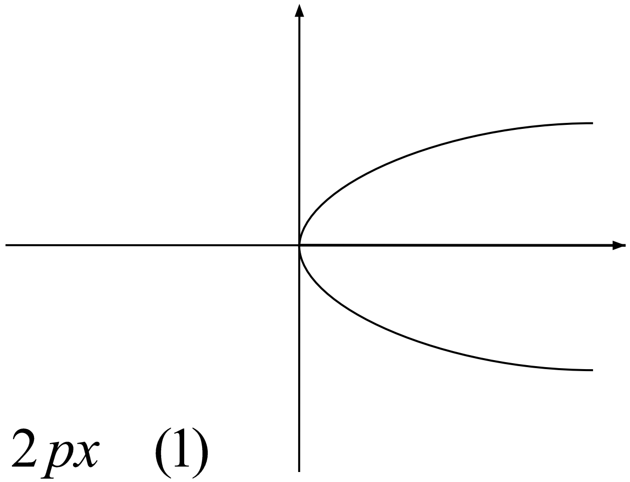
$$y^2 = 2px \quad (1)$$



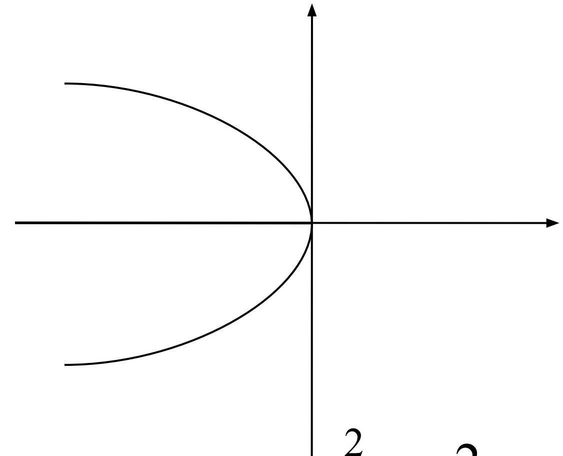
$$y^2 = 2px \quad (1)$$



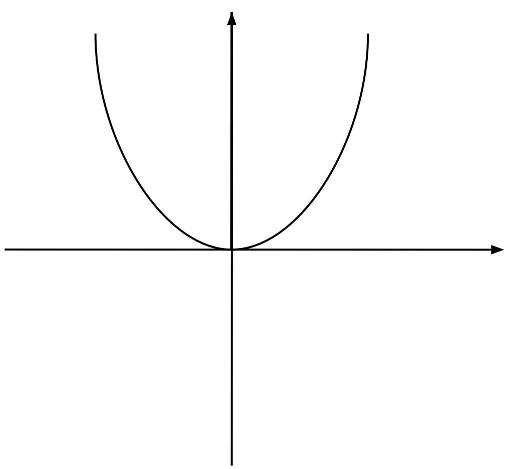
$$y^2 = -2px \quad (2)$$



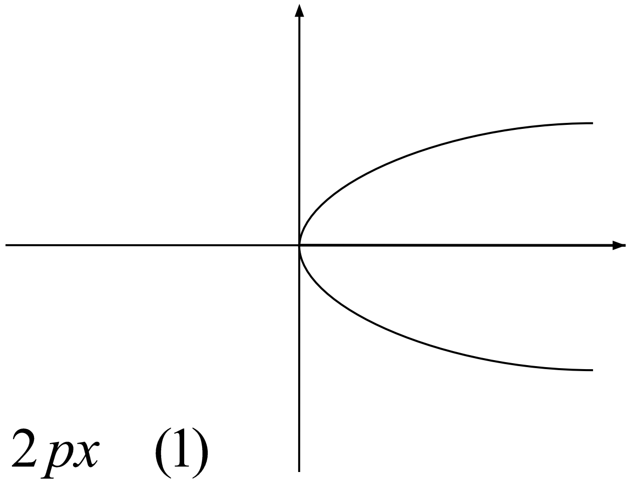
$y^2 = 2px \quad (1)$



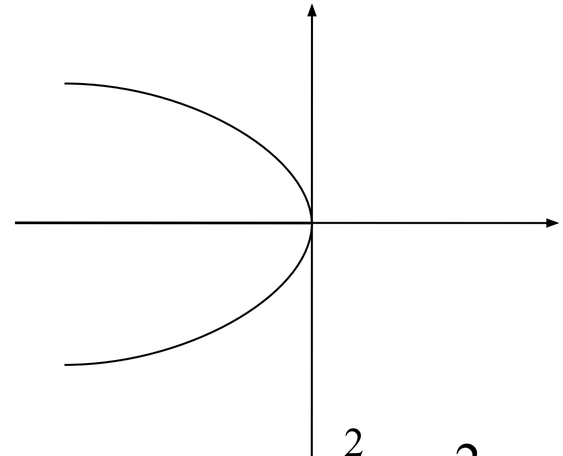
$y^2 = -2px \quad (2)$



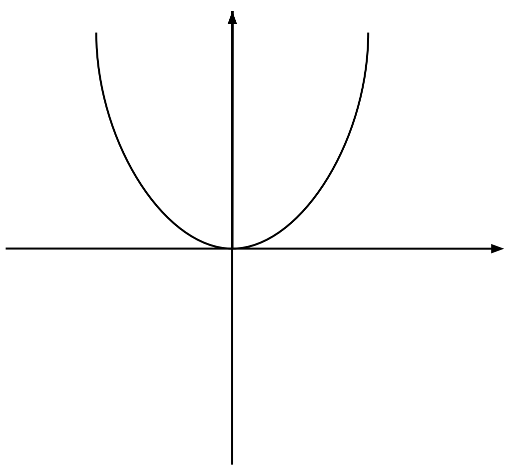
$x^2 = 2py \quad (3)$



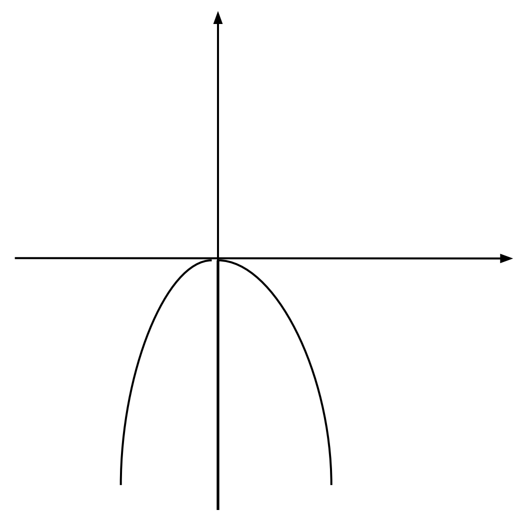
$y^2 = 2px \quad (1)$



$y^2 = -2px \quad (2)$



$x^2 = 2py \quad (3)$



$x^2 = -2py \quad (4)$

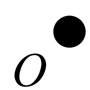
Самостоятельно изучить вопросы по данной теме:

1. Уравнение касательной к параболе
2. Оптическое свойство параболы

9.Уравнение эллипса, параболы и гиперболы в полярных координатах.

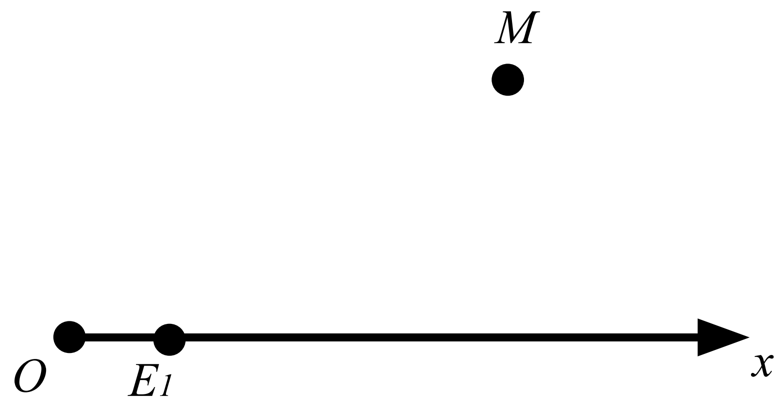
Полярная система координат на плоскости.

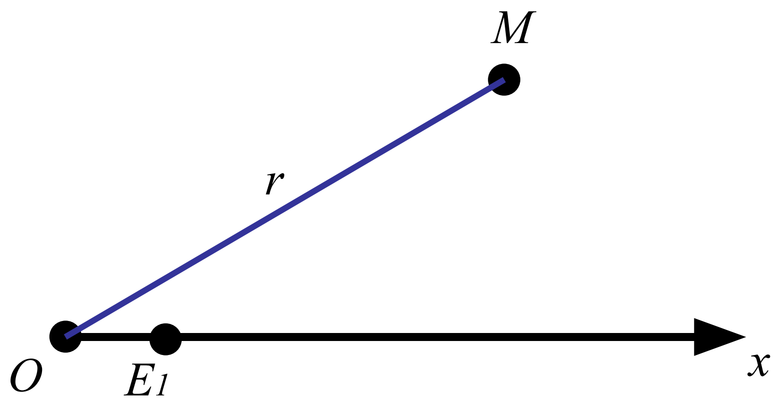
Говорят, что на плоскости введена полярная система координат, если эта плоскость ориентирована, на ней выбраны точка O – *полюс*, луч Ox, выходящий из точки O - *полярная ось* и масштабный отрезок.


O

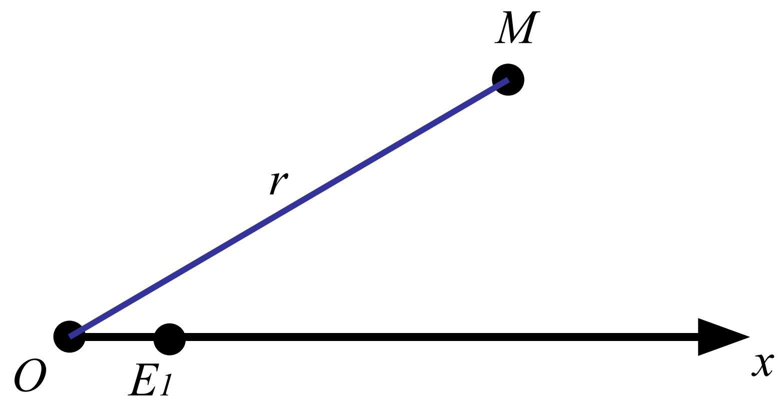

O
x

O
E1
x

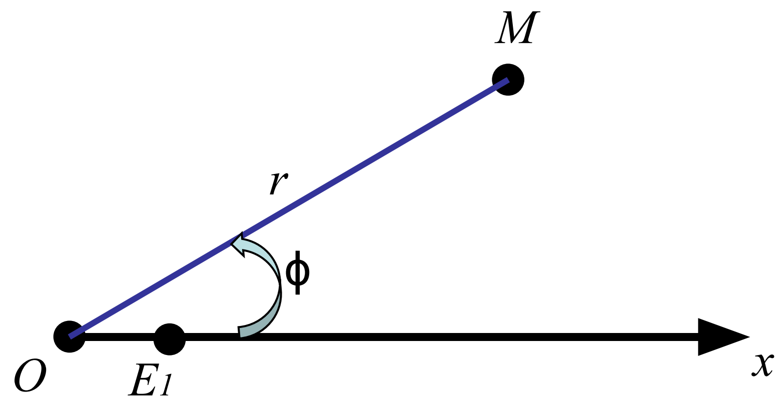

M
O
E1
x


M
r
O
E1
x

$r = \left| OM \right|$ полярный радиус M

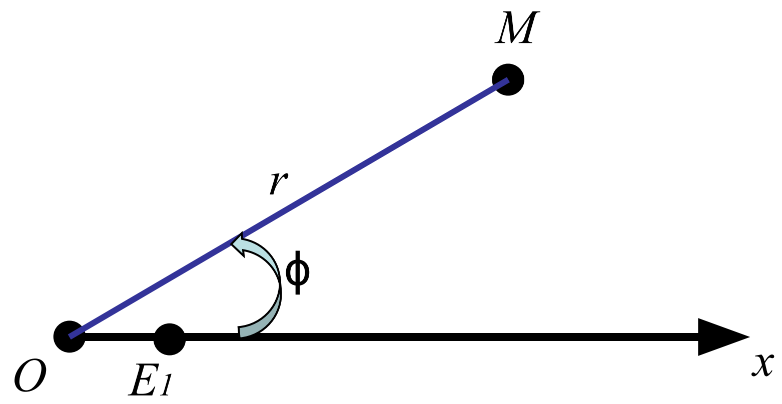


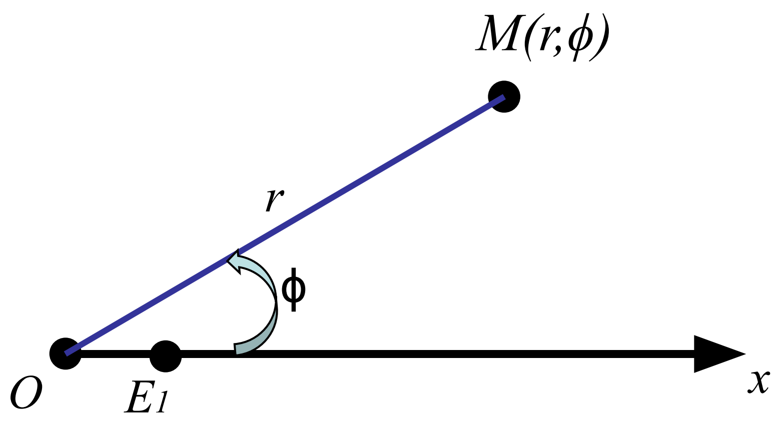
$r = |OM|$ полярный радиус M



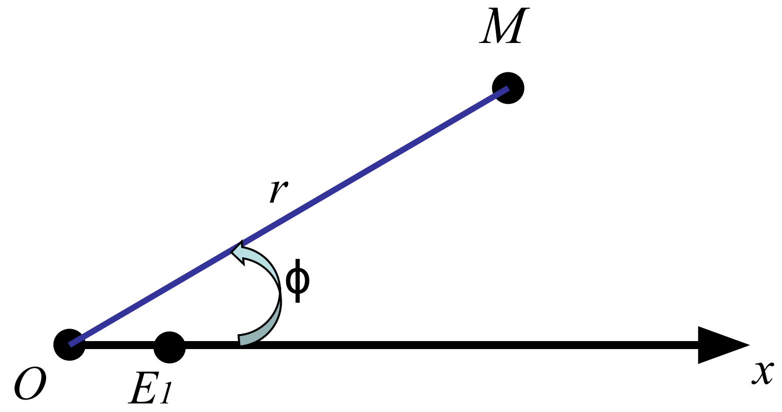
$r = |OM|$ полярный радиус M

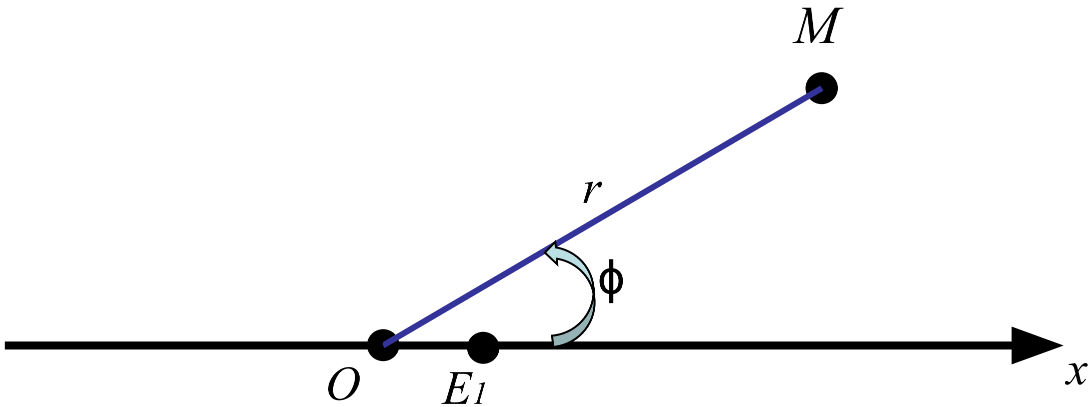
$\angle\varphi$ амплитуда

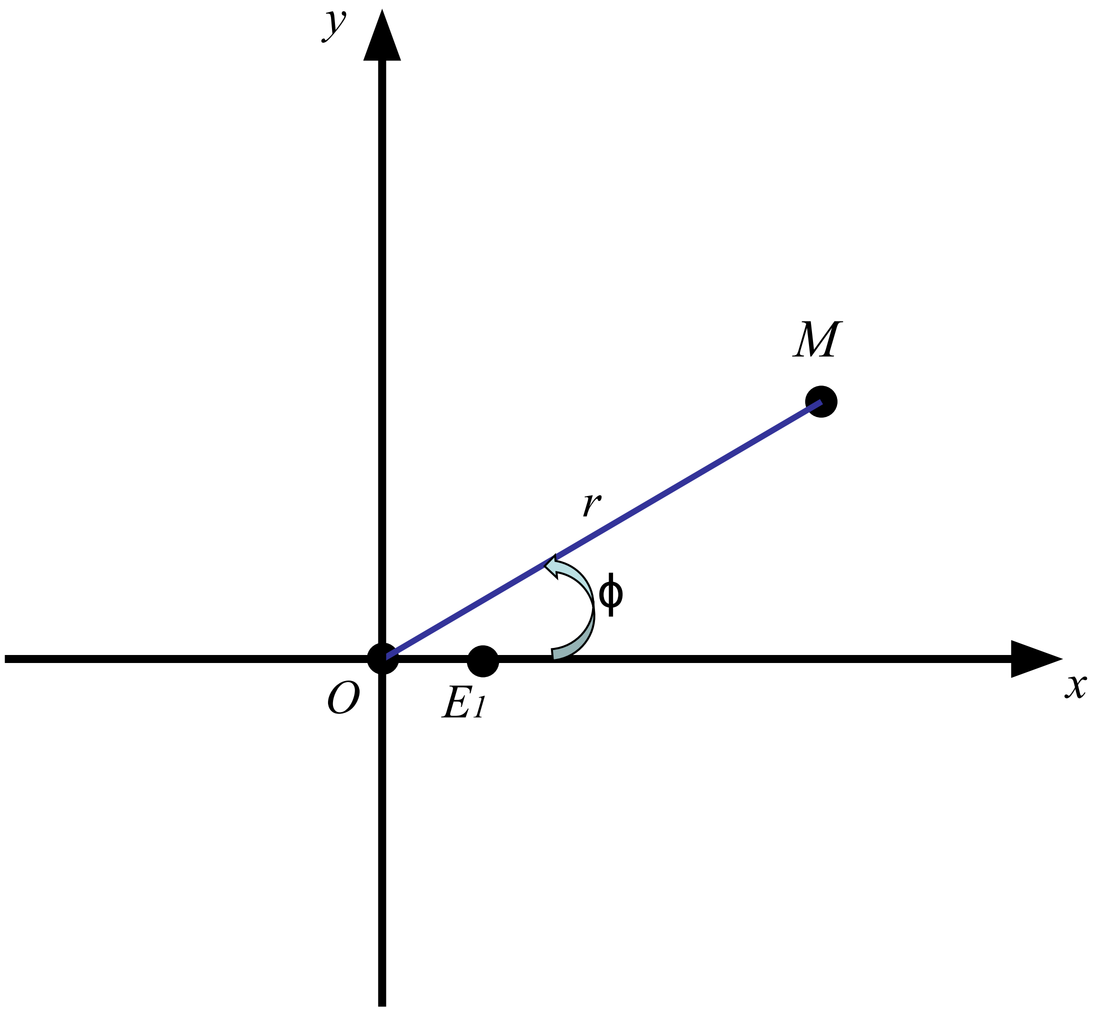



M(r,ϕ)
r
ϕ
O
E1
x

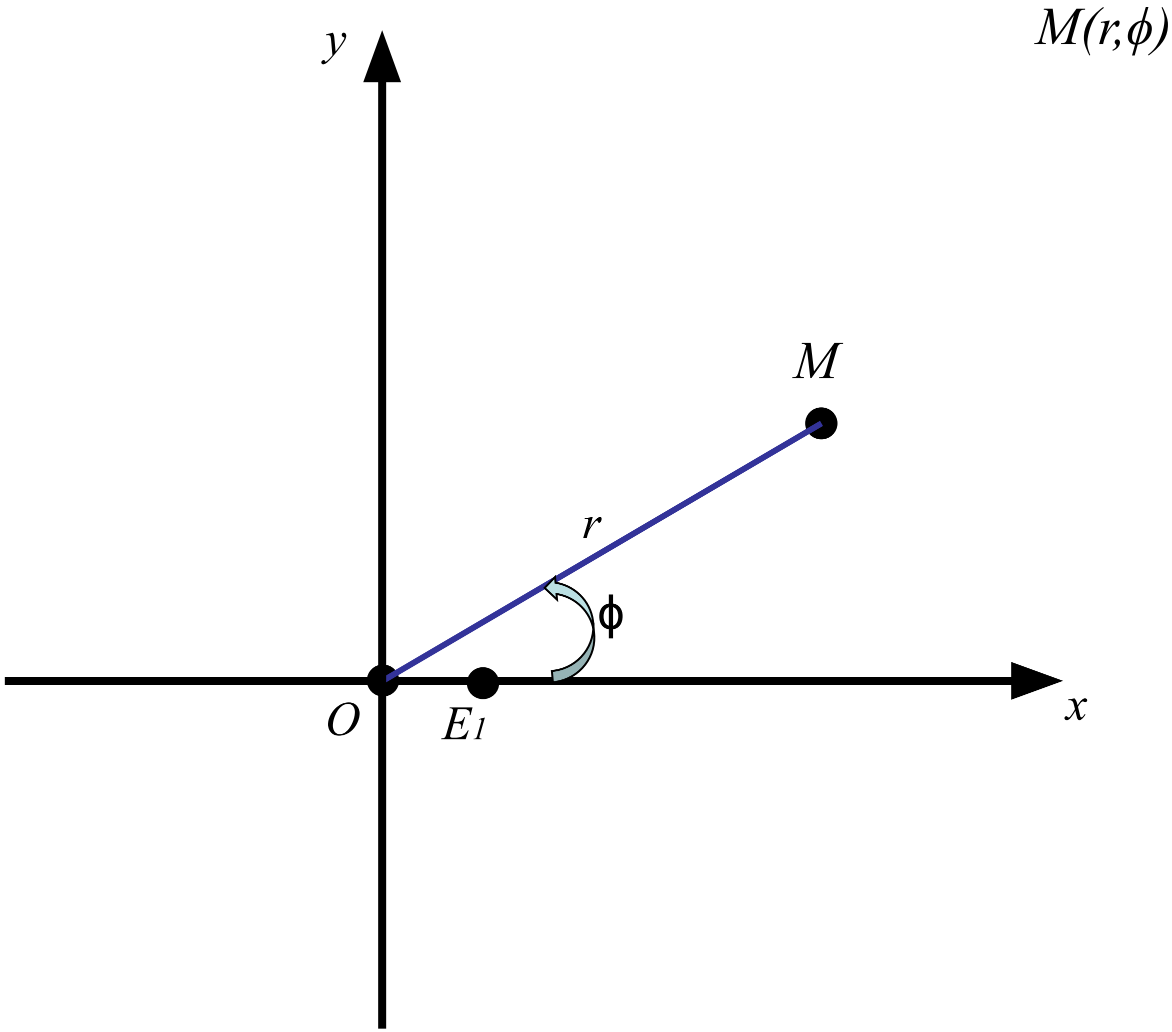
Введём ДПСК



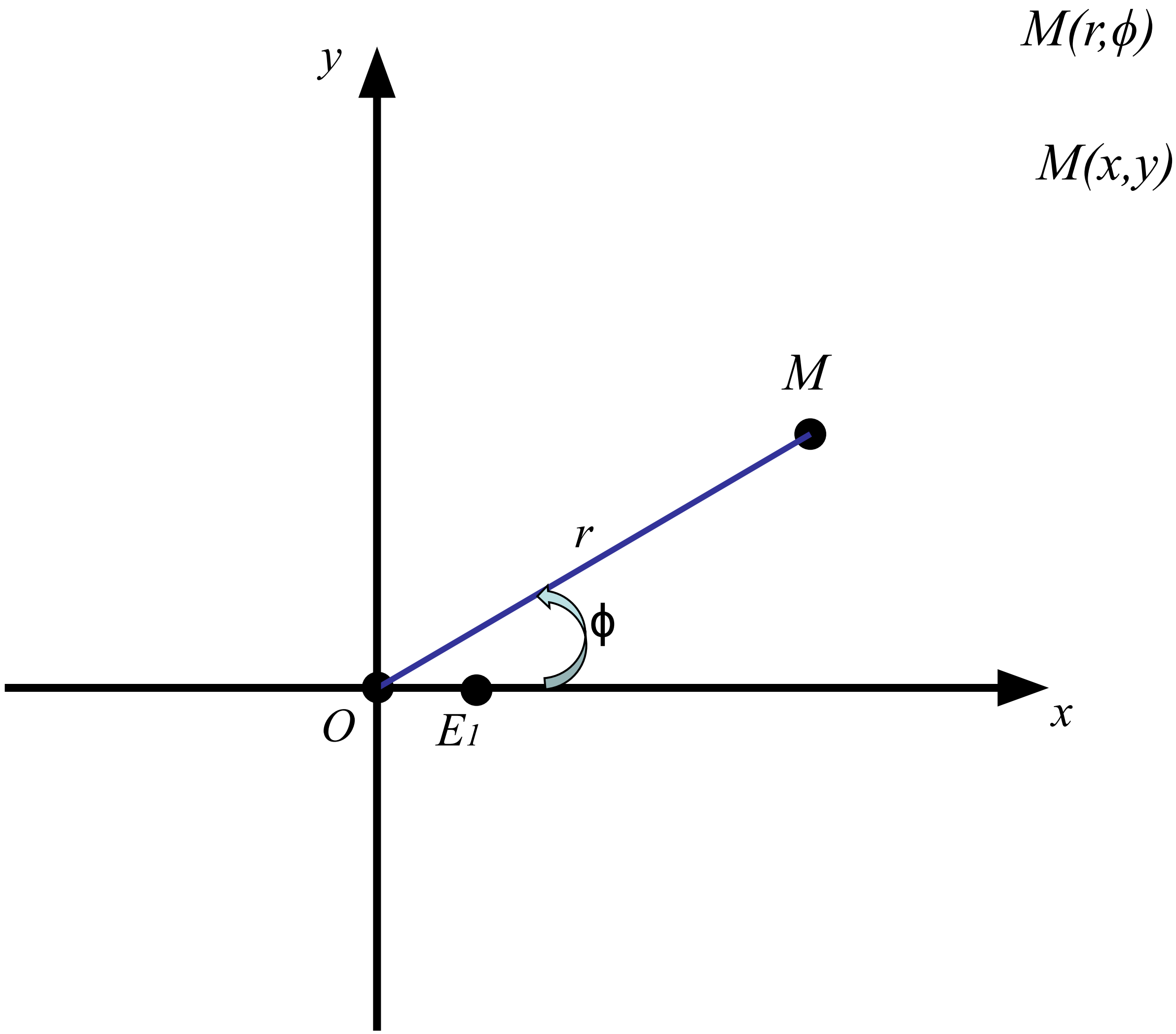

M
r
ϕ
O
E1
x



y
M
r
ϕ
O
E1
x



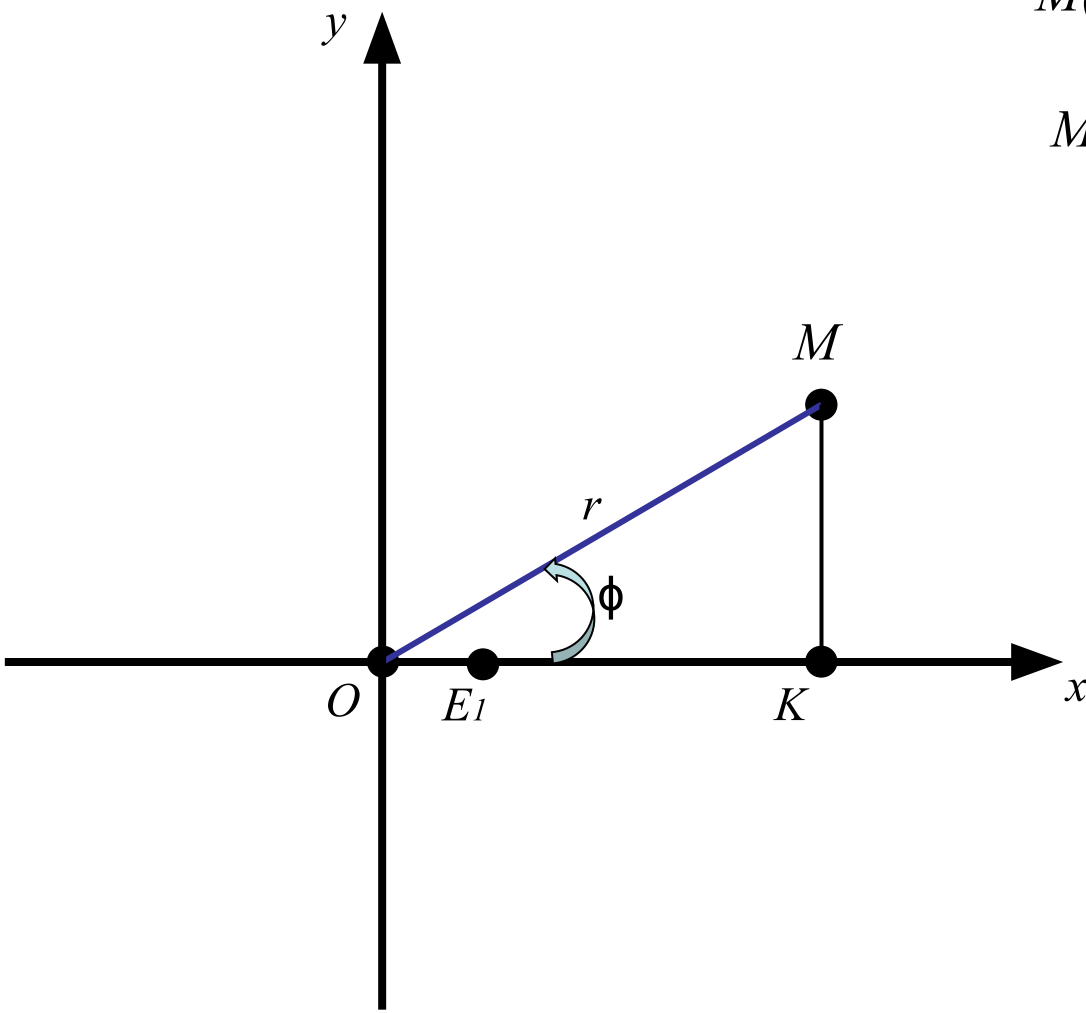
$M(r,\phi)$
y
M
r
ϕ
O
E_1
x



$M(r,\phi)$
$M(x,y)$
y
M
r
ϕ
x
O
E_1

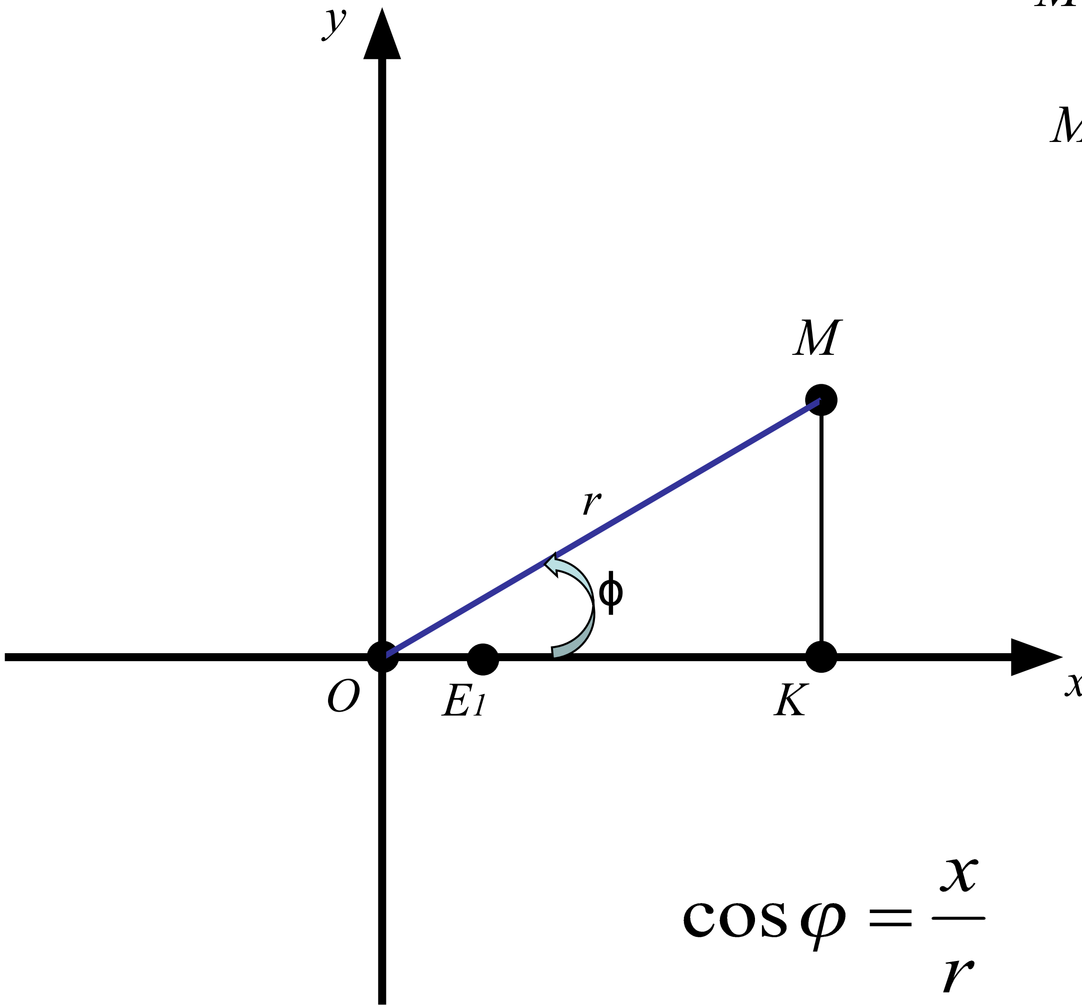
$M(r,\phi)$

$M(x,y)$



$M(r,\phi)$

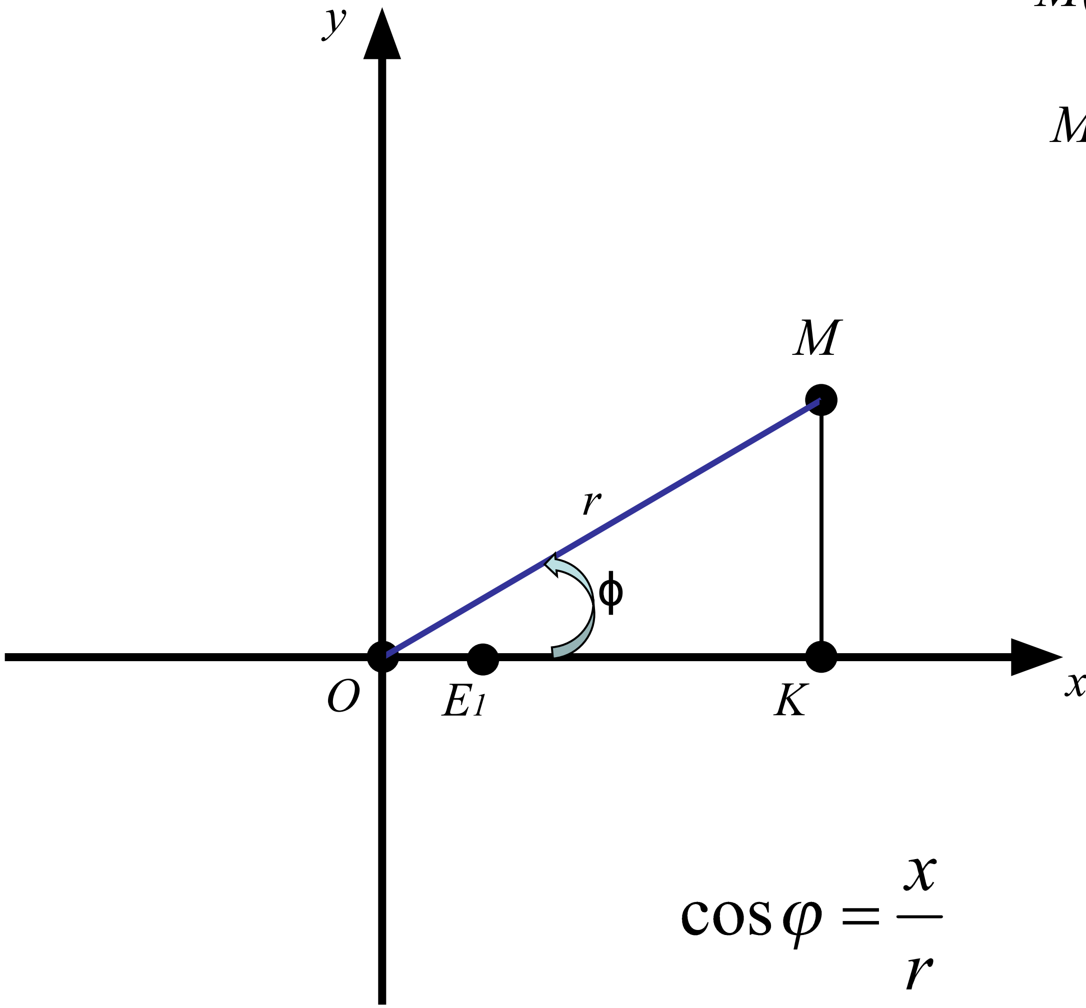
$M(x,y)$



$$\cos\varphi = \frac{x}{r}$$

$M(r,\phi)$

$M(x,y)$



$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

Из $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$

Получаем

$$x = r\cos\varphi \quad (1) \qquad\qquad y = r\sin\varphi$$

Из $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ $\sin\varphi = \frac{y}{r}$

Получаем

$$x = r\cos\varphi \quad (1) \qquad y = r\sin\varphi$$

Так как

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Из $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ $\sin\varphi = \frac{y}{r}$

Получаем

$$x = r\cos\varphi \quad (1) \qquad y = r\sin\varphi$$

Так как

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

то

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3) \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Формулы (1) позволяют вычислить декартовые прямоугольные координаты $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ точки M по её полярным координатам $\boldsymbol{\phi}$,$\boldsymbol{r}$.

Формулы (1) позволяют вычислить декартовые прямоугольные координаты $\boldsymbol{x, y}$ точки M по её полярным координатам $\boldsymbol{\phi, r}$.

Формулы (2) и (3) позволяют вычислить полярные координаты $\boldsymbol{\phi}$ и $\boldsymbol{r}$, по её декартовым координатам $\boldsymbol{x, y}$.

Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

Пусть L-какая-нибудь из изученных нами линий второго порядка,

(если L-гипербола, то имеем в виду одну из её ветвей).

Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

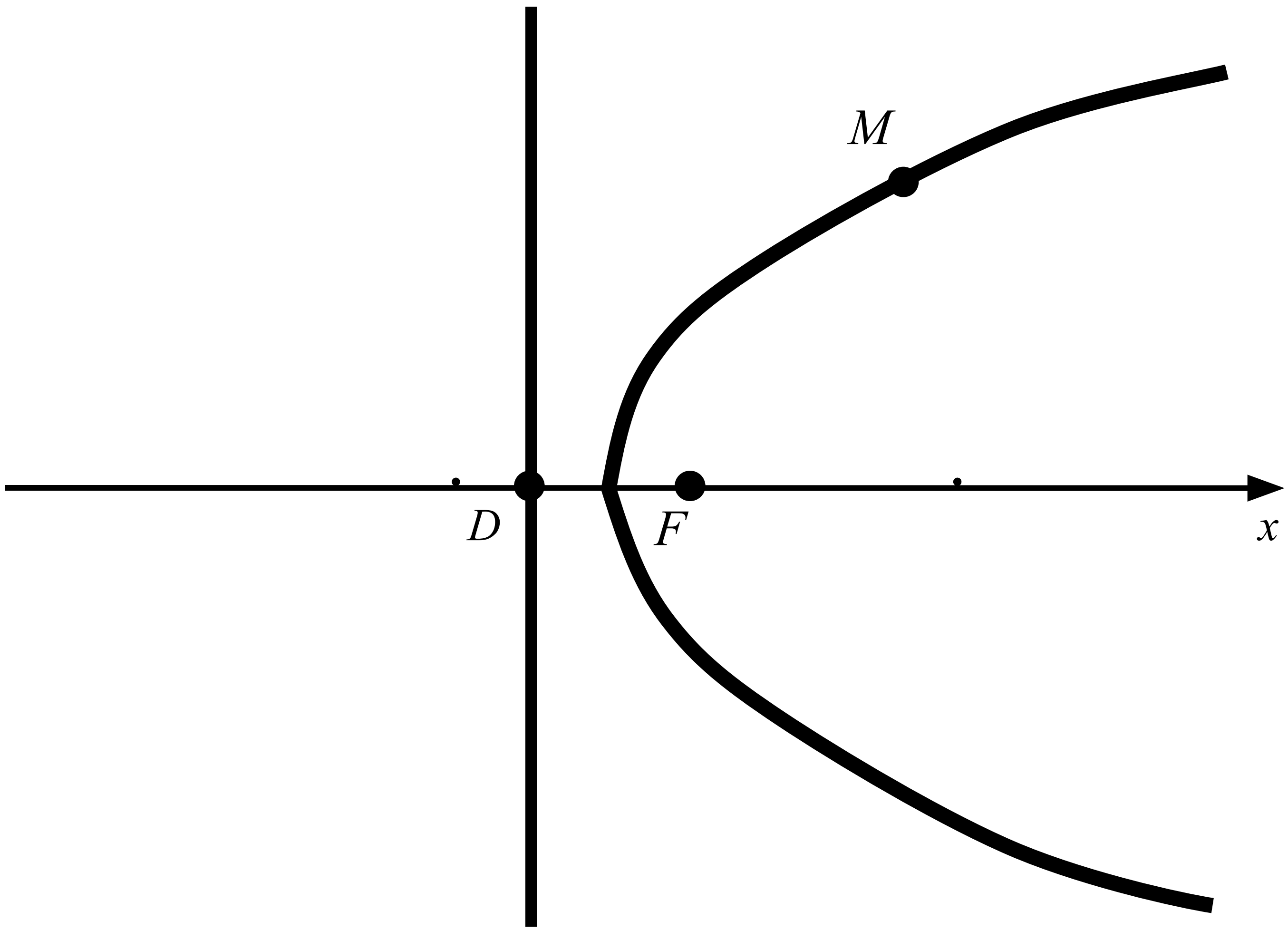
Пусть L-какая-нибудь из изученных нами линий второго порядка,

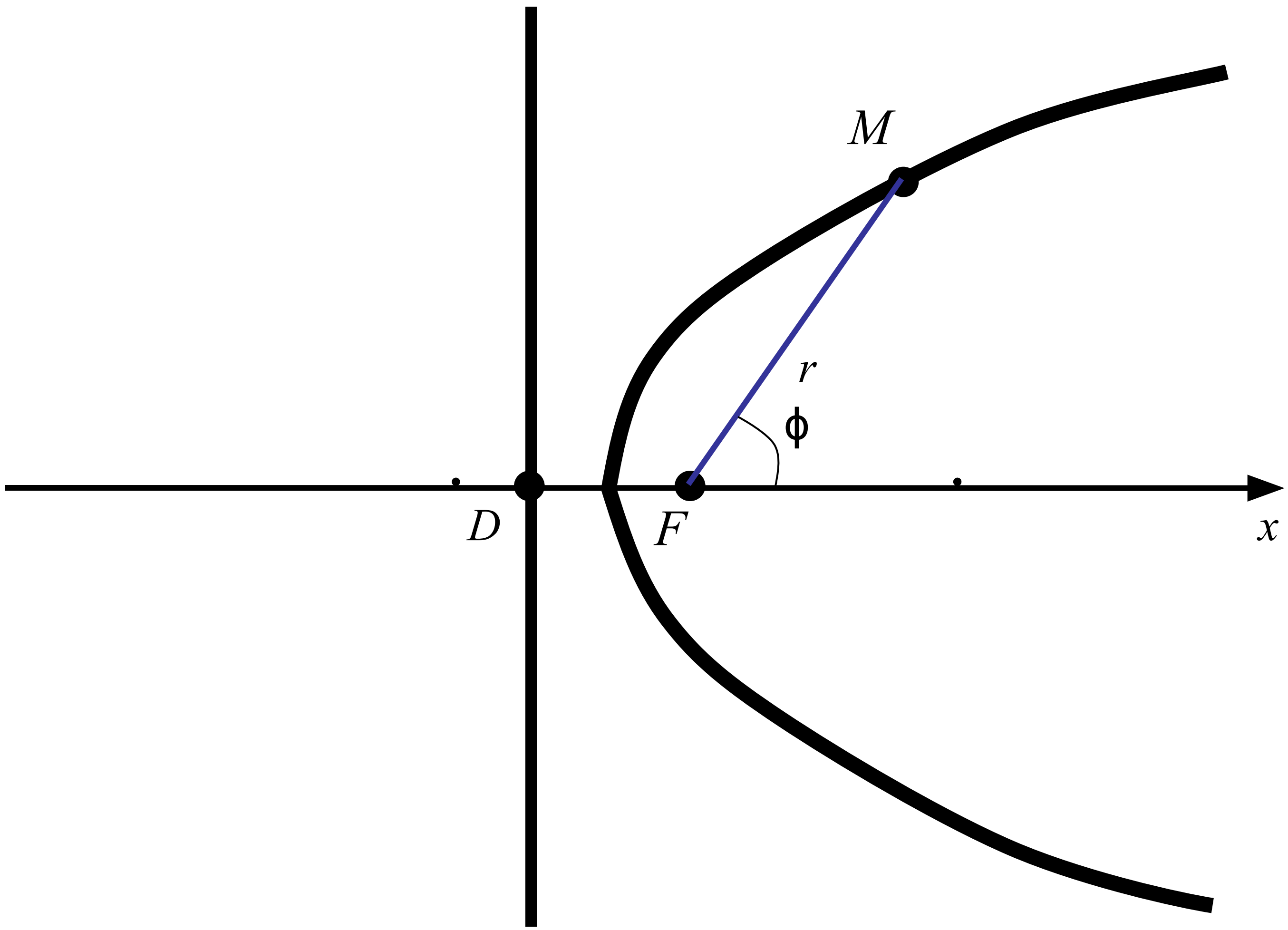
(если L-гипербола, то имеем в виду одну из её ветвей).

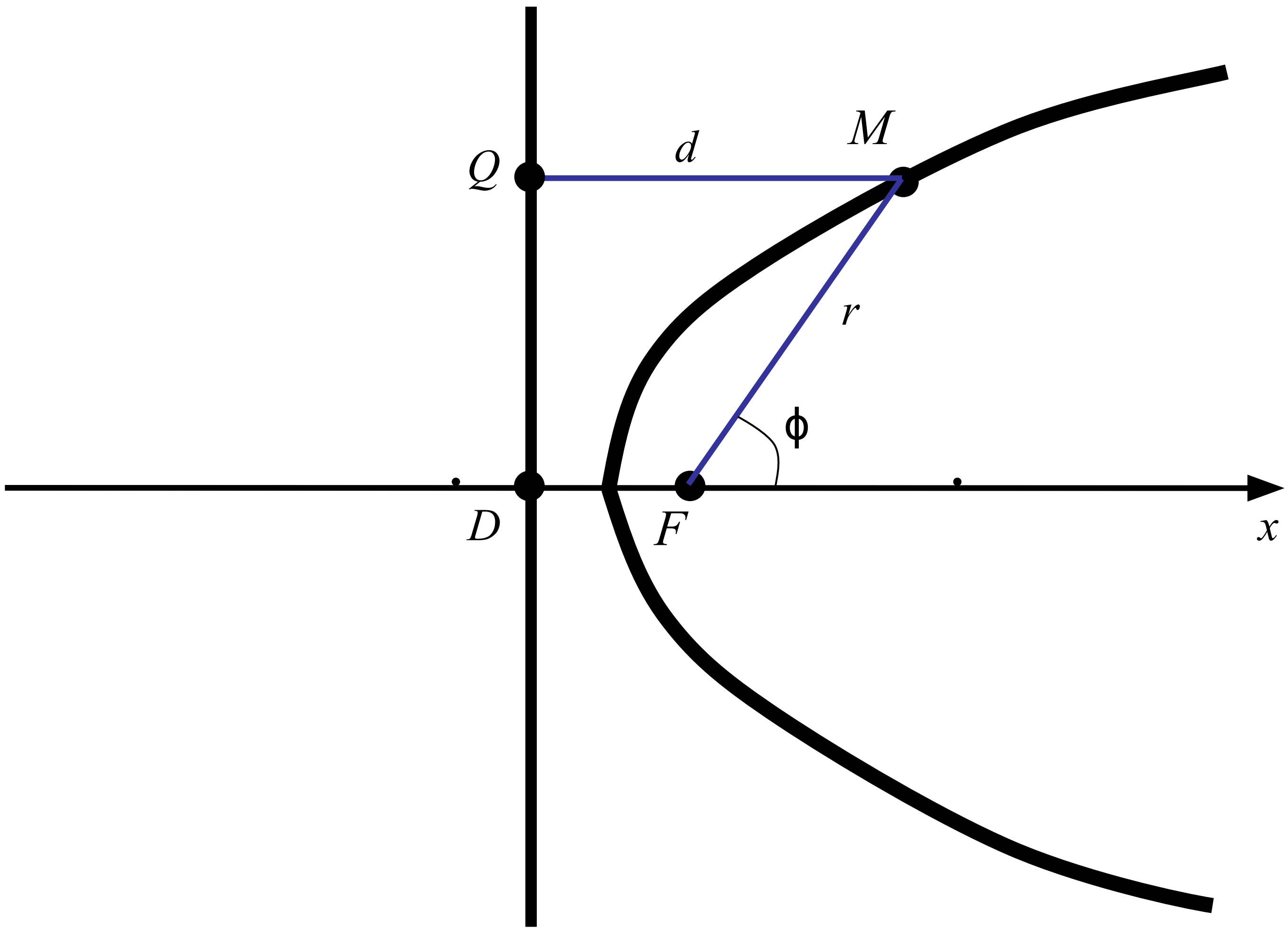
Будем называть *фокальной осью* линии L, ту из её осей симметрии, которая проходит через фокус этой линии.

Введем полярную систему координат, совмещая полюс с фокусом F (в случае гиперболы берем фокус ближайшей к вершине рассматриваемой ветви).

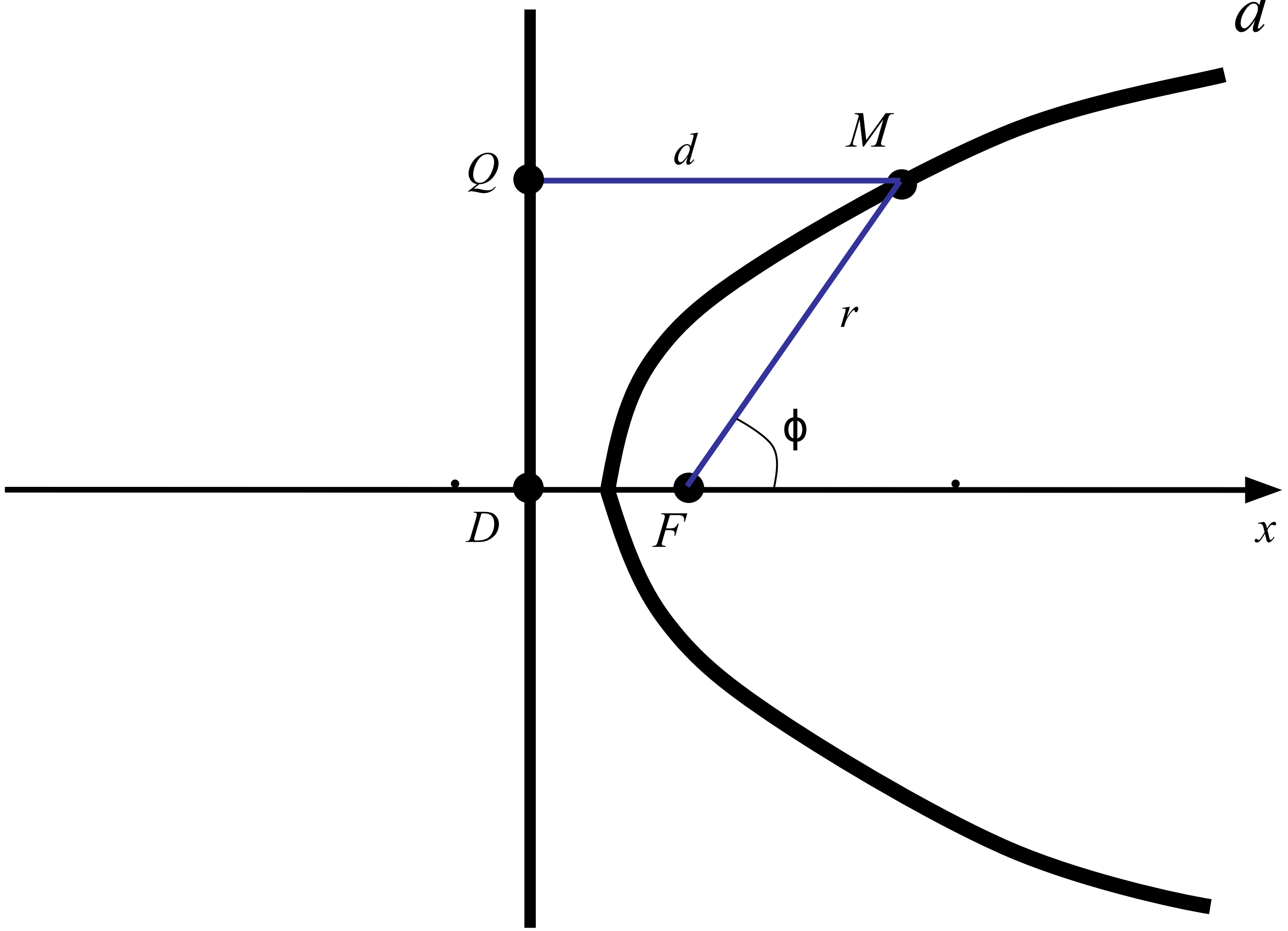
Пусть D-основание перпендикуляра, опущенного из F на директрису, соответствующего этому фокусу. Полярную ось расположим на прямой DF, причем положительное направление примем от D к F.


M
D
F
x

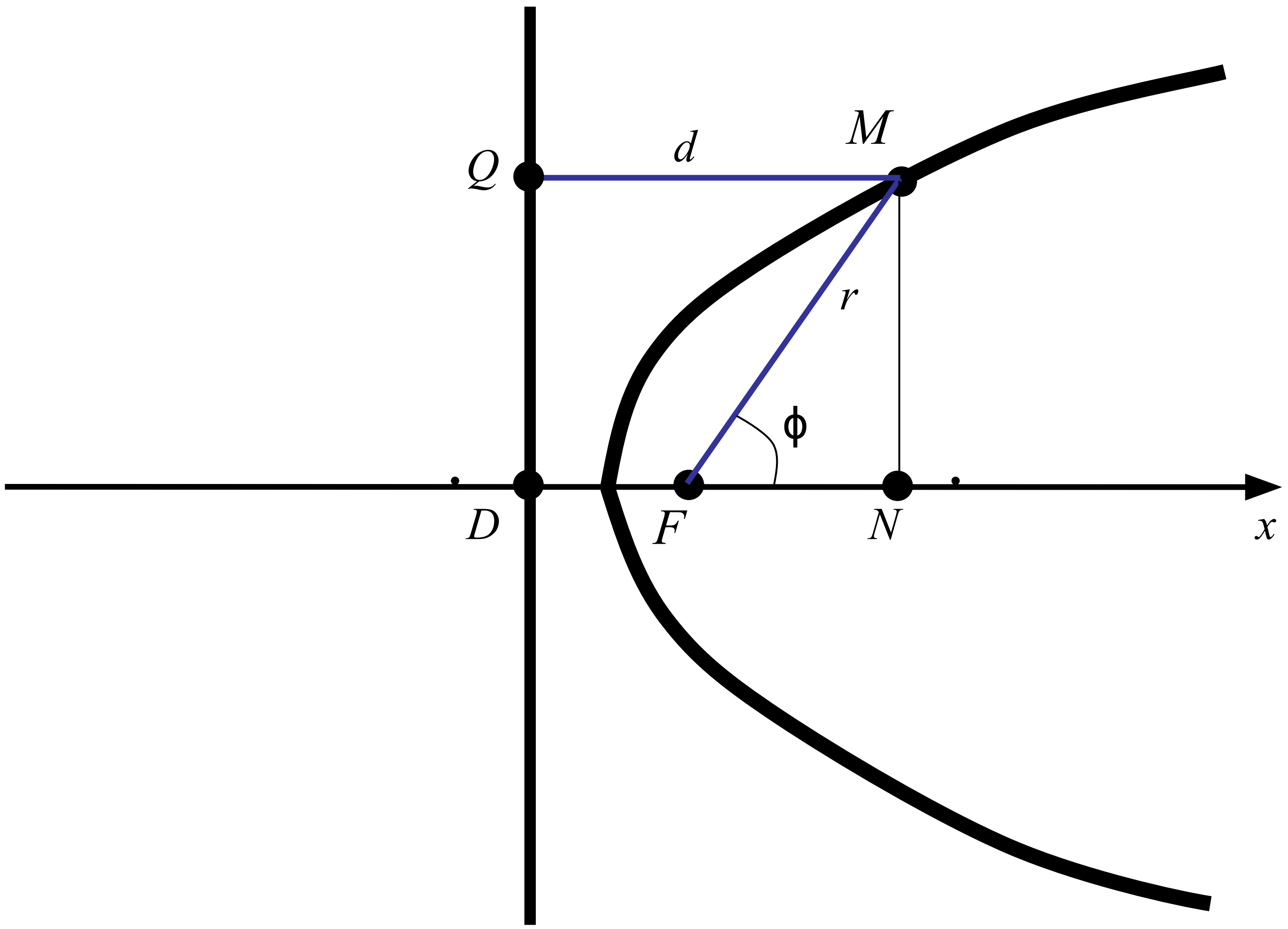

M
r
ϕ
D
F
x


Q
d
M
r
ϕ
D
F
x

$$\frac{r}{d} = e$$

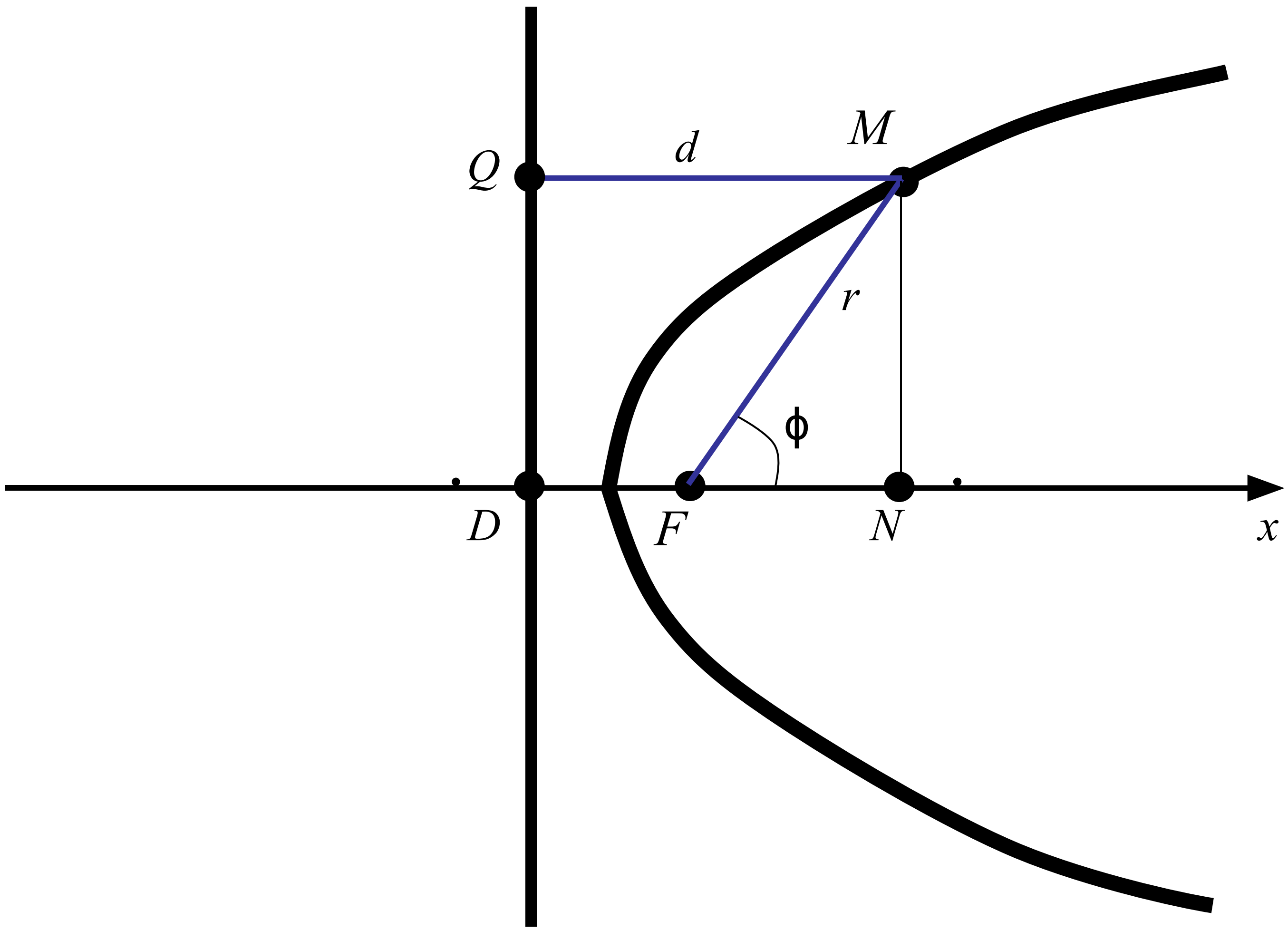


$$\frac{r}{d} = e$$

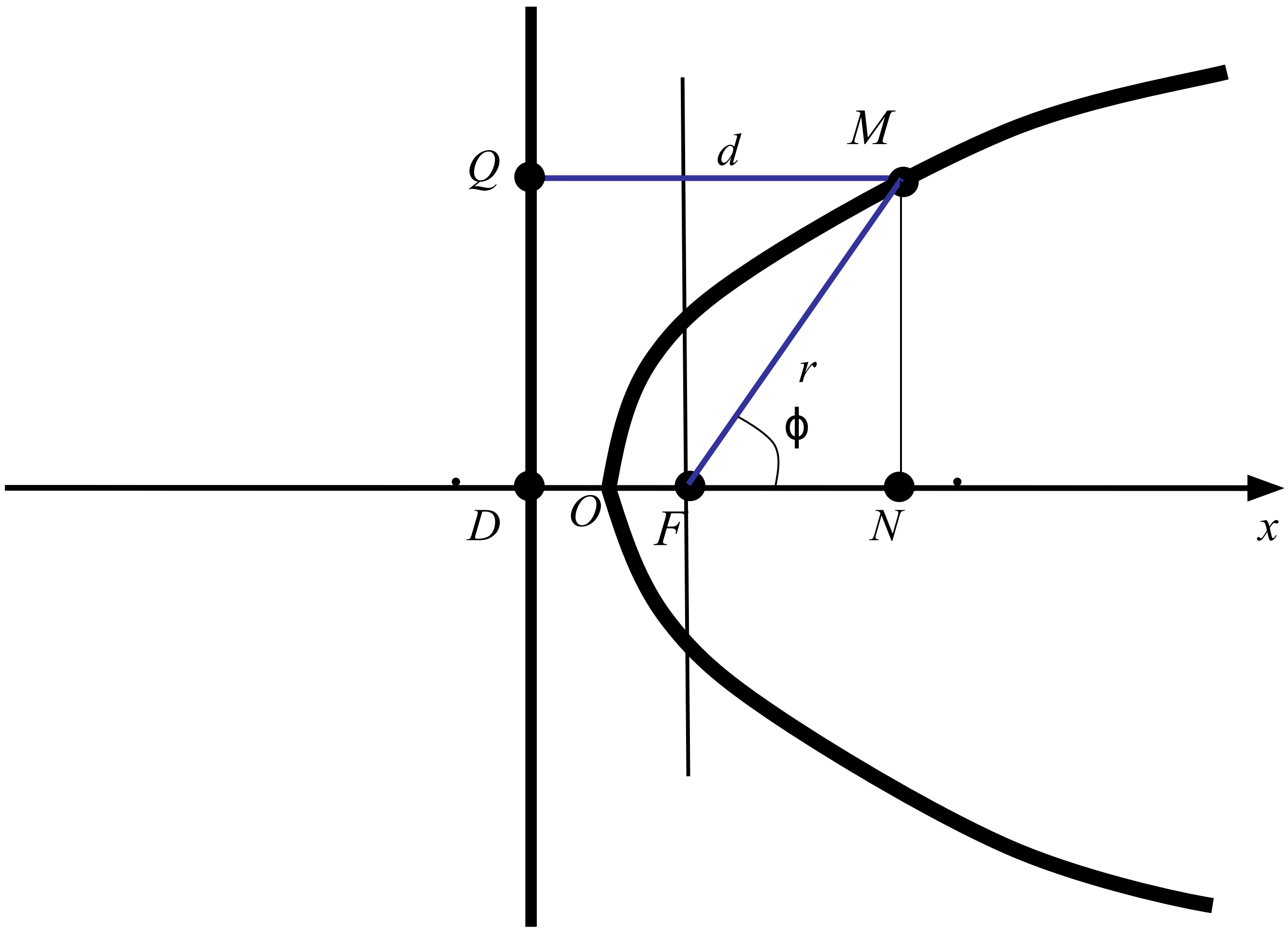


$$d = QM = DN = DF + FN = DF +$$

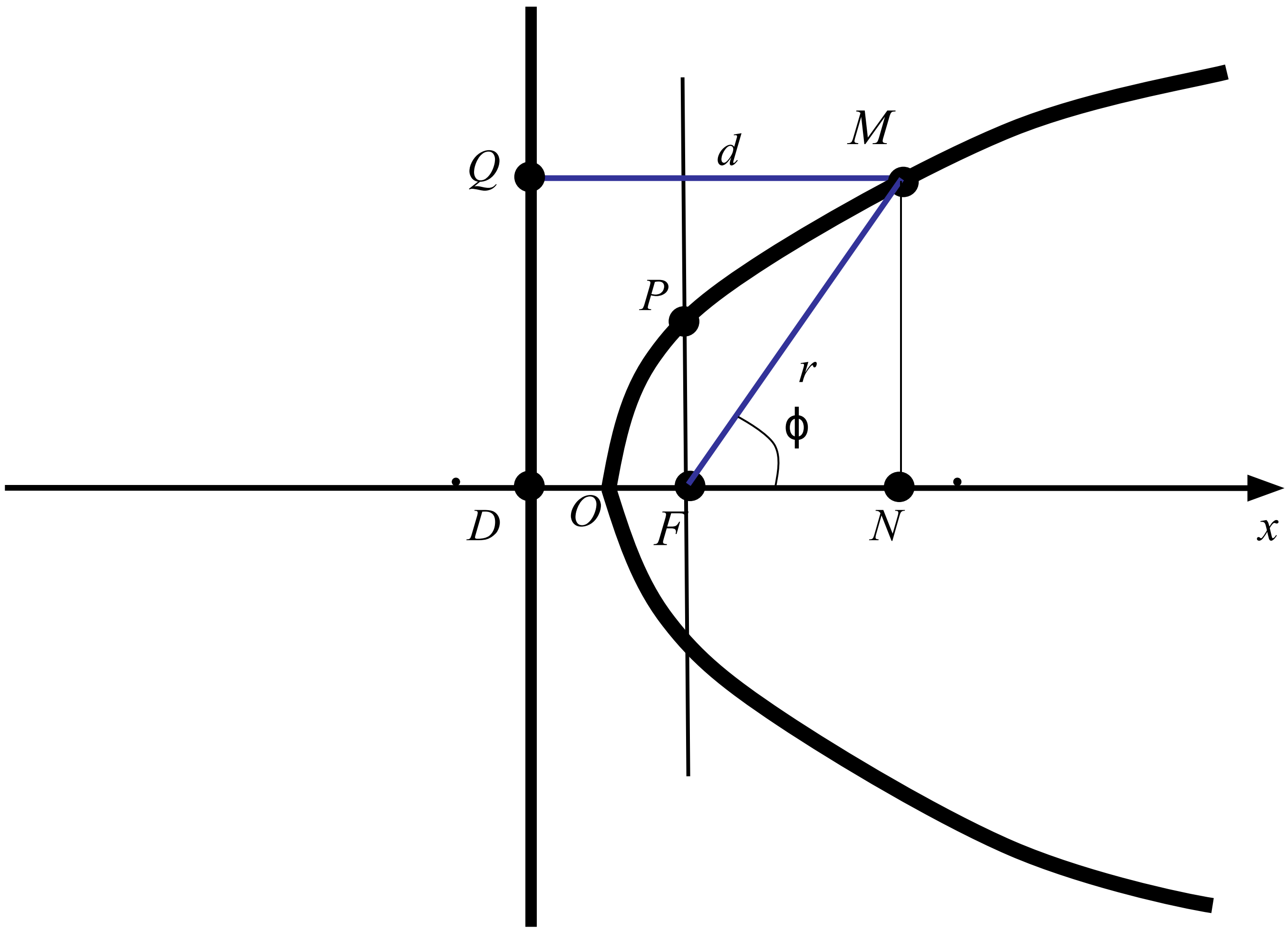
$$\frac{r}{d} = e$$



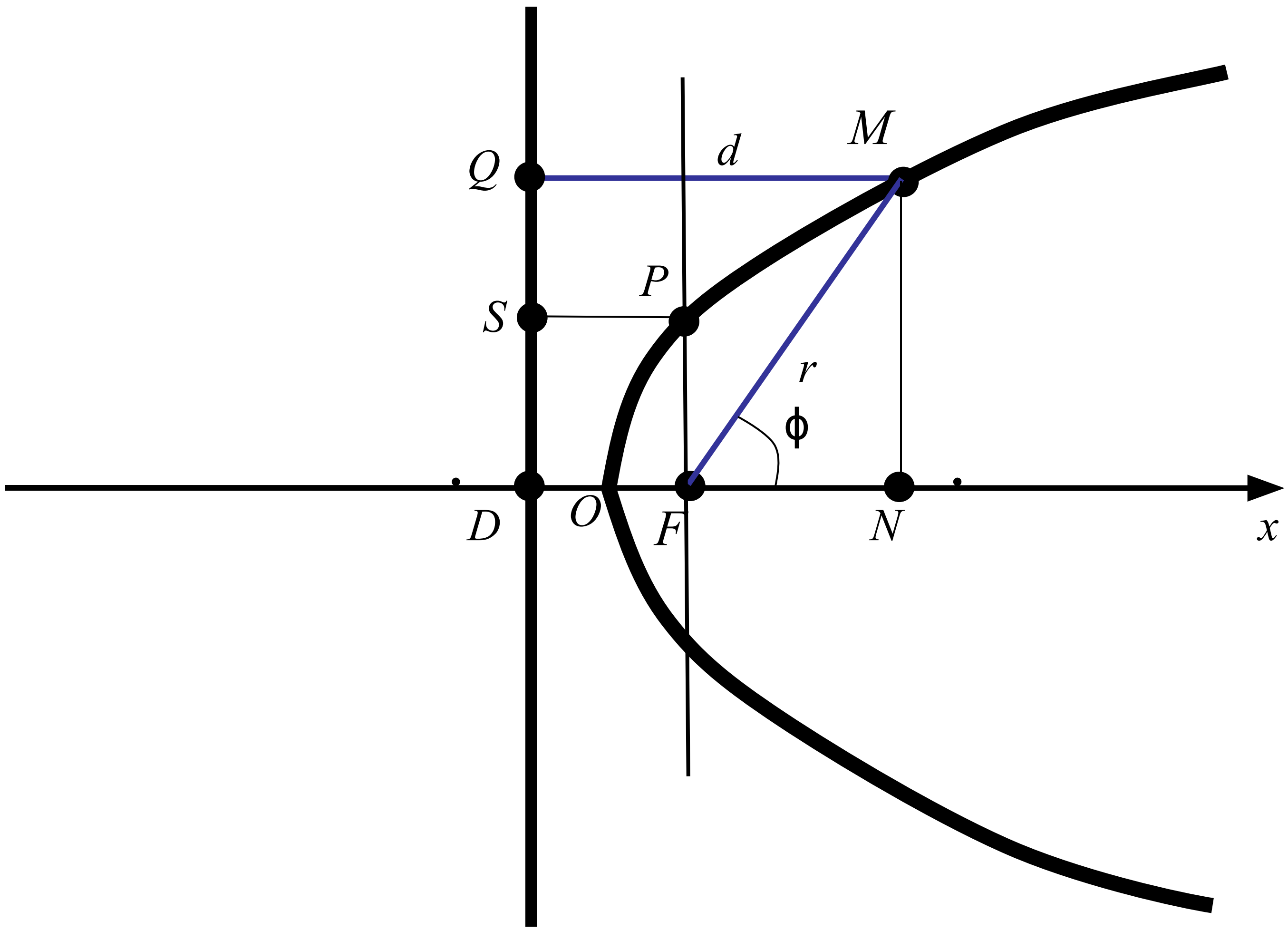
$$d = QM = DN = DF + FN = DF + r\cos\varphi$$



$$\frac{r}{d} = e$$

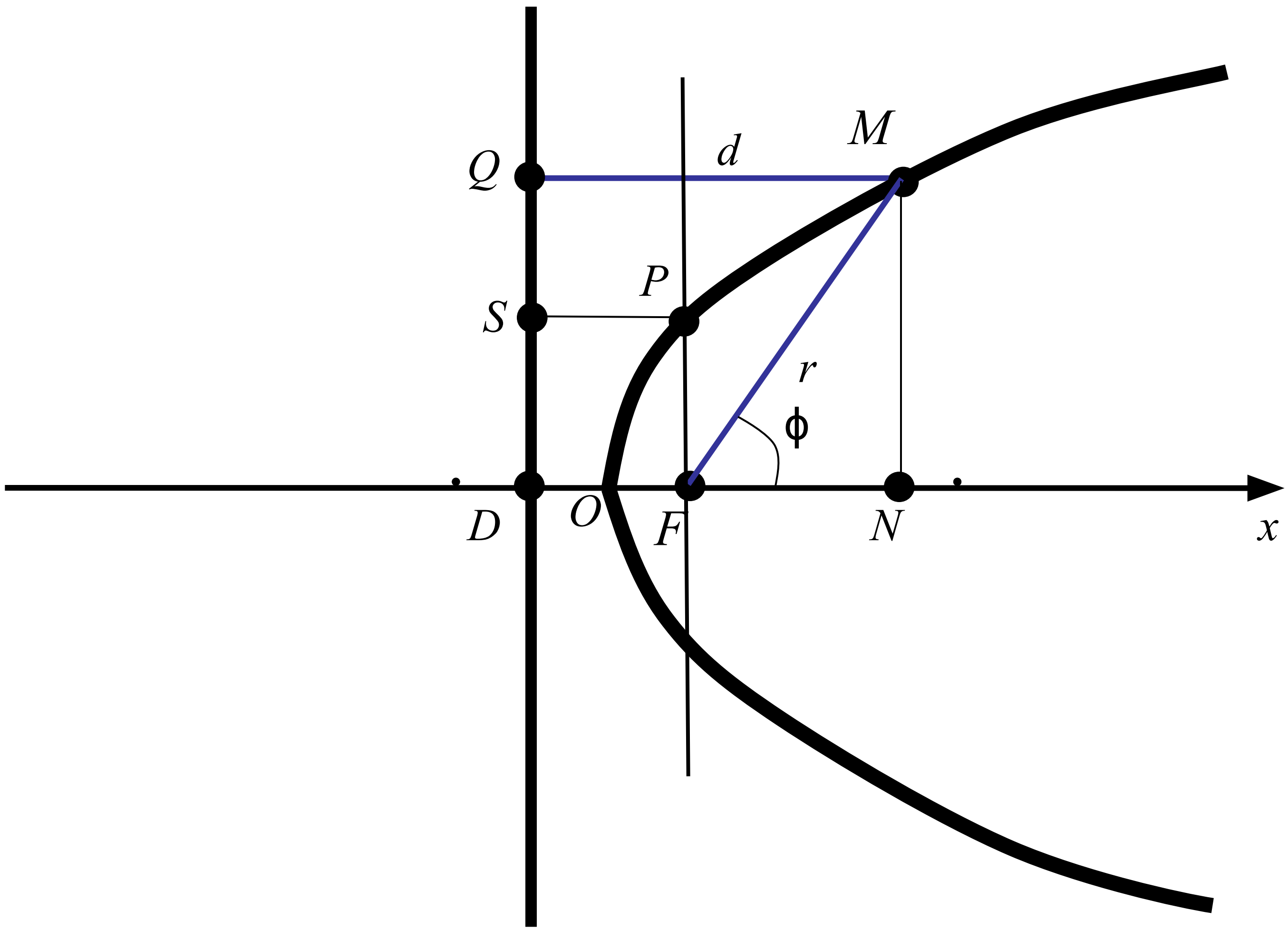


$$\frac{r}{d} = e$$



$$\frac{r}{d} = e$$

$$\frac{FP}{SP} = e$$



$$\frac{r}{d} = e$$

$$\frac{FP}{SP} = e$$

$$\Downarrow$$

$$SP = \frac{FP}{e}$$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $SP = \frac{p}{e}$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $$SP = \frac{p}{e}$$

$$d = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $$SP = \frac{p}{e}$$

$$d = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

подставим в $$\frac{r}{d} = e$$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $SP = \dfrac{p}{e}$

$$d = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

подставим в $\dfrac{r}{d} = e$

Выразим ***r:***

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $$SP = \frac{p}{e}$$

$$d = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

подставим в $$\frac{r}{d} = e$$

Выразим ***r:*** $$r = e\left(\frac{p}{e} + r\cos\varphi\right)$$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $$SP = \frac{p}{e}$$

$$d = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

подставим в

$$\frac{r}{d} = e$$

Выразим ***r*:**

$$r = e\left(\frac{p}{e} + r\cos\varphi\right)$$

$$r = p + er\cos\varphi$$

Половина длины фокальной хорды (т. е. хорды, проходящей через фокус перпендикулярно к фокальной оси) называется *фокальным параметром (p)*.

Тогда $$SP = \frac{p}{e}$$

$$d = \frac{p}{e} + r\cos\varphi$$

подставим в

$$\frac{r}{d} = e$$

Выразим ***r:***

$$r = e\left(\frac{p}{e} + r\cos\varphi\right)$$

$$r = p + er\cos\varphi$$

$$r(1 - e\cos\varphi) = p$$

Полярное уравнение линии

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi}$$