

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Содержание

5. Уравнение прямой в пространстве

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

7. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

8. Параллельность прямой плоскости

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и пер...

10. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости

11. Геометрический смысл неравенства первой степени с тр...

12. Расстояние от точки до плоскости

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми

15. Угол между прямой и плоскостью

5. Уравнение прямой в пространстве

5. Уравнение прямой в пространстве

В ДПСК уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $s = \{l; m; n\}$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (1)$$

5. Уравнение прямой в пространстве

В ДСК уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $s = \{l; m; n\}$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (1)$$

(канонические уравнения прямой)

5. Уравнение прямой в пространстве

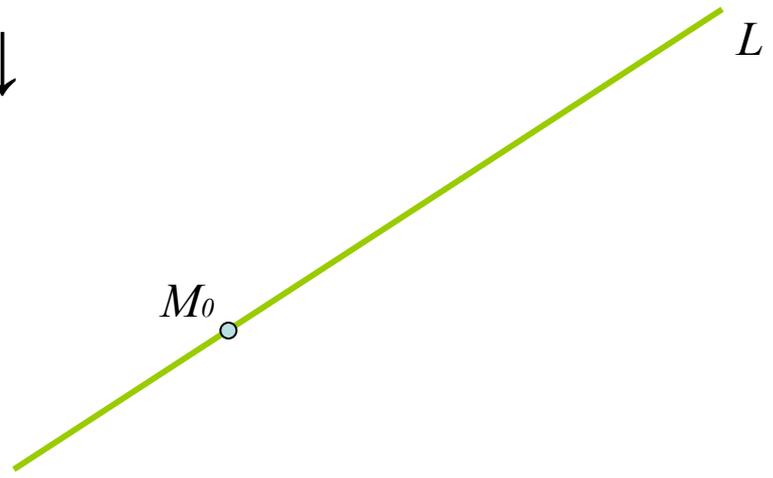
В ДСК уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $s = \{l; m; n\}$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (1)$$

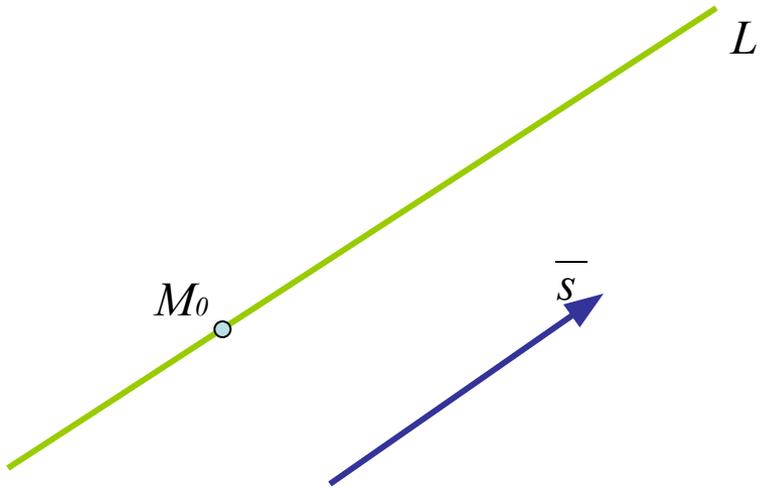
(канонические уравнения прямой)

В параметрической форме

$$(2) \quad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

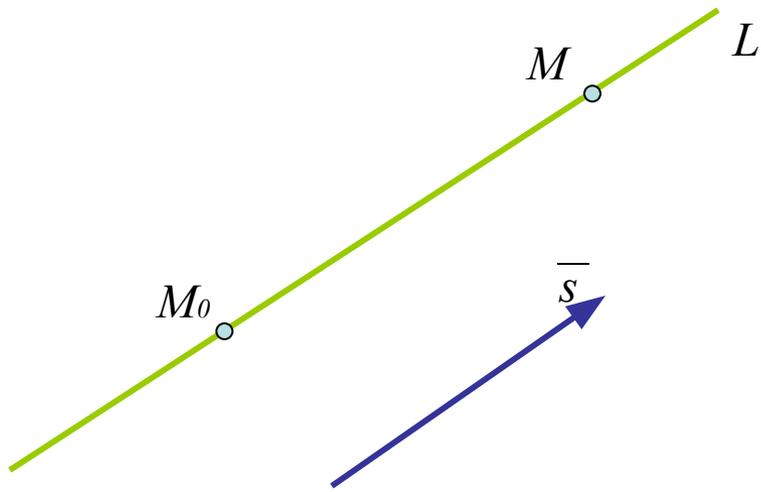


$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$



$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

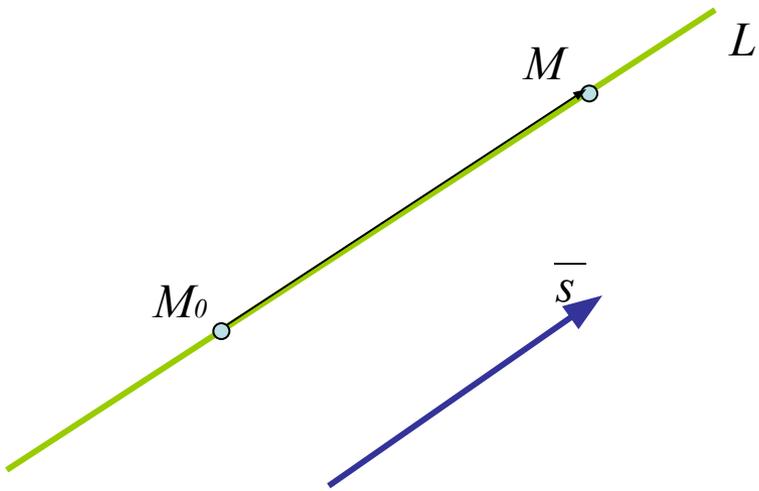
$$\vec{s} \neq \mathbf{0}, \quad \vec{s} \parallel L, \quad \vec{s} = \{l; m; n\}$$



$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

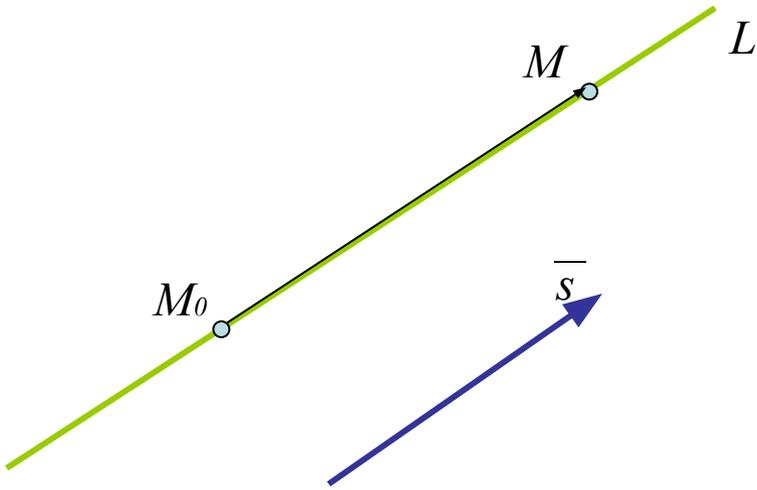
$$M(x; y; z) \in L$$



$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

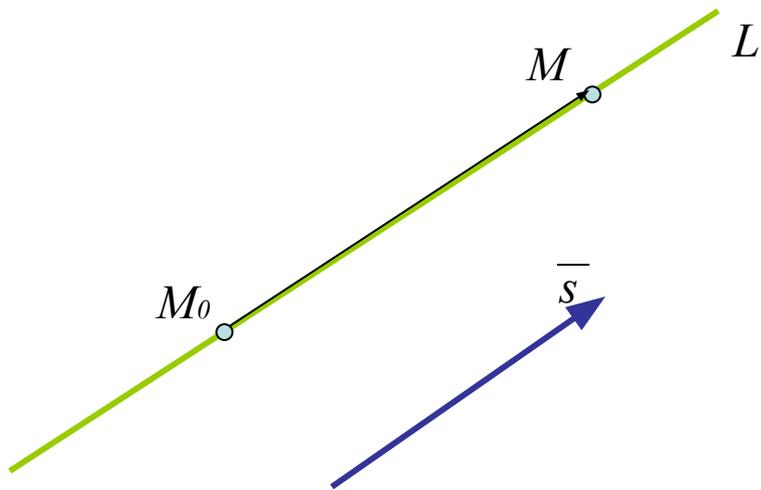


$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$



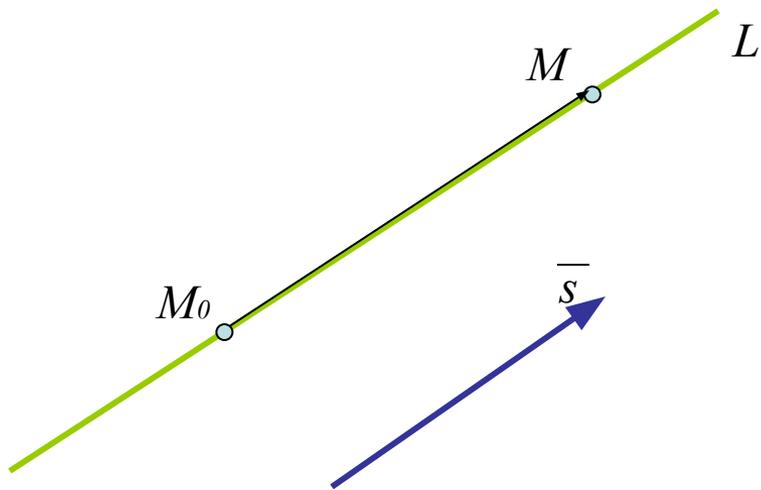
$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$



$$\bar{s} \neq 0,$$

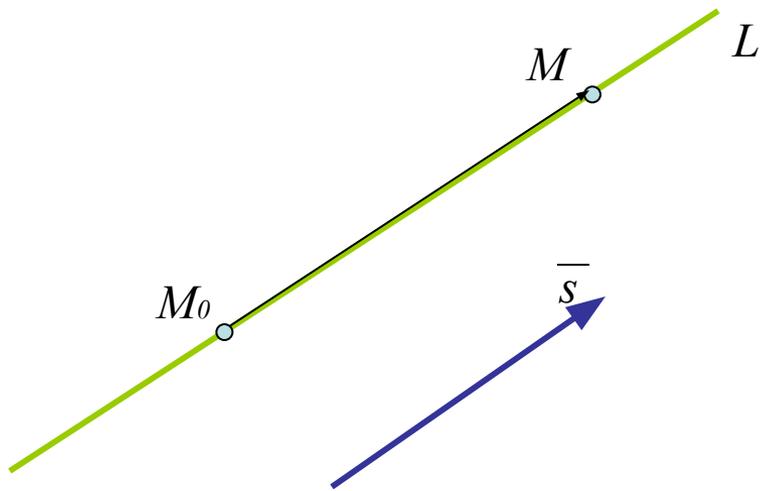
$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$



$$\bar{s} \neq 0, \quad \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

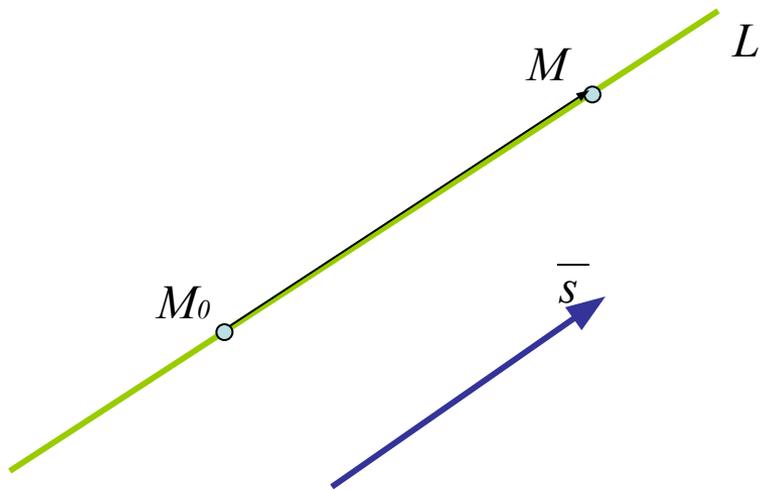
$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$



$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

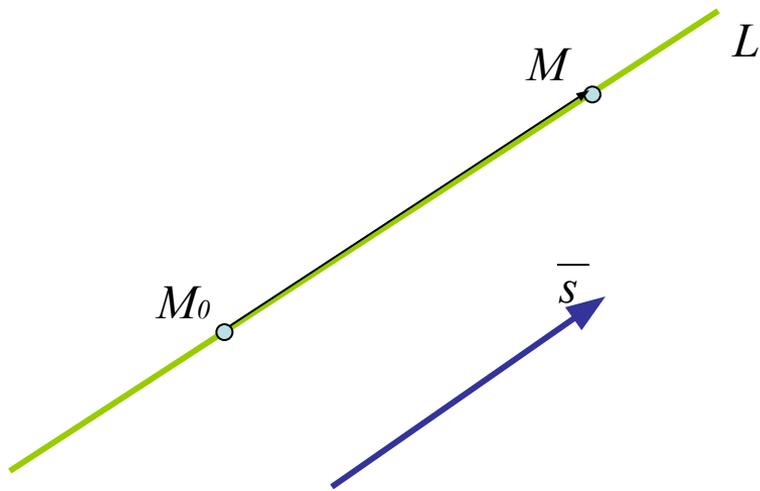
$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}: \quad \overline{M_0M} = t\bar{s}$$



$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

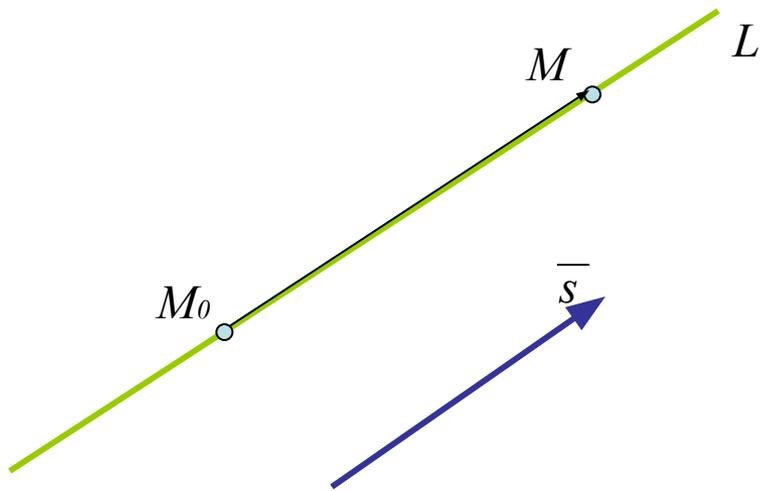
$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\exists t \in R: \quad \overline{M_0M} = t\bar{s}$$

$$\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} = t\{l; m; n\}$$



$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \bar{s} \parallel L, \quad \bar{s} = \{l; m; n\}$$

$$M(x; y; z) \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\bar{s} \neq 0, \quad \overline{M_0M} \parallel \bar{s}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}: \quad \overline{M_0M} = t\bar{s}$$

$$\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} = t\{l; m; n\}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$



6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

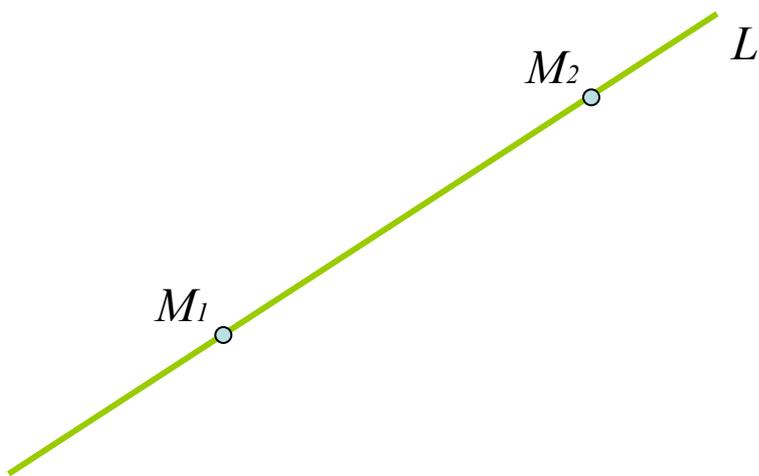
6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

M_2 ○

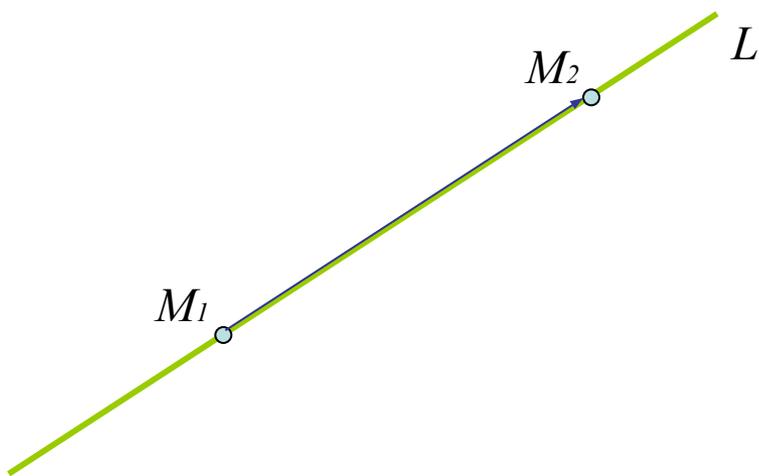
M_1 ○

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки



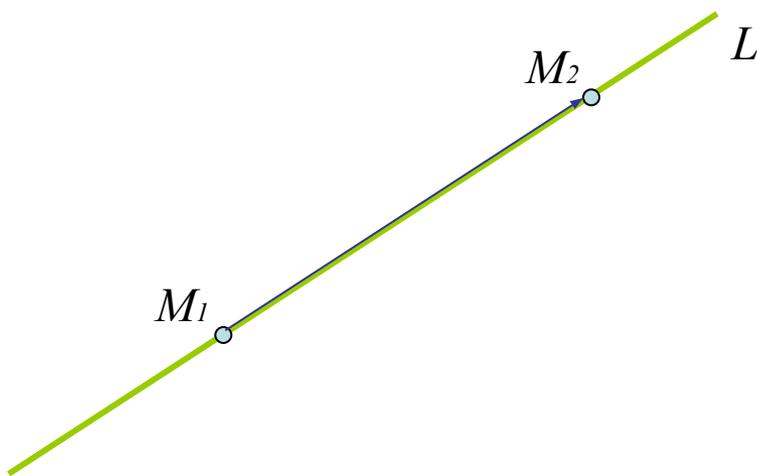
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки



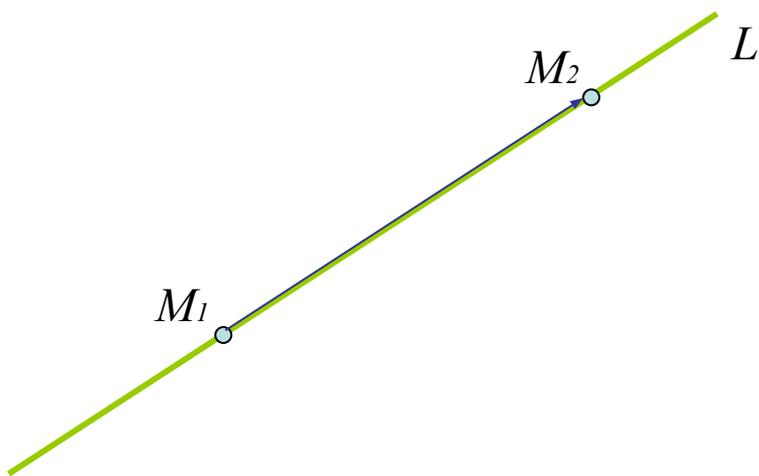
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки



$$\frac{M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)}{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

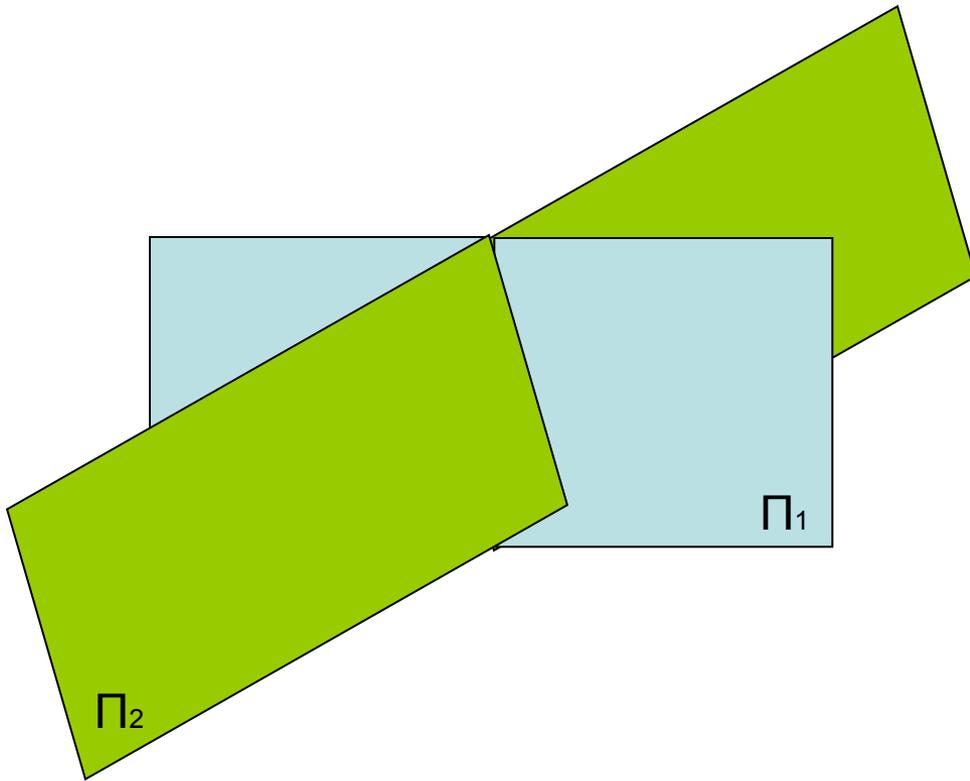


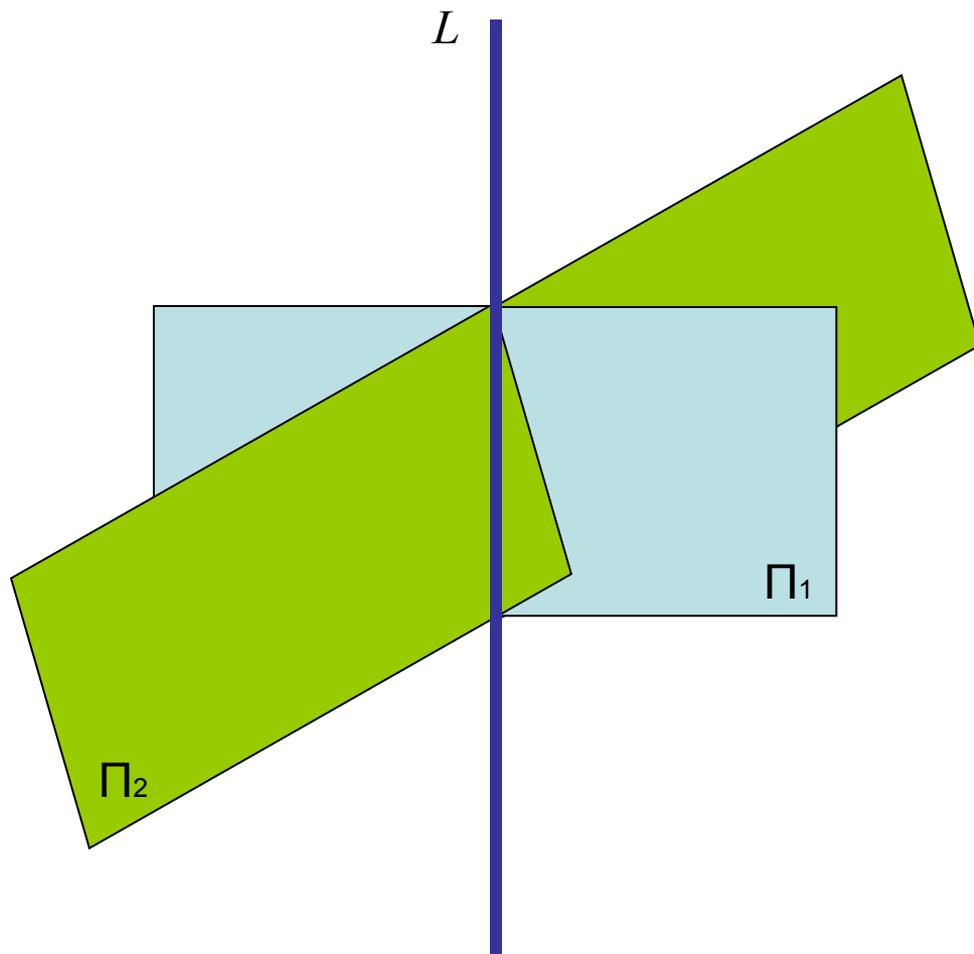
$$\begin{array}{l} M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2) \\ \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \end{array}$$

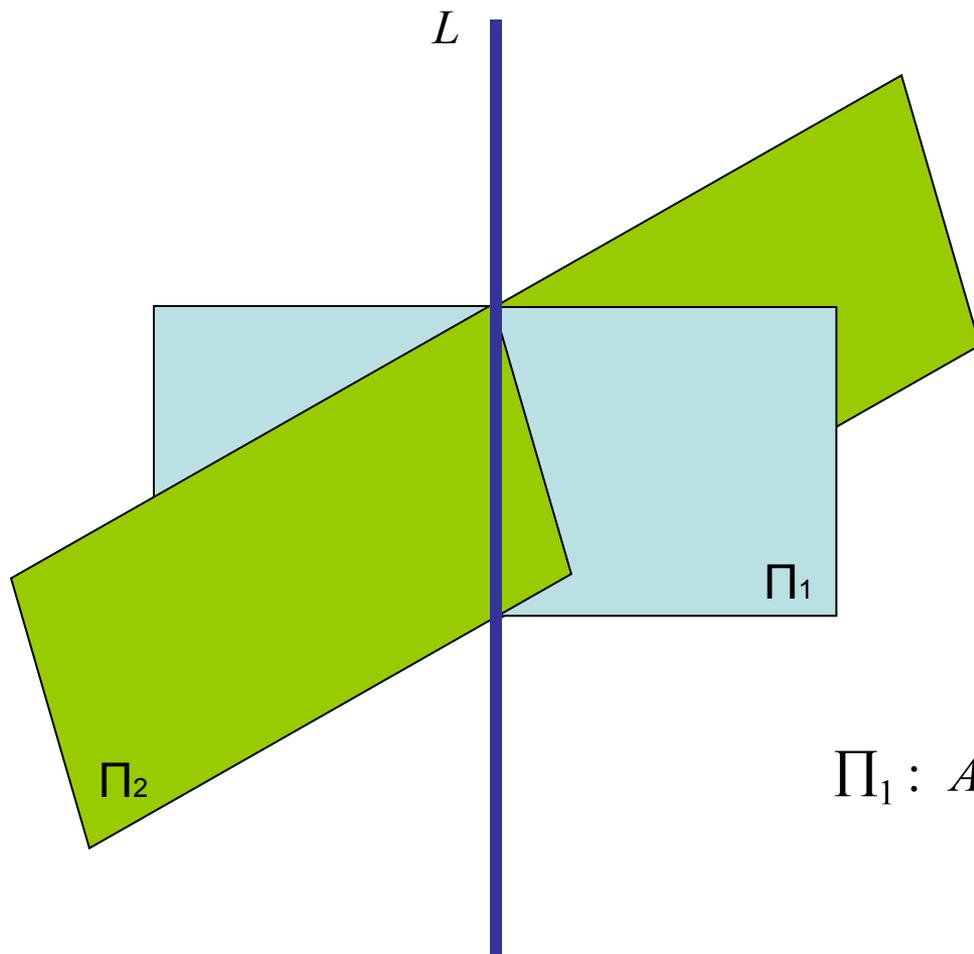
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

7. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

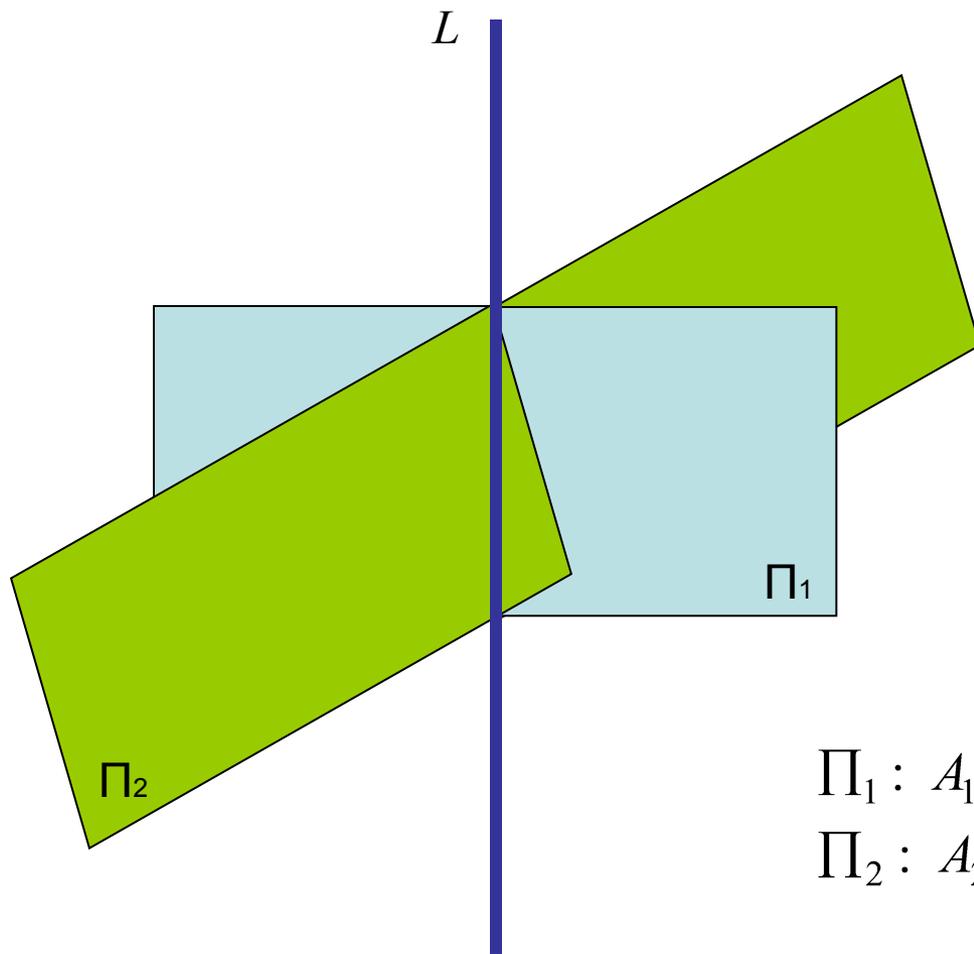






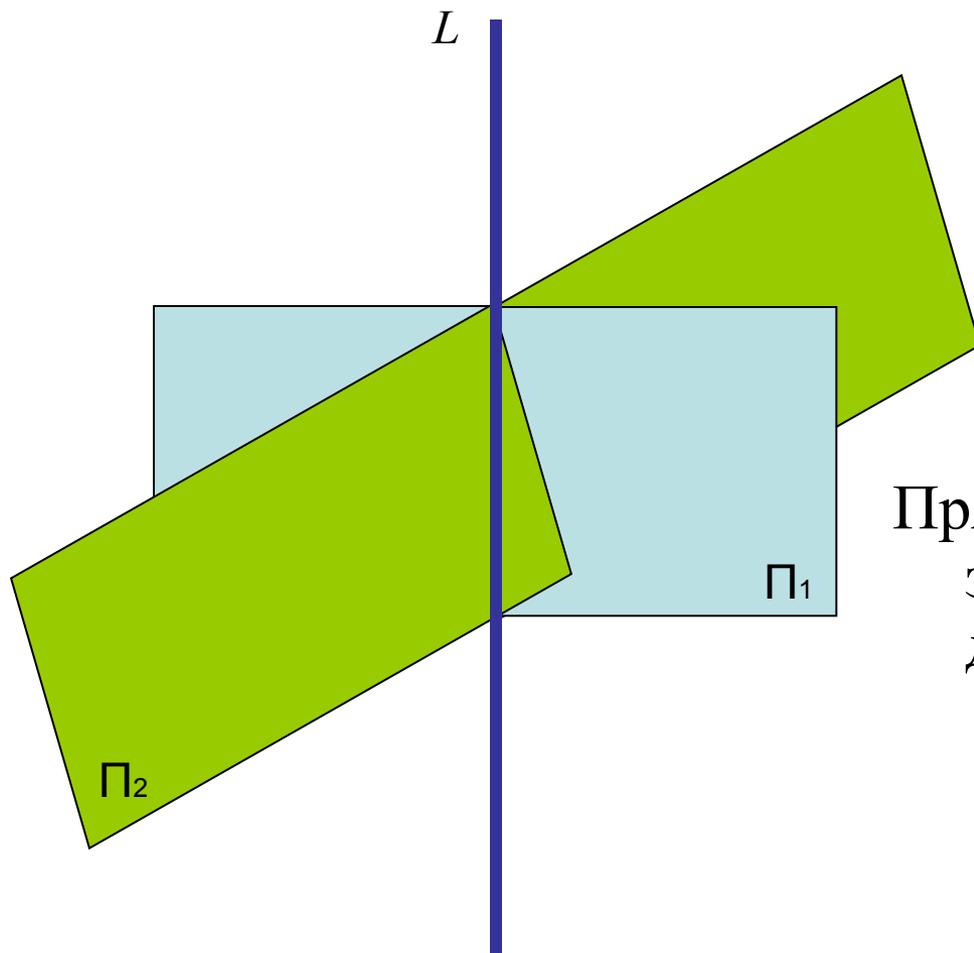


$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

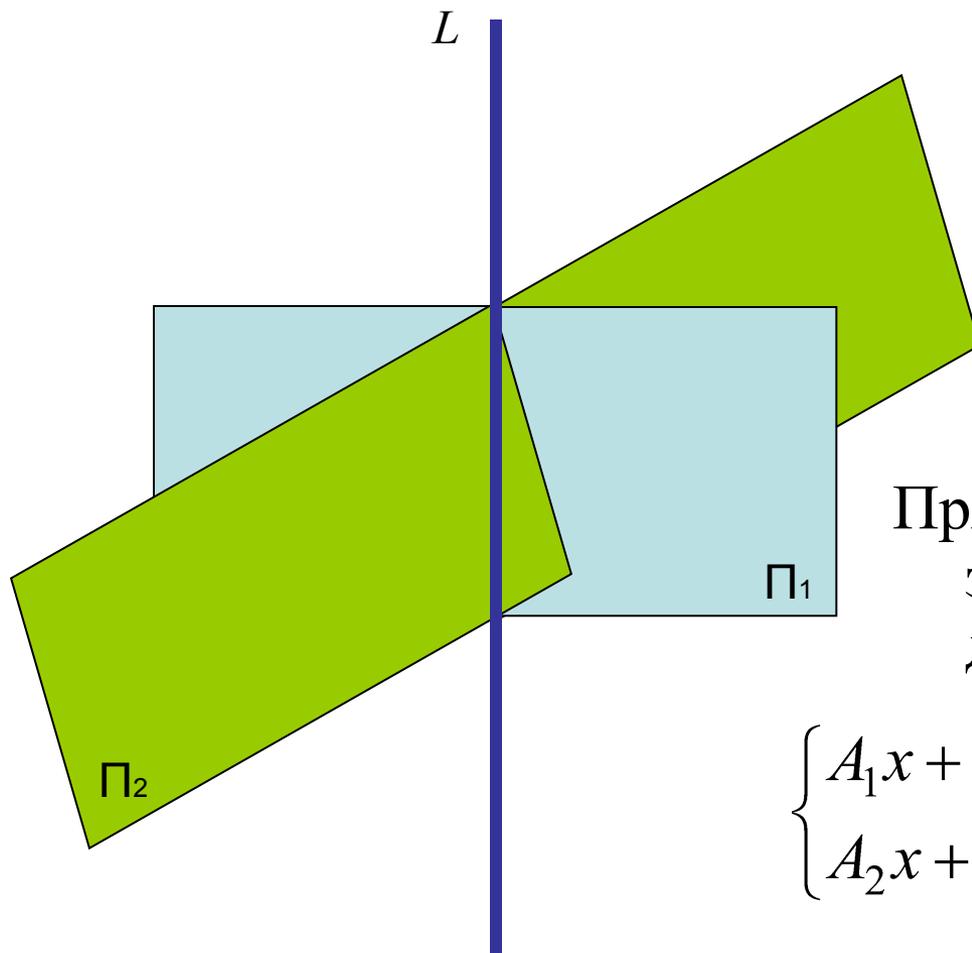


$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

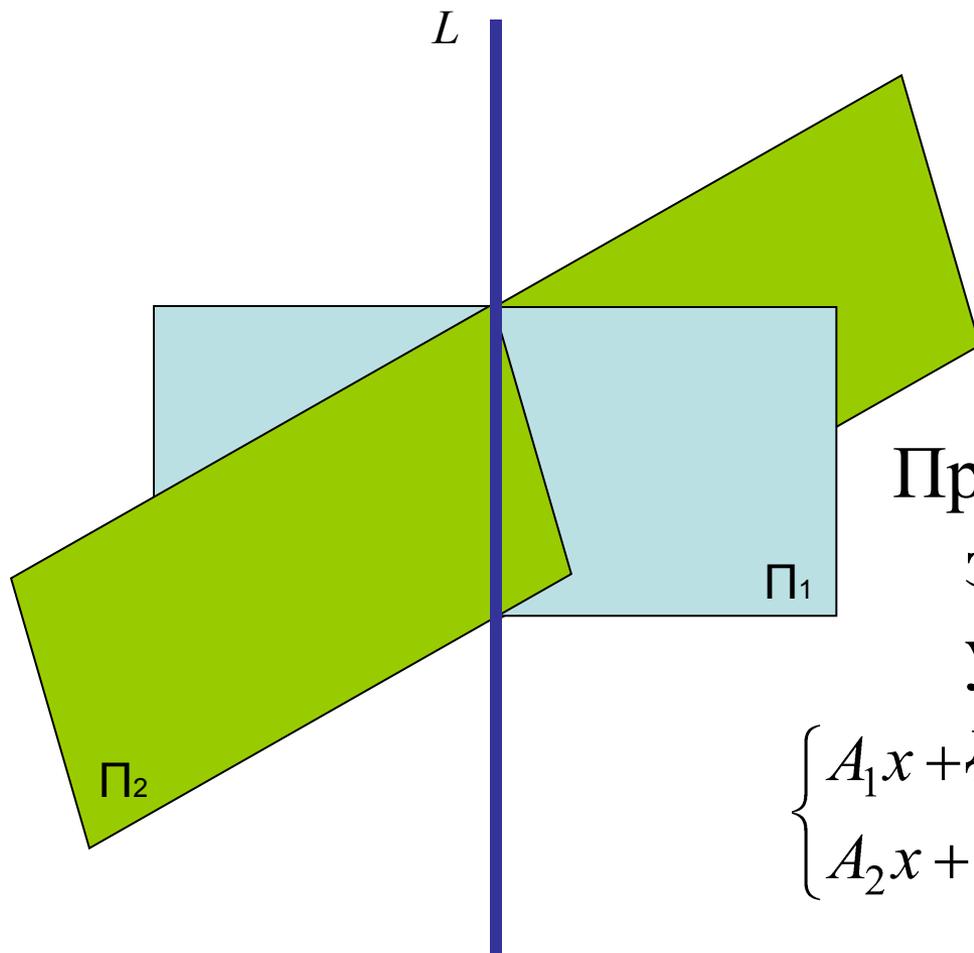


Прямую L можно
задать уравнениями
двух плоскостей



Прямую L можно
задать уравнениями
двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



Прямую L можно
задать
уравнениями

двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

*(общее уравнение
прямой)*

Приведение к каноническому виду

Приведение к каноническому виду

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Приведение к каноническому виду

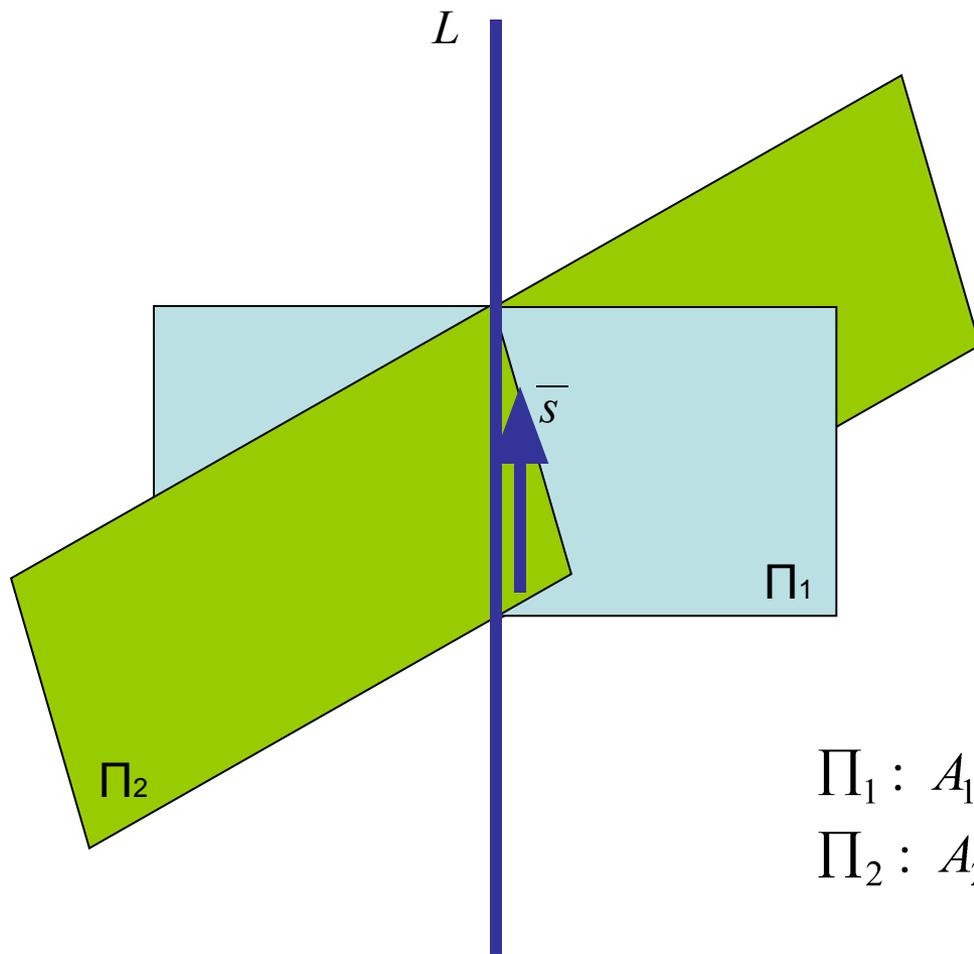
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы $(x_0; y_0; z_0)$

Приведение к каноническому виду

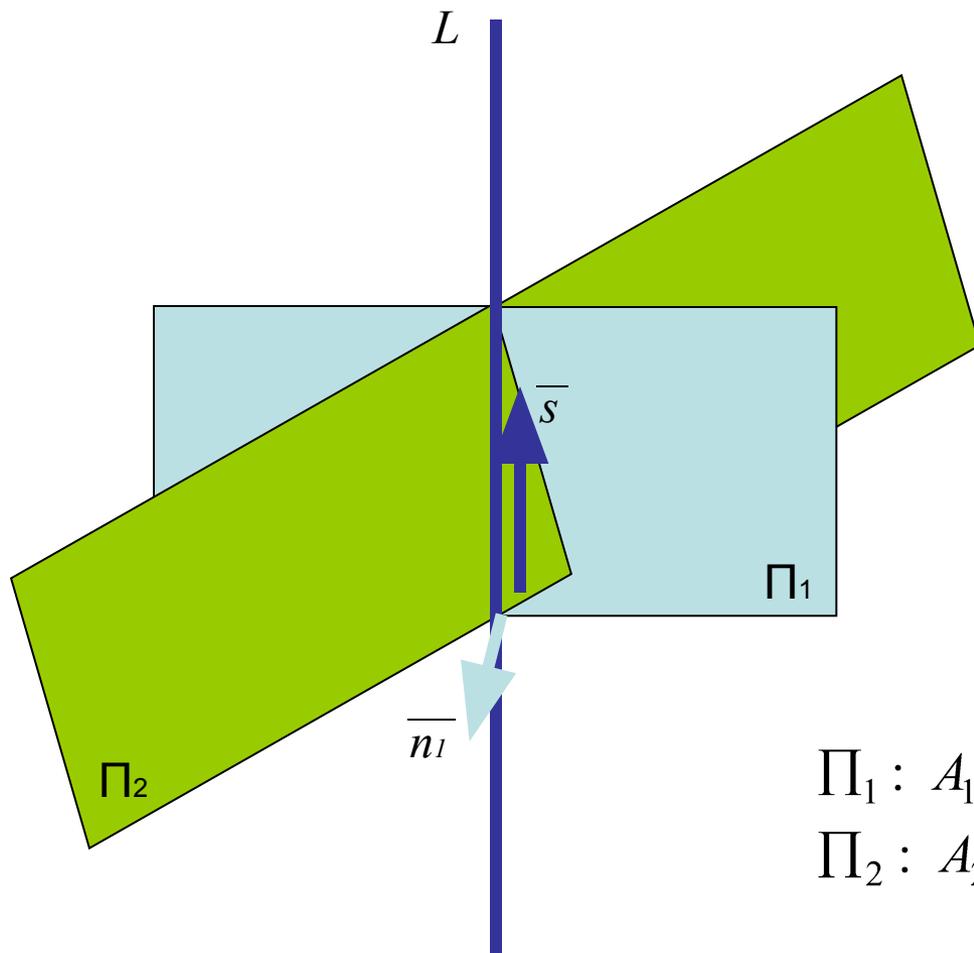
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы $(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow M(x_0; y_0; z_0) \in L$



$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

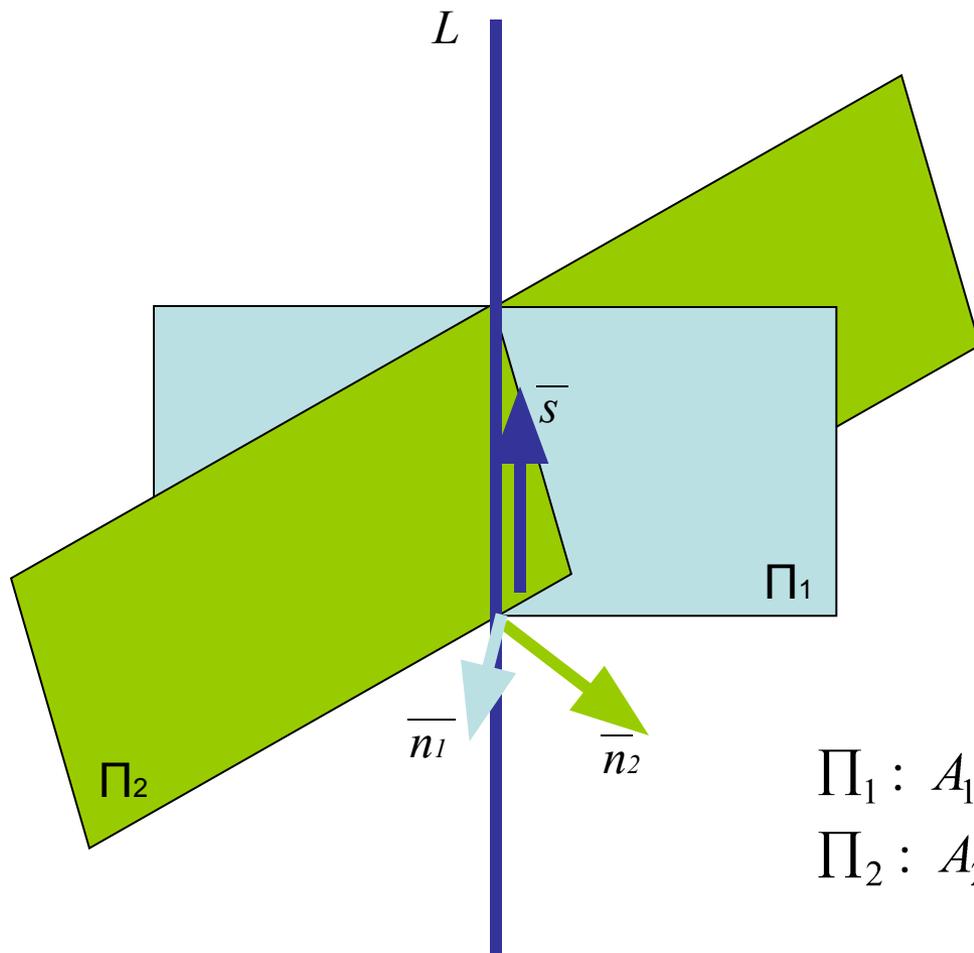
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

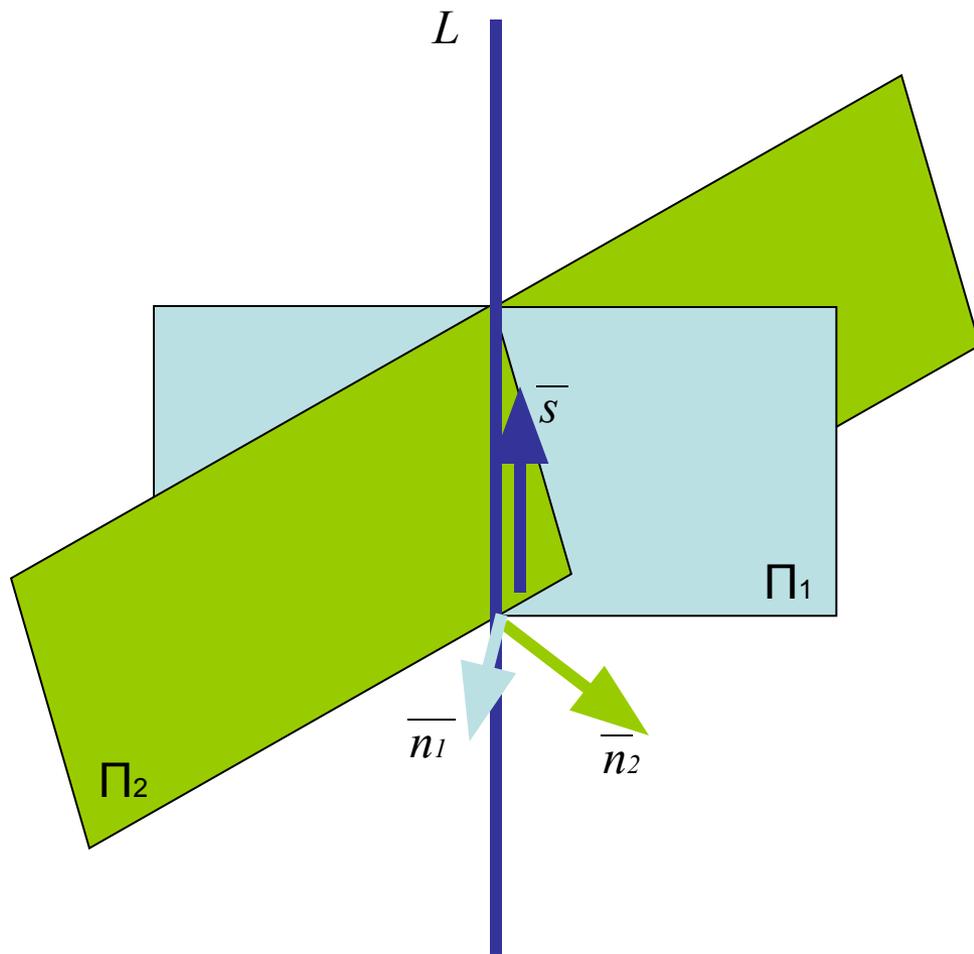


$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

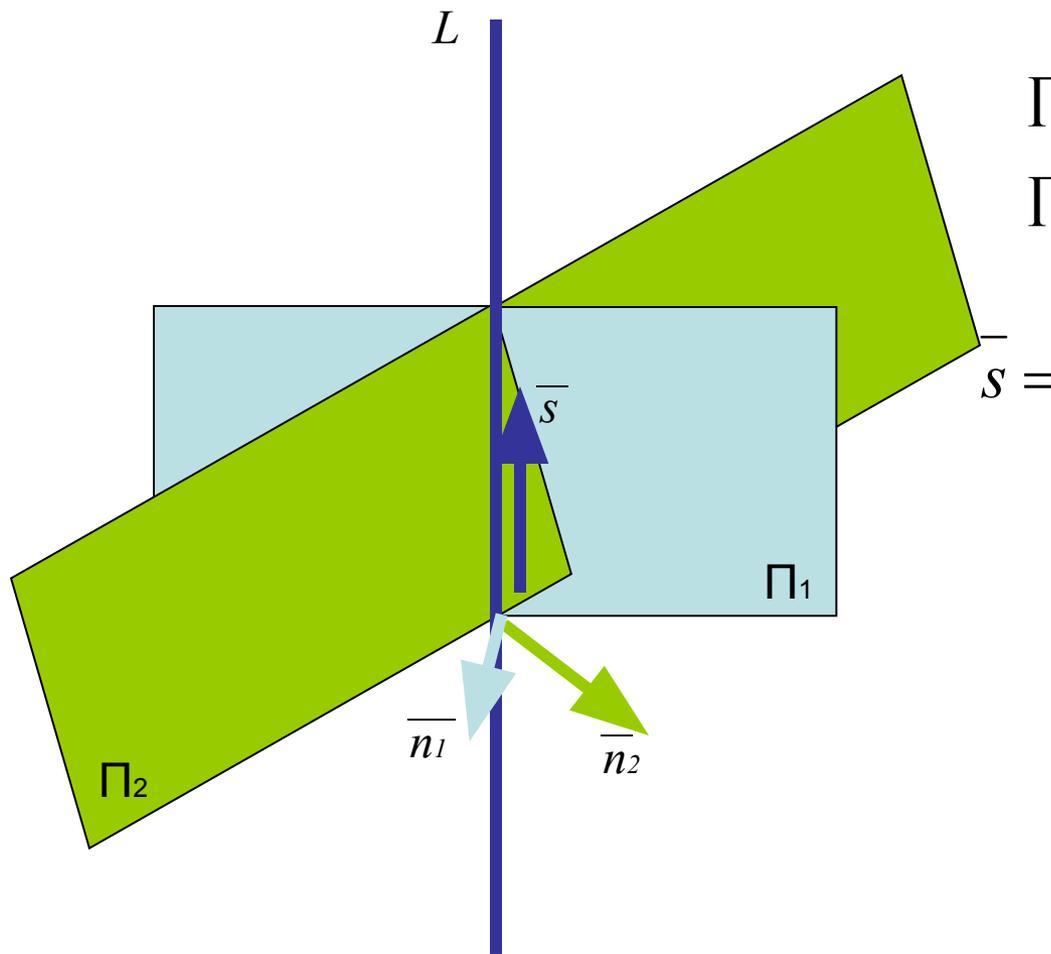
$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$



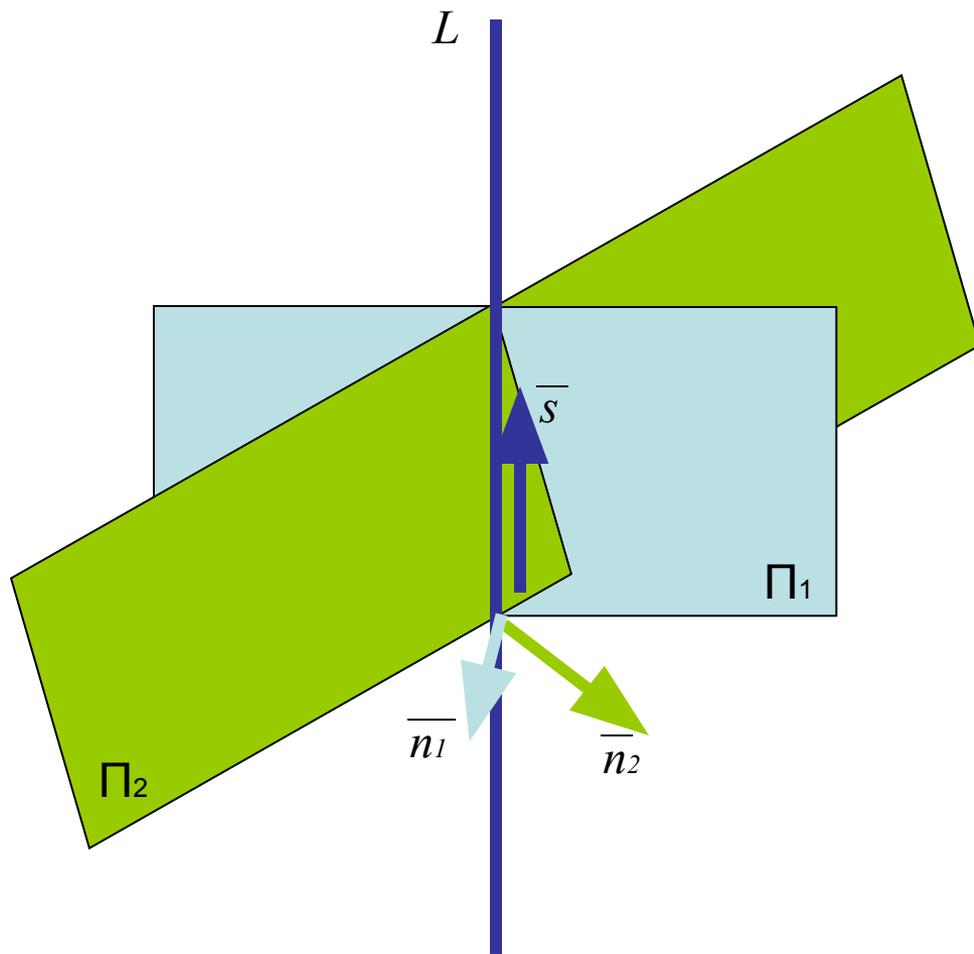
$$\Pi_1 : \vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$



$$\Pi_1 : \vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

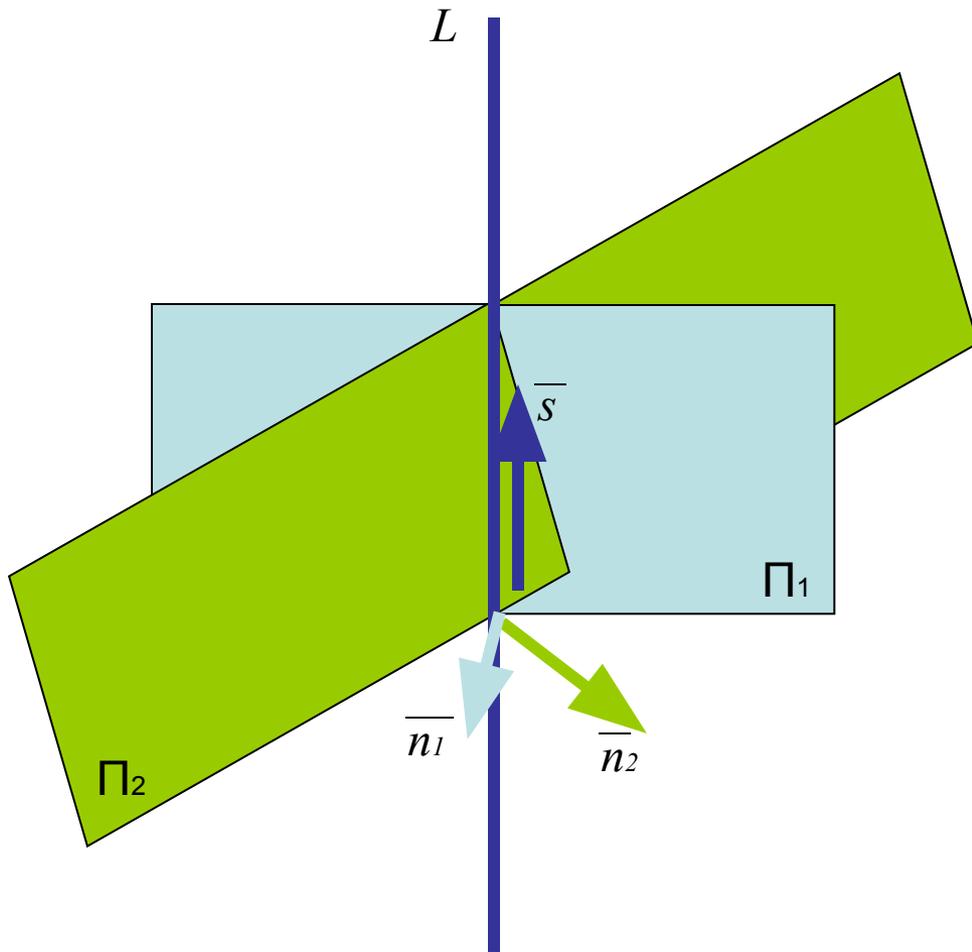
$$\Pi_2 : \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$



$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\bar{s} = [\bar{n}_1; \bar{n}_2]$$

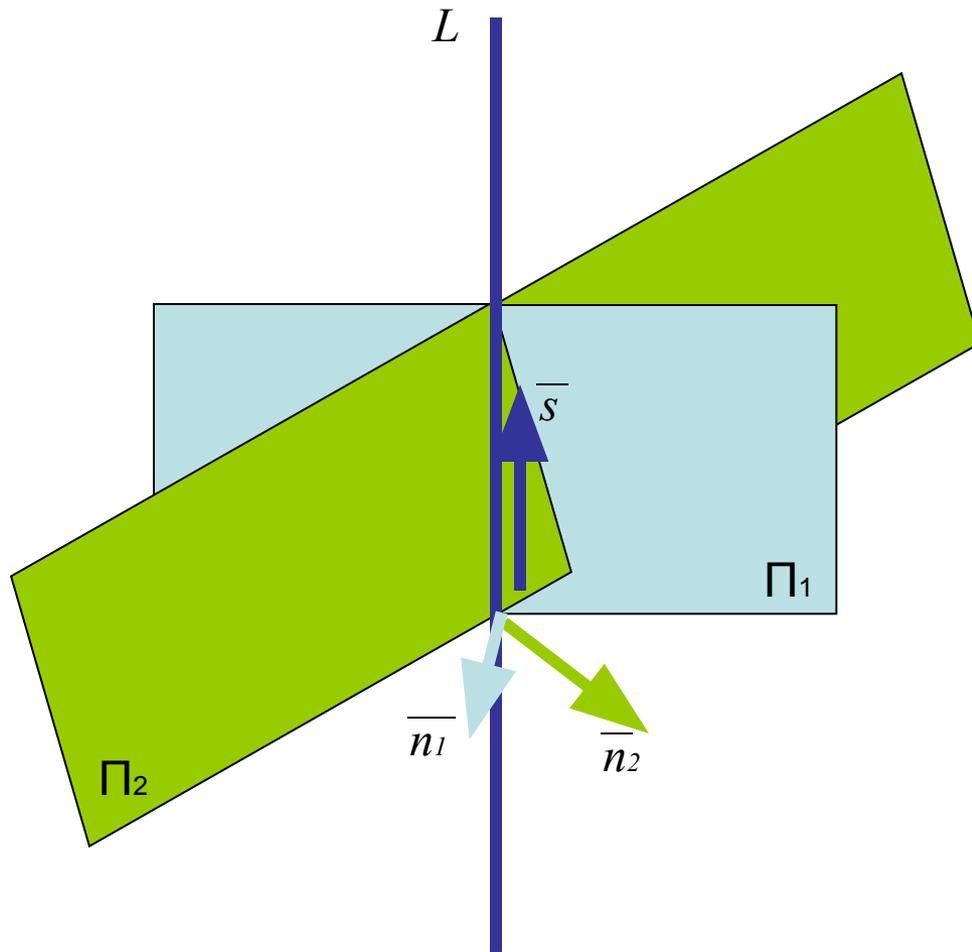


$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\bar{s} = [\bar{n}_1; \bar{n}_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \bar{n}_1 & \bar{n}_2 & \end{vmatrix}$$

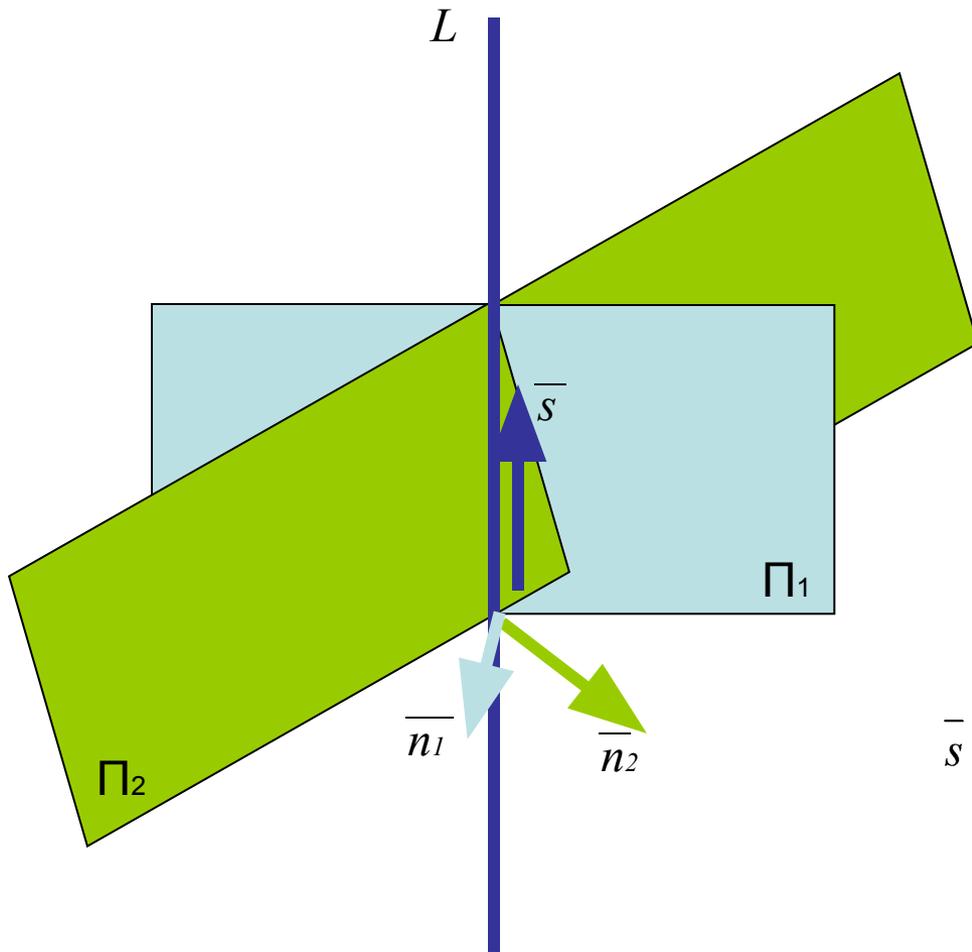


$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\bar{s} = [\bar{n}_1; \bar{n}_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$



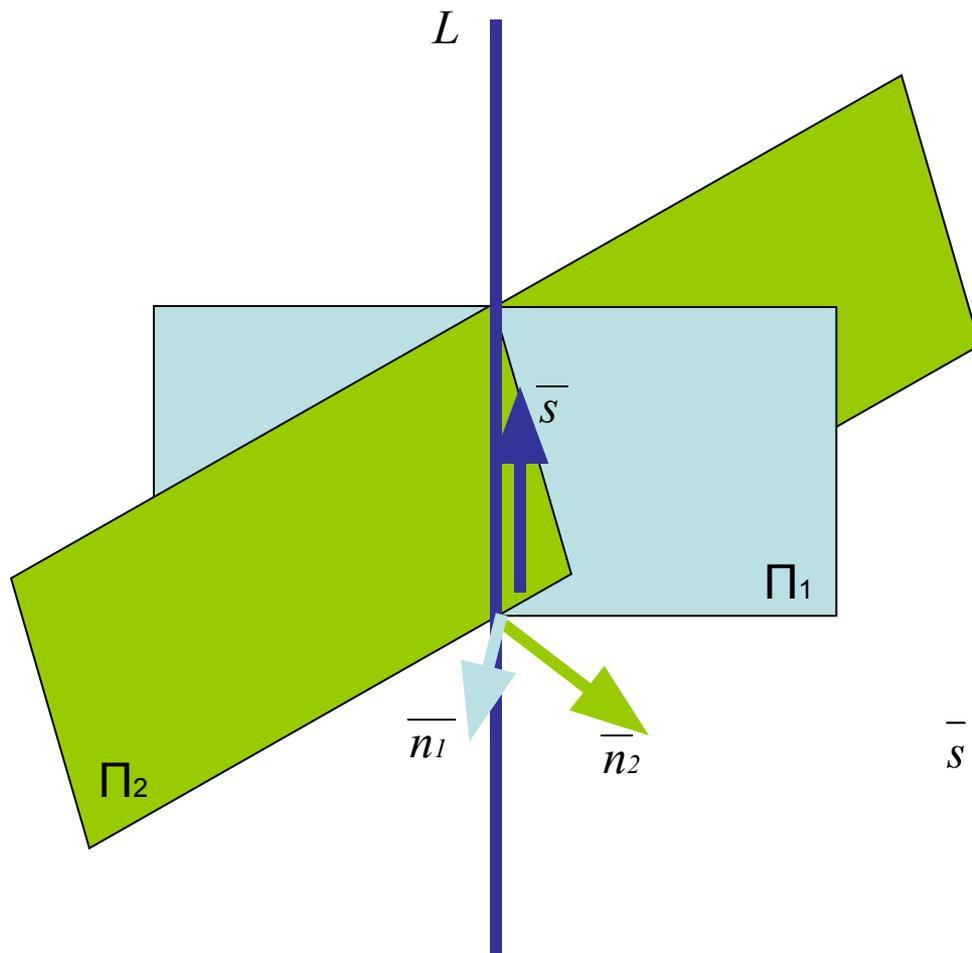
$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\bar{s} = [\bar{n}_1; \bar{n}_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$



$$\Pi_1 : \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$\Pi_2 : \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\bar{s} = [\bar{n}_1; \bar{n}_2] =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Проверим компланарность вектора \bar{s}
каждой плоскости

Применим необходимое и достаточное условие
компланарности вектора $\bar{s}=\{l;m;n\}$ и плоскости
 $Ax+By+Cz+D=0$

Применим необходимое и достаточное условие
компланарности вектора $\bar{s}=\{l;m;n\}$ и плоскости
 $Ax+By+Cz+D=0$

$$Al+Bm+Cn=0$$

Применим необходимое и достаточное условие
компланарности вектора $\bar{s}=\{l;m;n\}$ и плоскости
 $Ax+By+Cz+D=0$

$$Al+Bm+Cn=0$$

$$\bar{s} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & C_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 & C_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & B_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 & B_2 \end{array} \right) \right\} \quad \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

Применим необходимое и достаточное условие
 компланарности вектора $\bar{s} = \{l; m; n\}$ и плоскости
 $Ax + By + Cz + D = 0$

$$Al + Bm + Cn = 0$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} l & m & n \\ \hline \left(\begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

Применим необходимое и достаточное условие
 компланарности вектора $\bar{s} = \{l; m; n\}$ и плоскости
 $Ax + By + Cz + D = 0$

$$Al + Bm + Cn = 0$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$A_1 \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Применим необходимое и достаточное условие
 компланарности вектора $\bar{s}=\{l;m;n\}$ и плоскости
 $Ax+By+Cz+D=0$

$$Al+Bm+Cn=0$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \left| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right. \right\} \quad \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$A_1 \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Применим необходимое и достаточное условие
 компланарности вектора $\bar{s}=\{l;m;n\}$ и плоскости
 $Ax+By+Cz+D=0$

$$Al+Bm+Cn=0$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad \bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

$$A_1 \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Применим необходимое и достаточное условие
 компланарности вектора $\bar{s} = \{l; m; n\}$ и плоскости
 $Ax + By + Cz + D = 0$

$$Al + Bm + Cn = 0$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{array}{c|c|c} l & m & n \\ \hline \left(\begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

Применим необходимое и достаточное условие
 компланарности вектора $\bar{s}=\{l;m;n\}$ и плоскости
 $Ax+By+Cz+D=0$

$$Al+Bm+Cn=0$$

$$\bar{s} = \left\{ \begin{array}{c} l \quad m \quad n \\ \left| \begin{array}{cc} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{array} \right| \end{array} \right\} \quad \bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$A_2 \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_2 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_2 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Прямая как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

имеет канонические уравнения

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

где $M(x_0; y_0; z_0) \in L$

8. Параллельность прямой плоскости

$$\boxed{L} \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\text{I} \quad L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\text{II} : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

$$\lceil L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\lceil : Ax+By+Cz+D=0 \quad (2)$$

Прямая и плоскость параллельны \Leftrightarrow

$$\lceil L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\sqcap : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

Прямая и плоскость параллельны \Leftrightarrow

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

$$\lceil L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\sqcap : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

Прямая и плоскость параллельны \Leftrightarrow

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

$\downarrow L$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$$\downarrow L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

Прямая и плоскость параллельны \Leftrightarrow

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

$$\downarrow L \quad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{ПОДСТАВИМ В (2)}$$

$$\uparrow L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

Прямая и плоскость параллельны \Leftrightarrow

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

$$\downarrow L \quad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{ПОДСТАВИМ В (2)}$$

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0$$

$$\uparrow L \quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (1)$$

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

Прямая и плоскость параллельны \Leftrightarrow

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

$$\downarrow L \quad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \text{ПОДСТАВИМ В (2)}$$

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0$$

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$(Al+Bm+Cn)t+ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$\Rightarrow \forall t$

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$\Rightarrow \forall t$, т.е. прямая **лежит на плоскости**

$$(Al+Bm+Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$\Rightarrow \forall t$, т.е. прямая **лежит на плоскости**

3) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$

$$(Al+Bm+Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$\Rightarrow \forall t$, т.е. прямая **лежит на плоскости**

3) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$

$\Rightarrow \nexists t$,

$$(Al+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну общую точку, т.е.
пересекаются

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$\Rightarrow \forall t$, т.е. прямая **лежит на плоскости**

3) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$

$\Rightarrow \nexists t$, т.е. на данной прямой нет ни одной точки,
лежащей на данной плоскости



$$(Al+Bm+Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

1) Если $Al+Bm+Cn \neq 0$, то

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$$

\Rightarrow прямая и плоскость имеют одну **общую точку**, т.е. **пересекаются**

2) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

$\Rightarrow \forall t$, т.е. прямая **лежит на плоскости**

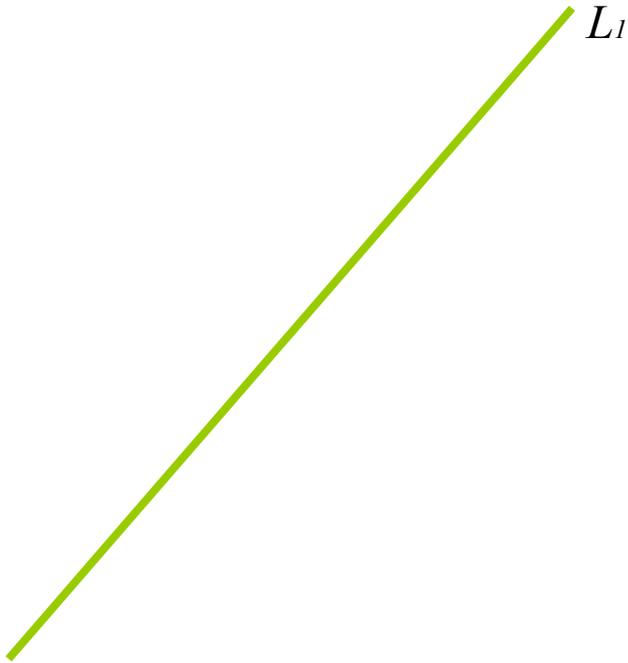
3) Если $Al+Bm+Cn = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$

$\Rightarrow \nexists t$, т.е. на данной прямой нет ни одной точки, лежащей на данной плоскости, **прямая параллельна плоскости**

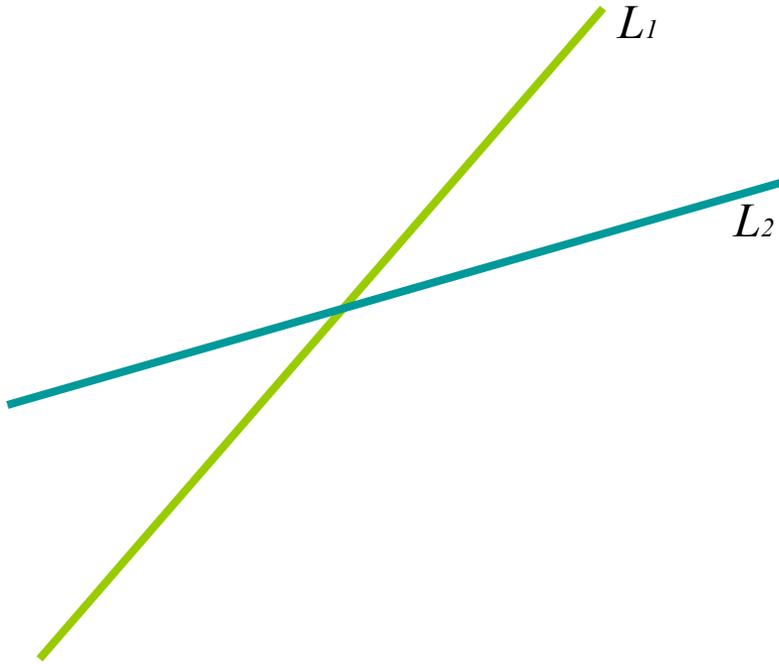


9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

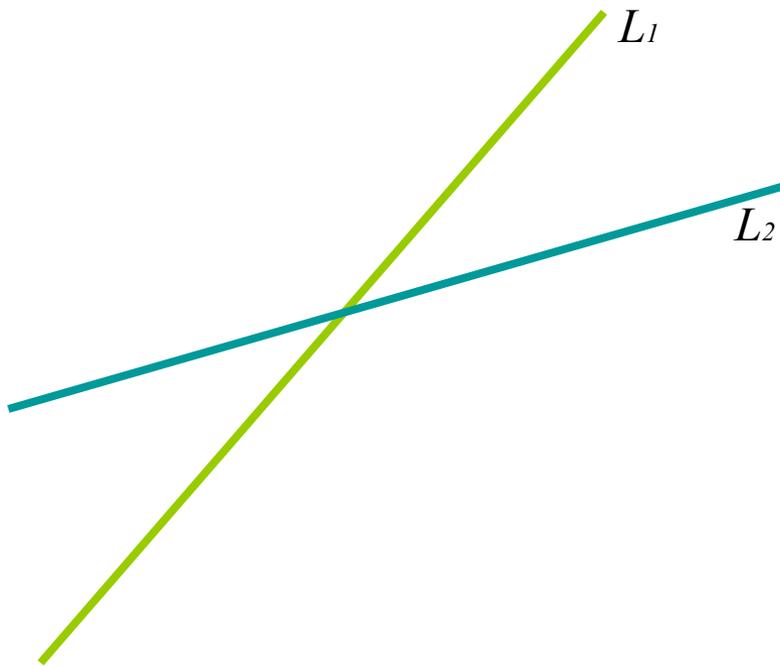
9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

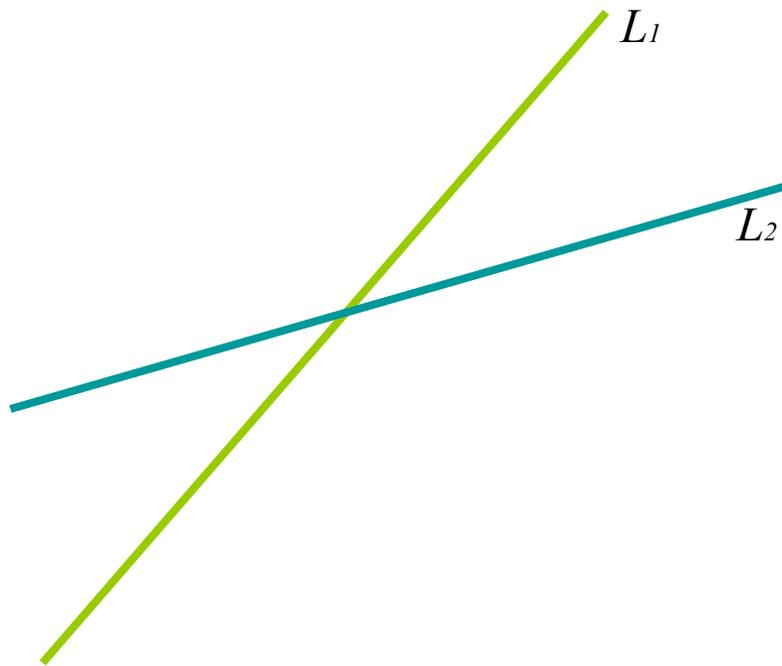


9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

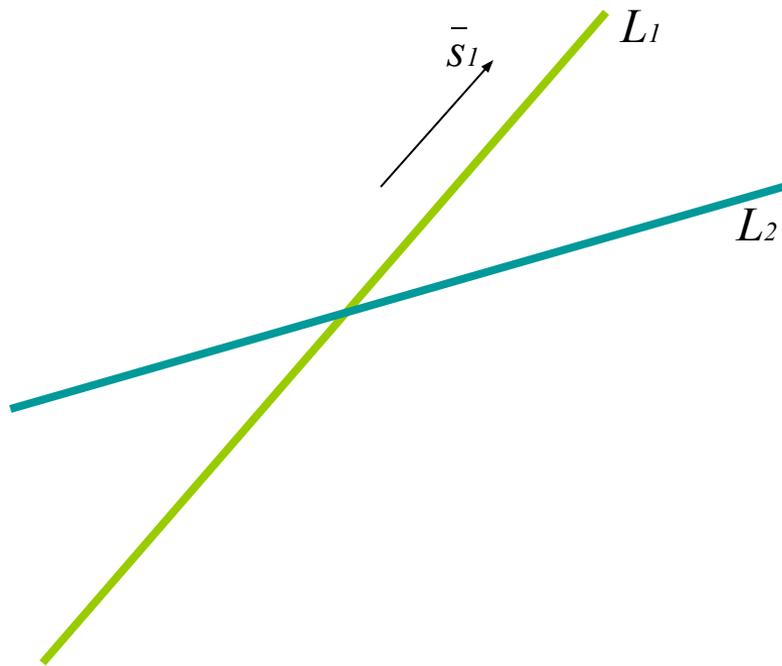
9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

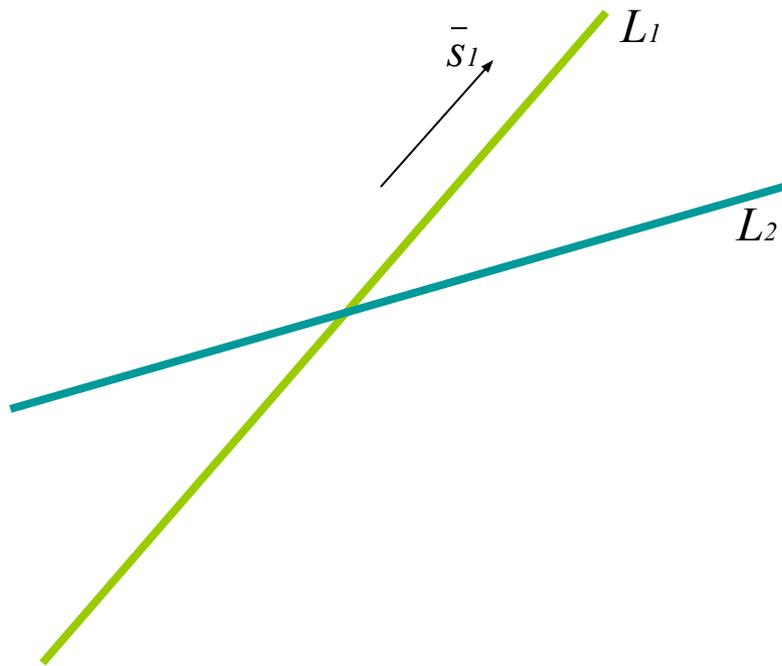
9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

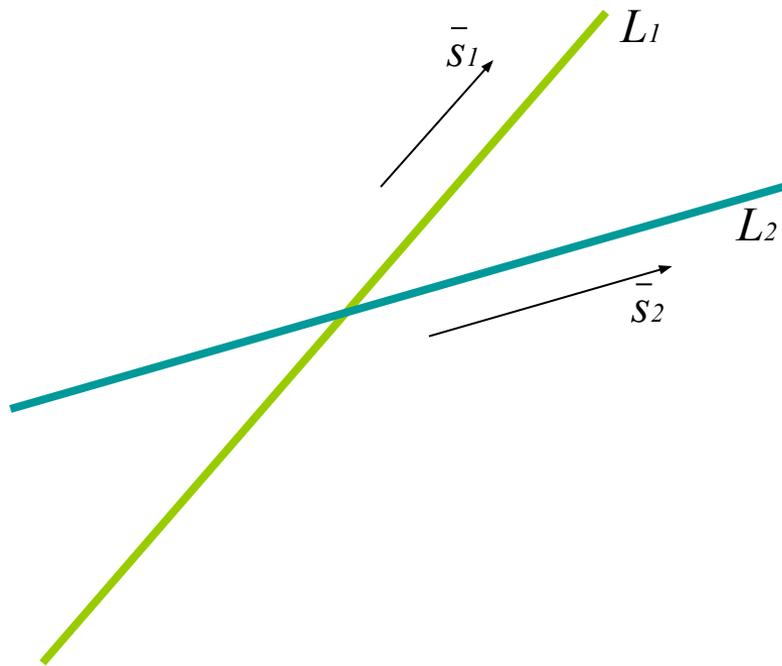


$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

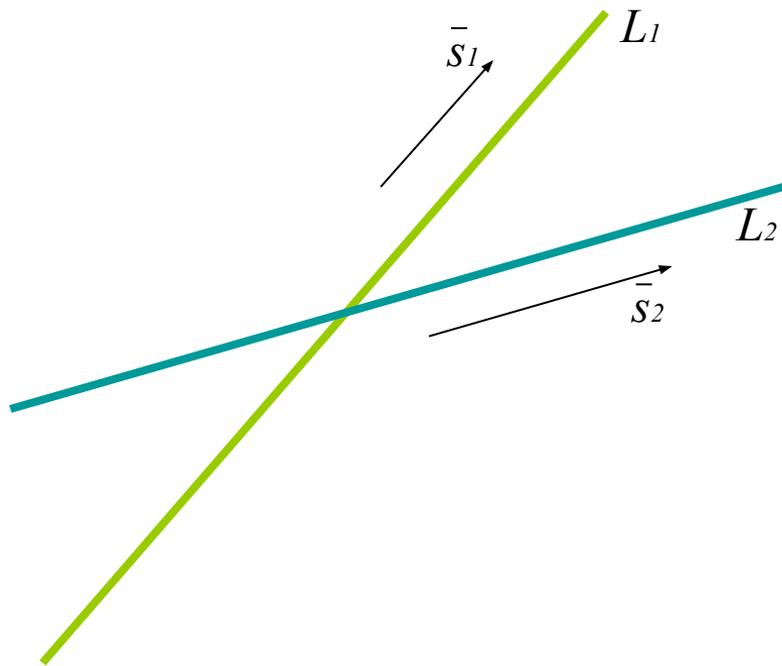


$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



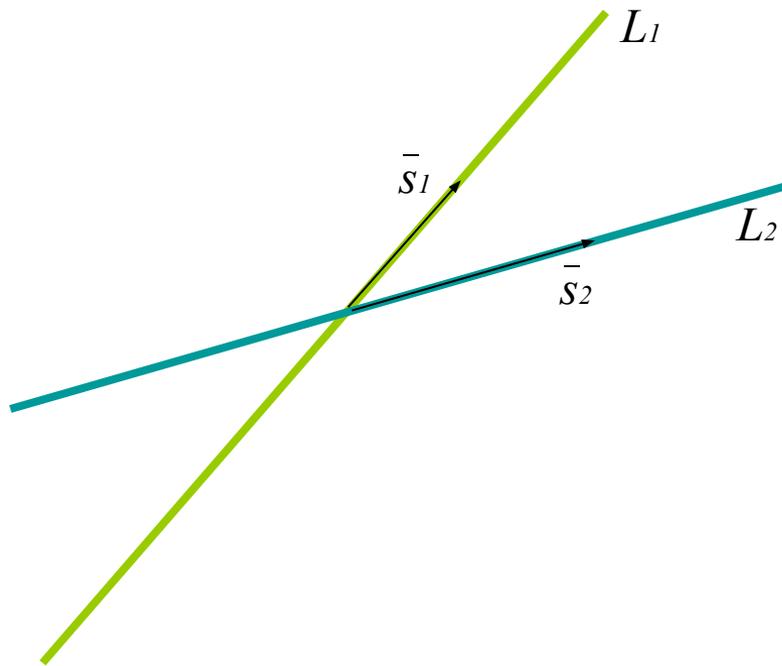
$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



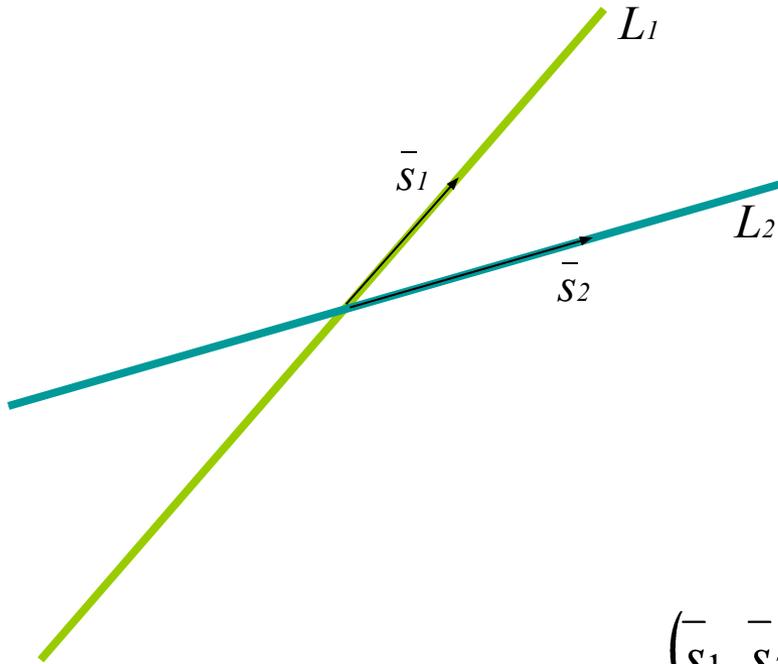
$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

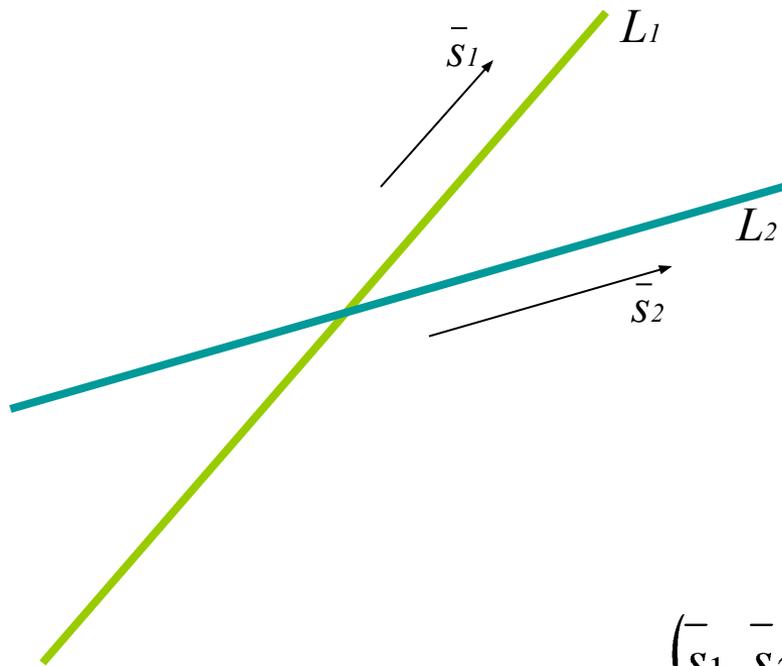
$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\bar{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\bar{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{(\bar{s}_1, \bar{s}_2)}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

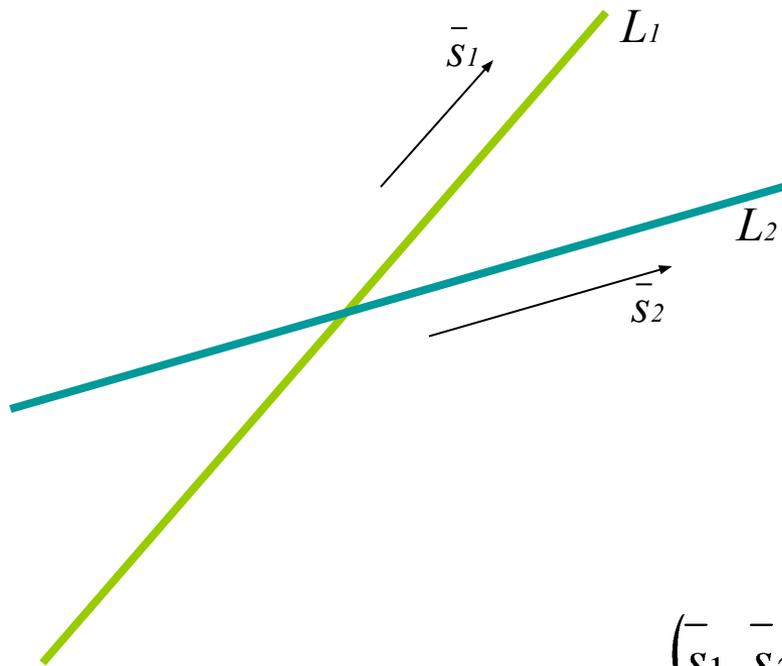
$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

9. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

(угол между двумя прямыми L_1 и L_2)

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\left(\bar{s}_1, \bar{s}_2\right) = 0$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\left(\overline{s_1}, \overline{s_2}\right) = 0 \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\left(\bar{s}_1, \bar{s}_2\right) = 0 \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\left(\bar{s}_1, \bar{s}_2\right) = 0 \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\left(\overline{s_1}, \overline{s_2}\right) = 0 \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

$$\overline{s_1} \parallel \overline{s_2}$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

$$\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 0 \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

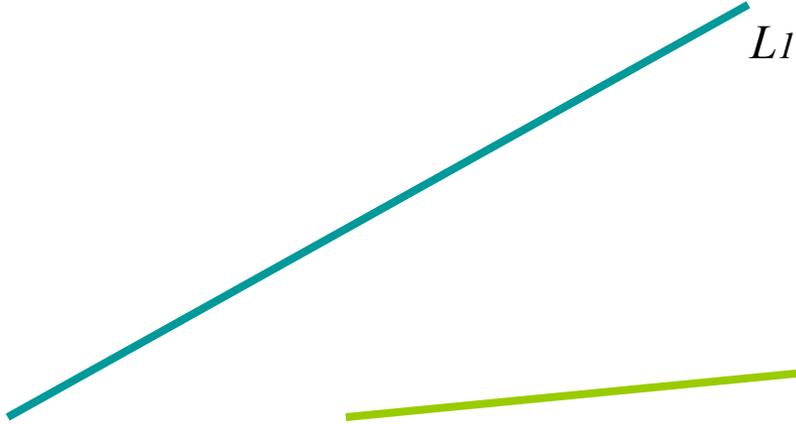
Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2

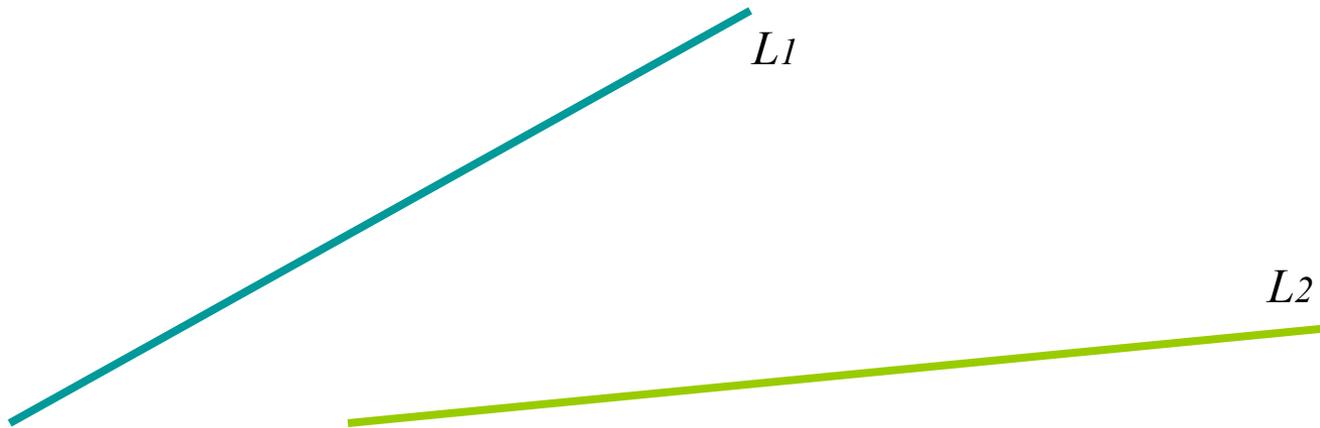
$$\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 0 \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2

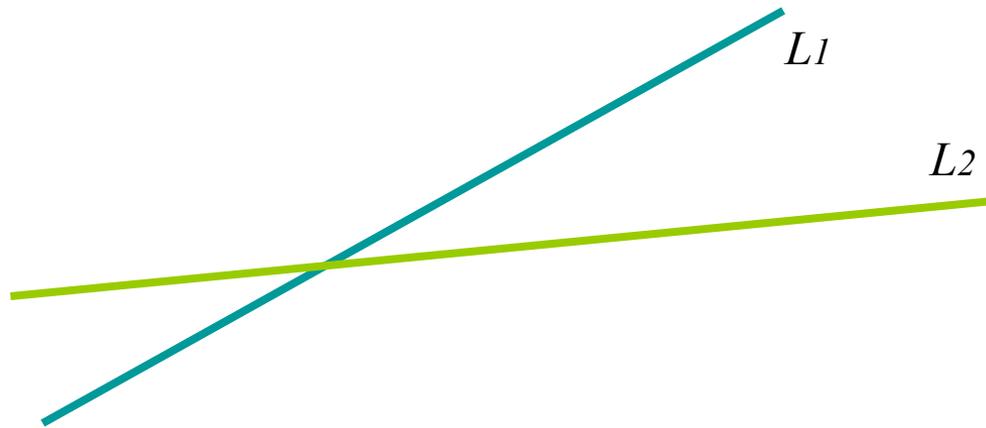
$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

10. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости

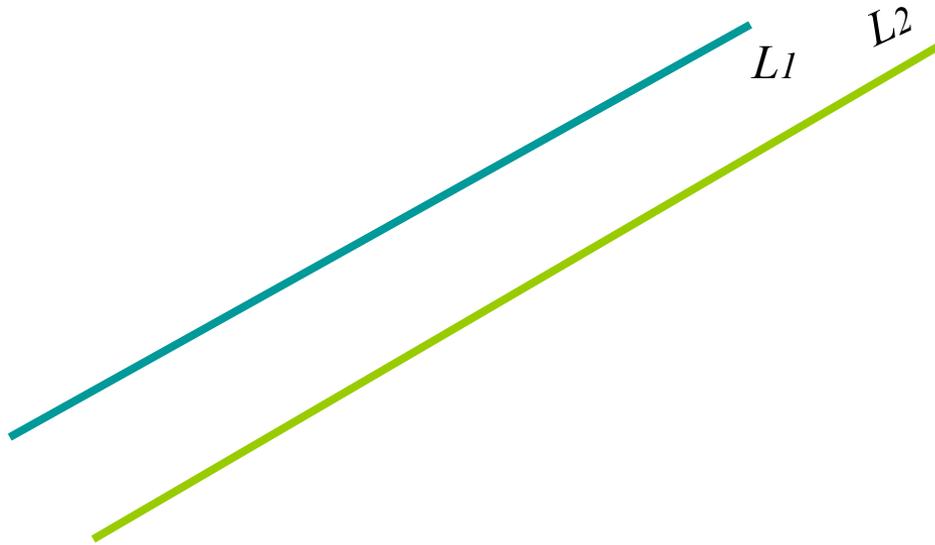




L_1 и L_2 могут:

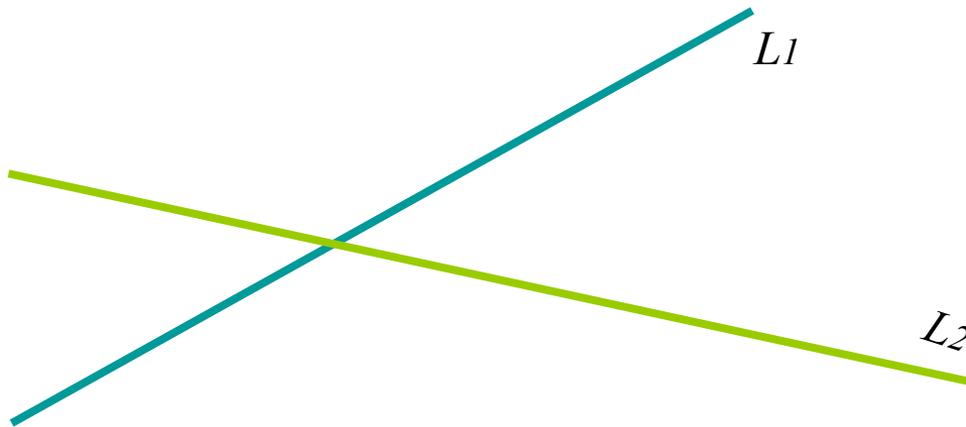


L_1 и L_2 могут:
1. пересекаться



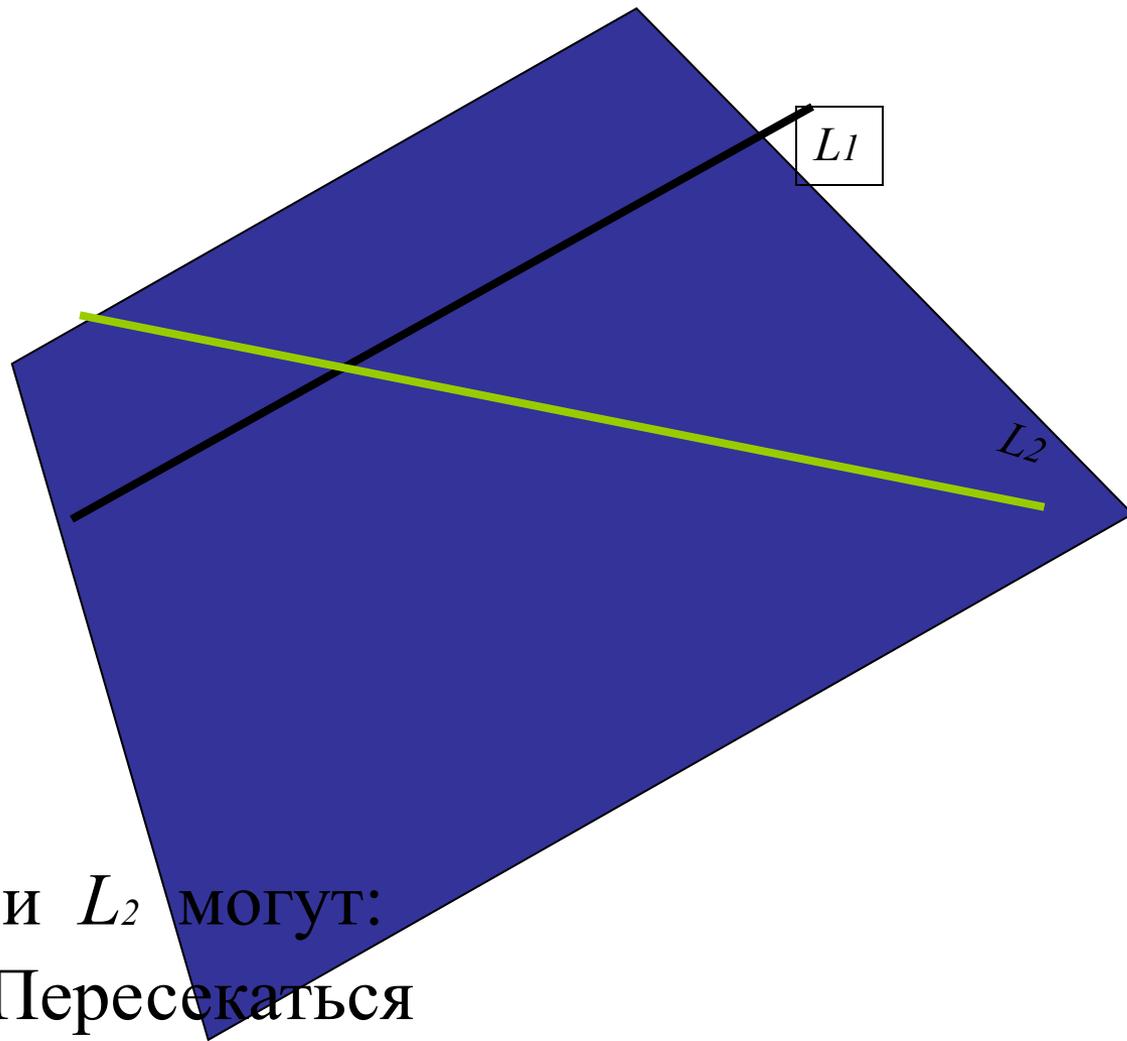
L_1 и L_2 могут:

1. Пересекаться
2. Быть параллельными



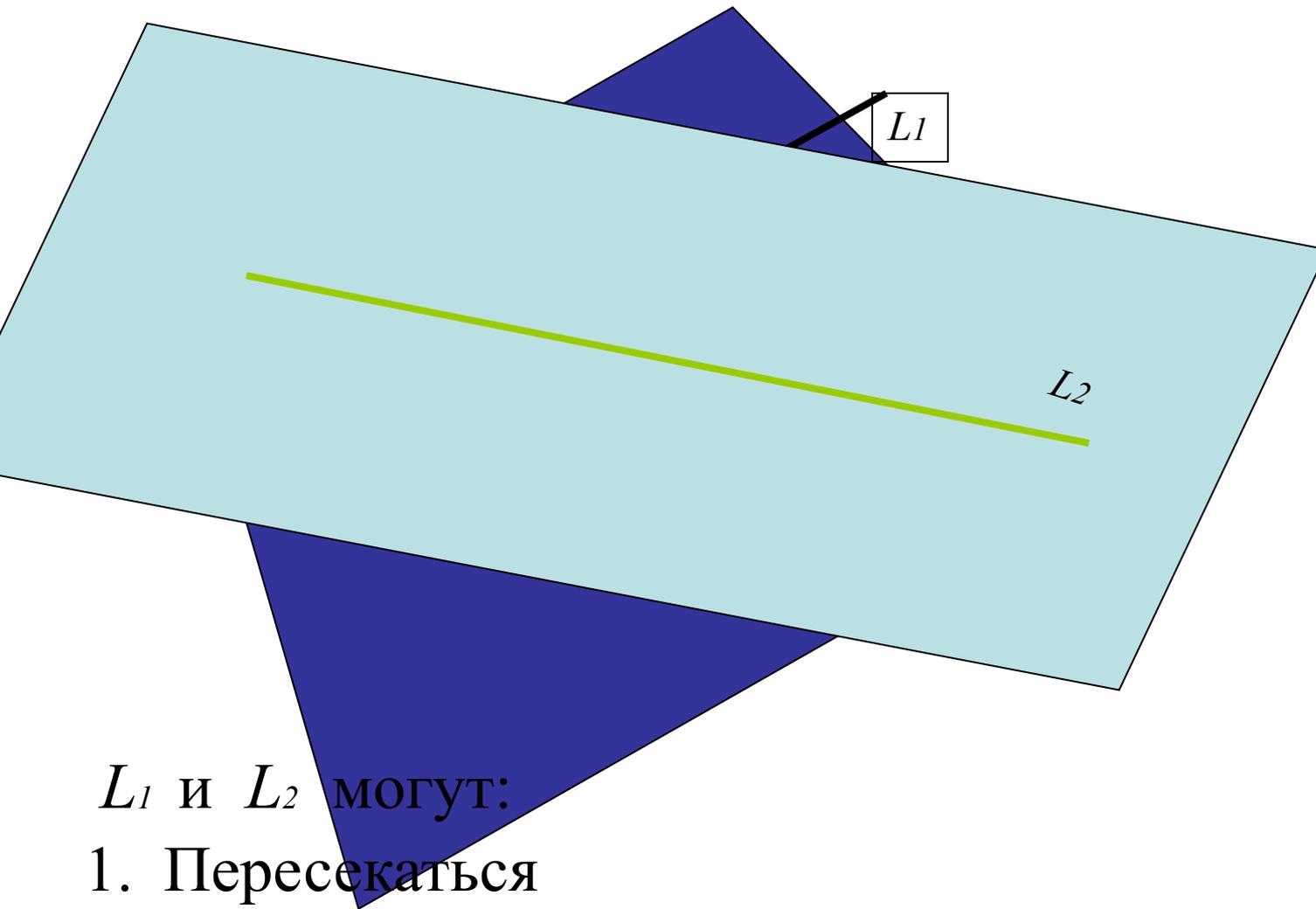
L_1 и L_2 могут:

1. Пересекаться
2. Быть параллельными
3. Скрещиваться (прямые не лежат в одной плоскости)



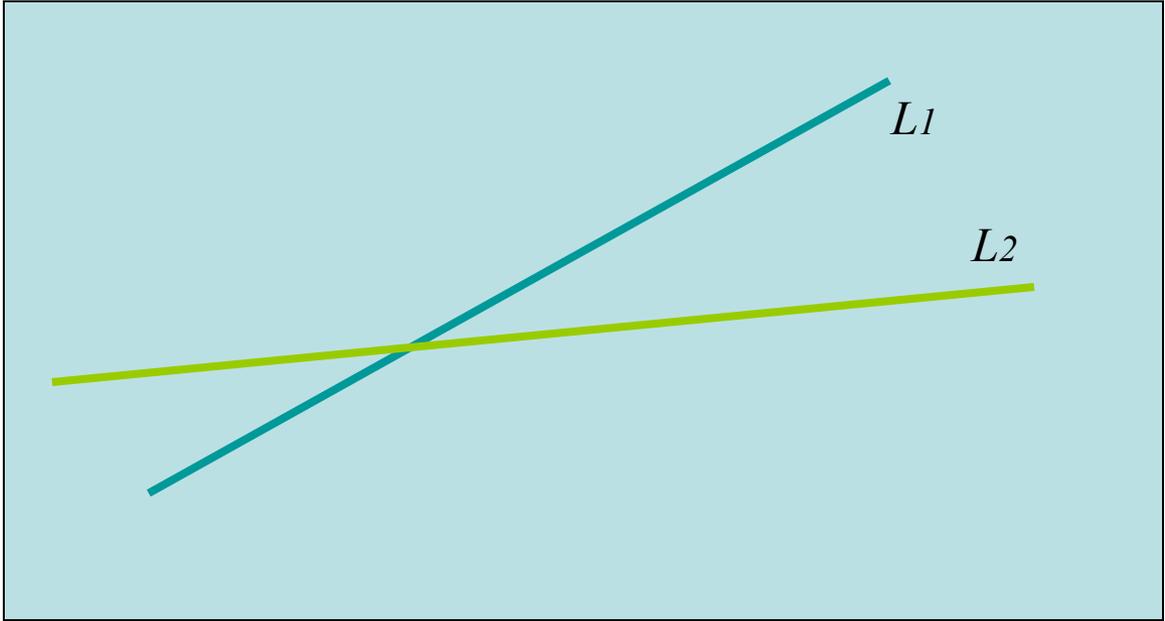
L_1 и L_2 могут:

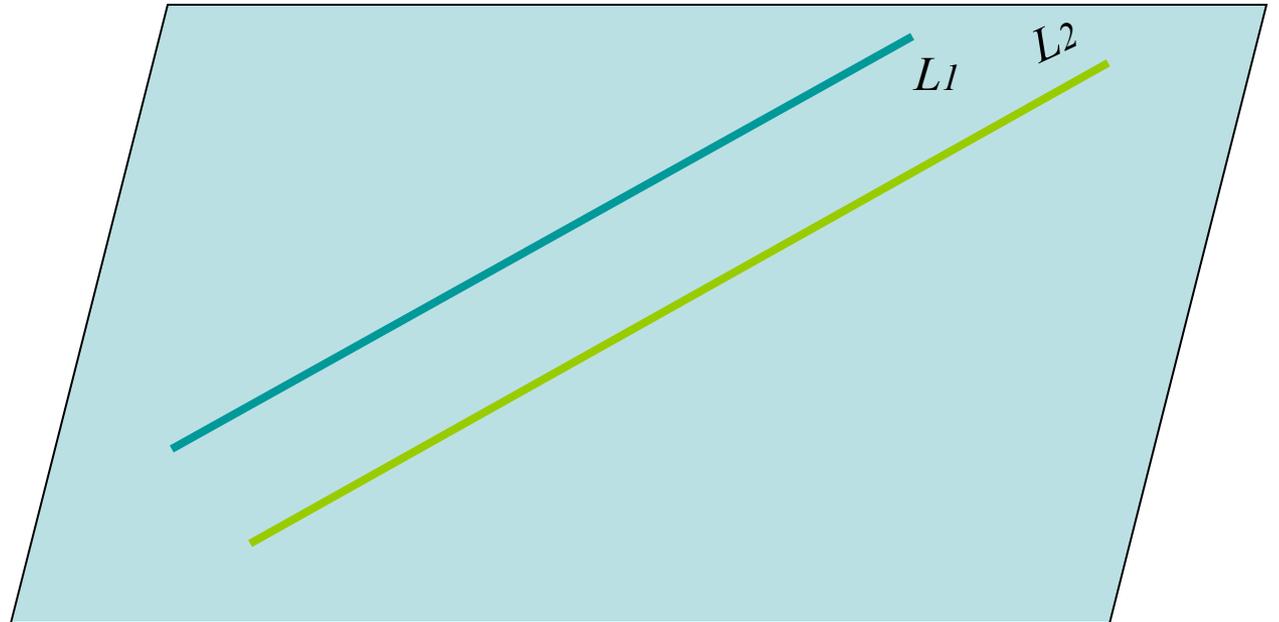
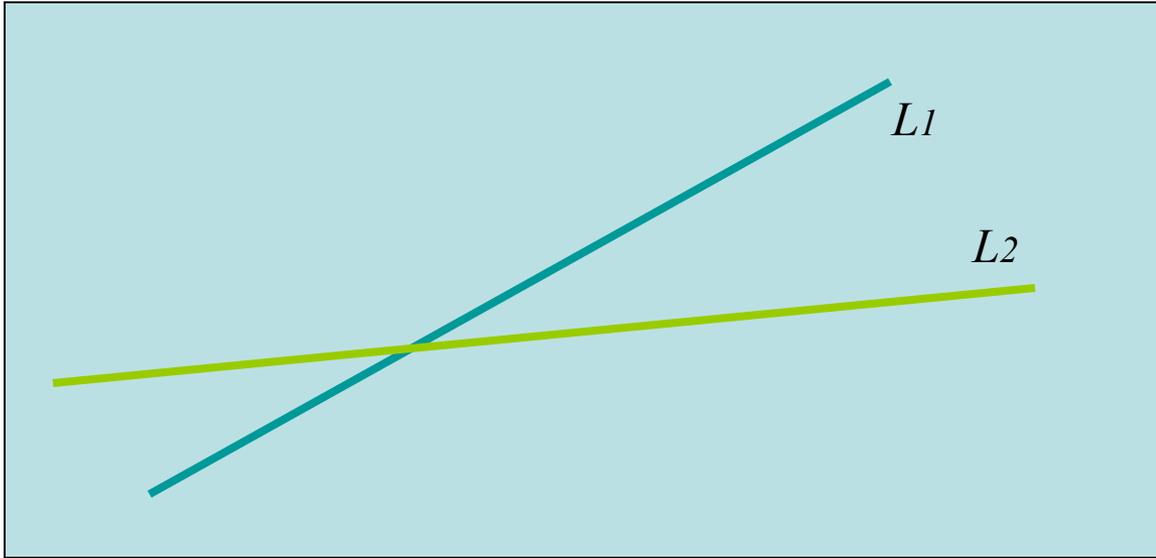
1. Пересекаться
2. Быть параллельными
3. Скрещиваться (прямые не лежат в одной плоскости)

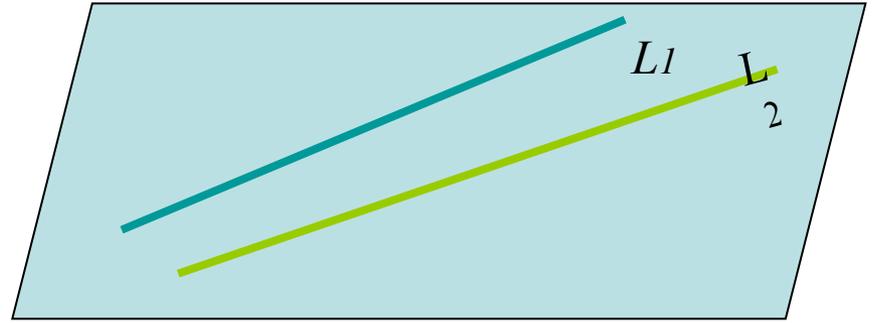
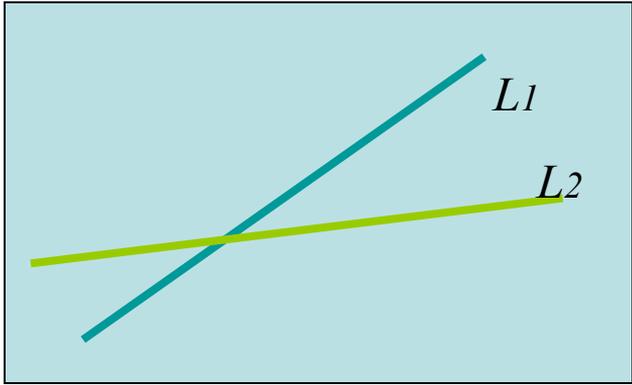


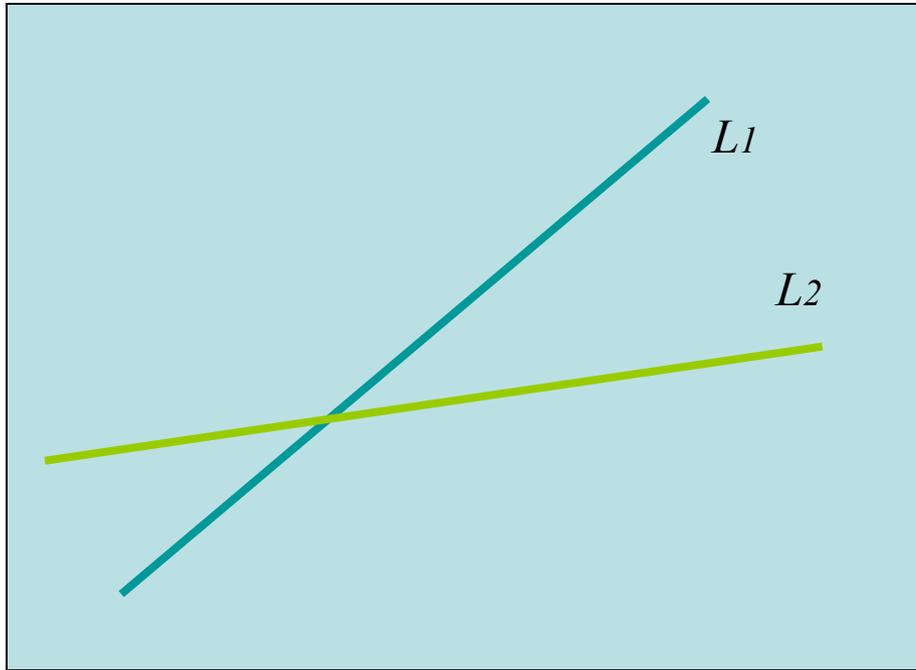
L_1 и L_2 могут:

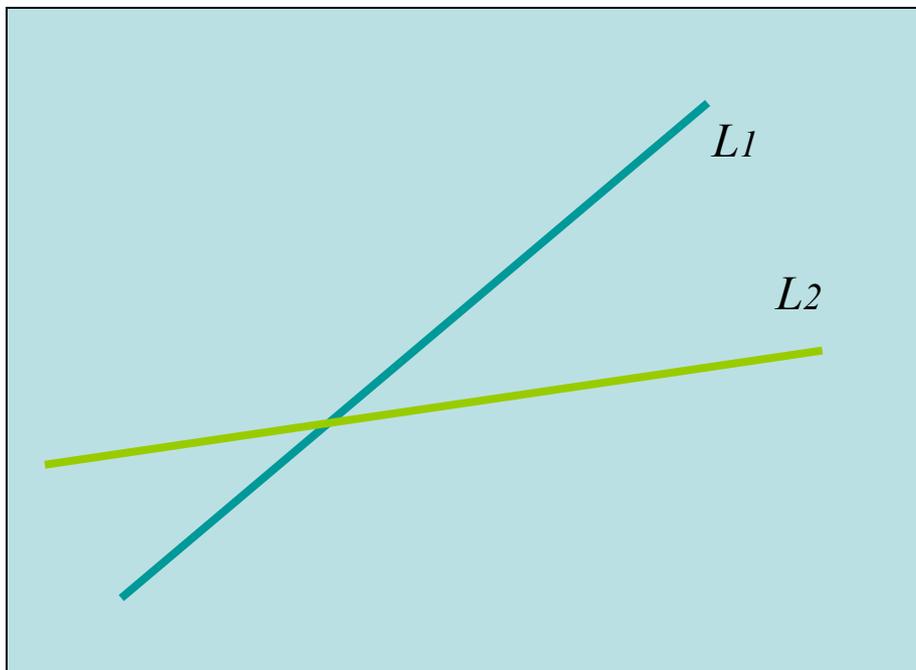
1. Пересекаться
2. Быть параллельными
3. Скрещиваться (прямые не лежат в одной плоскости)





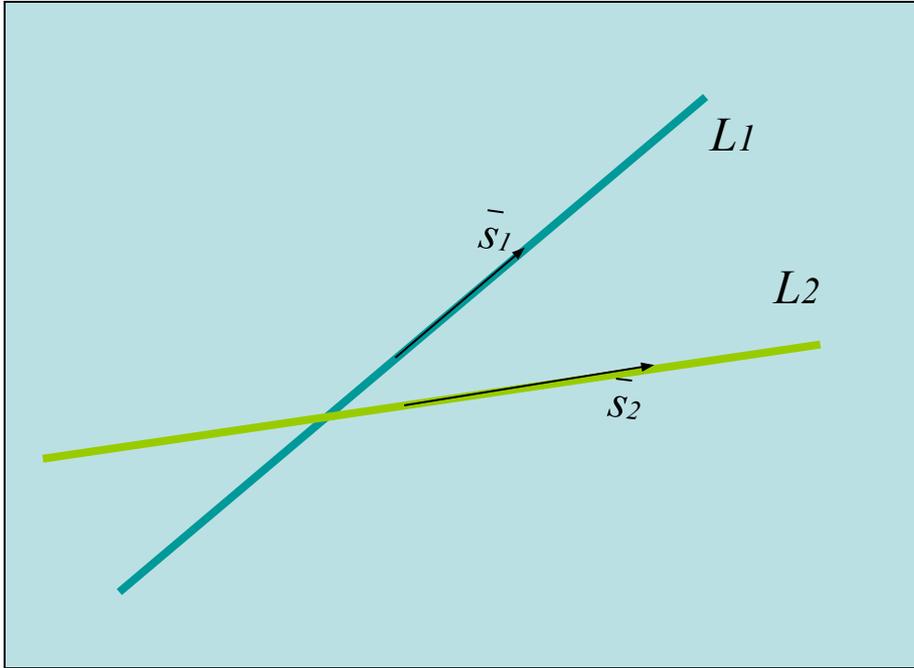






$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

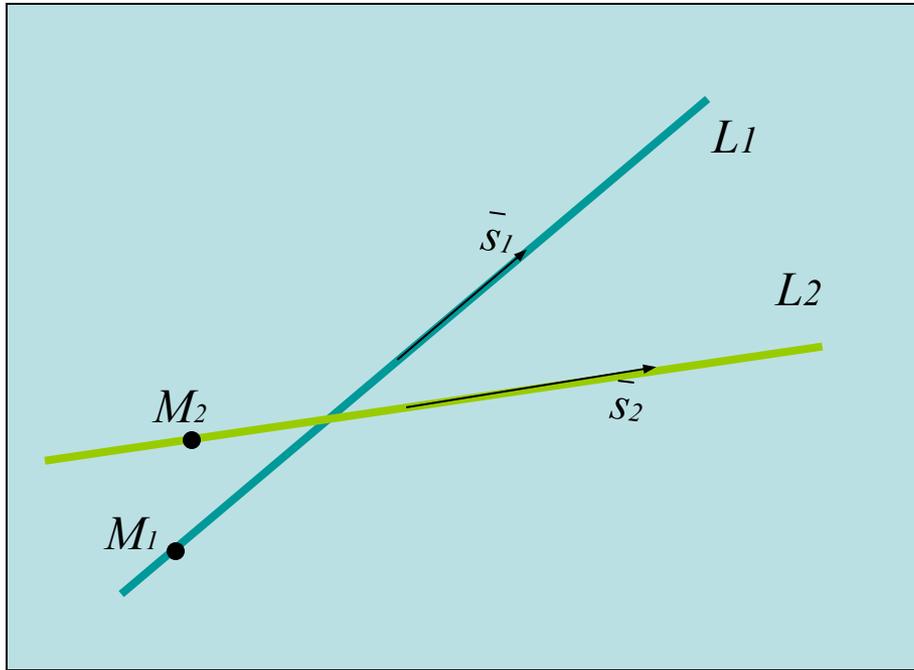


$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$



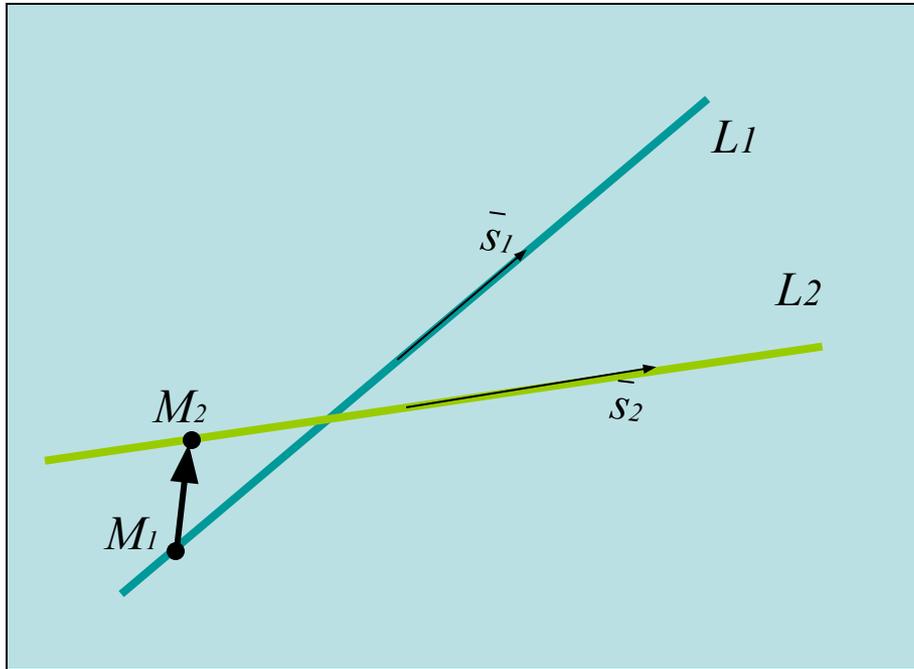
$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$



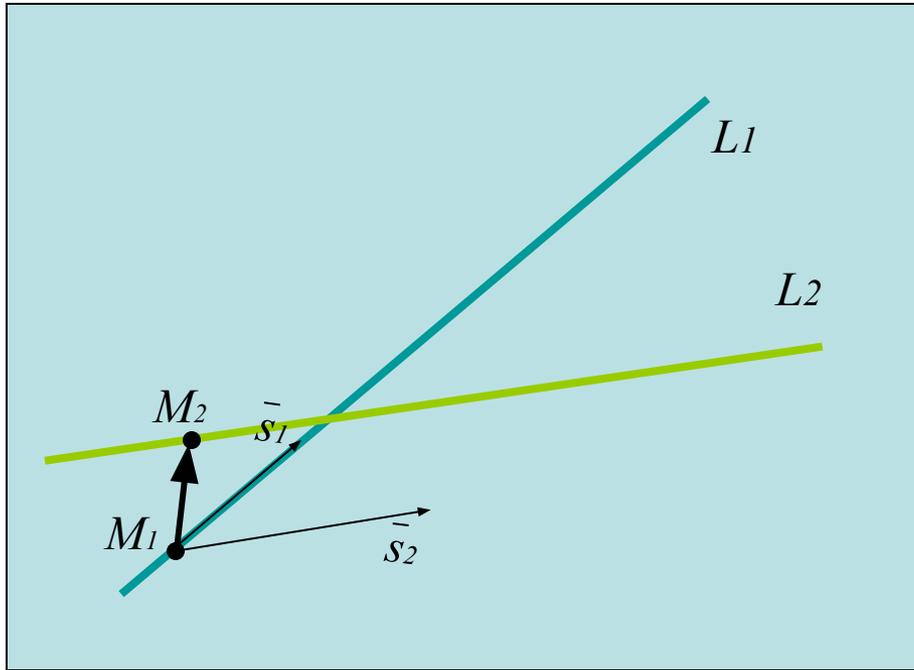
$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$



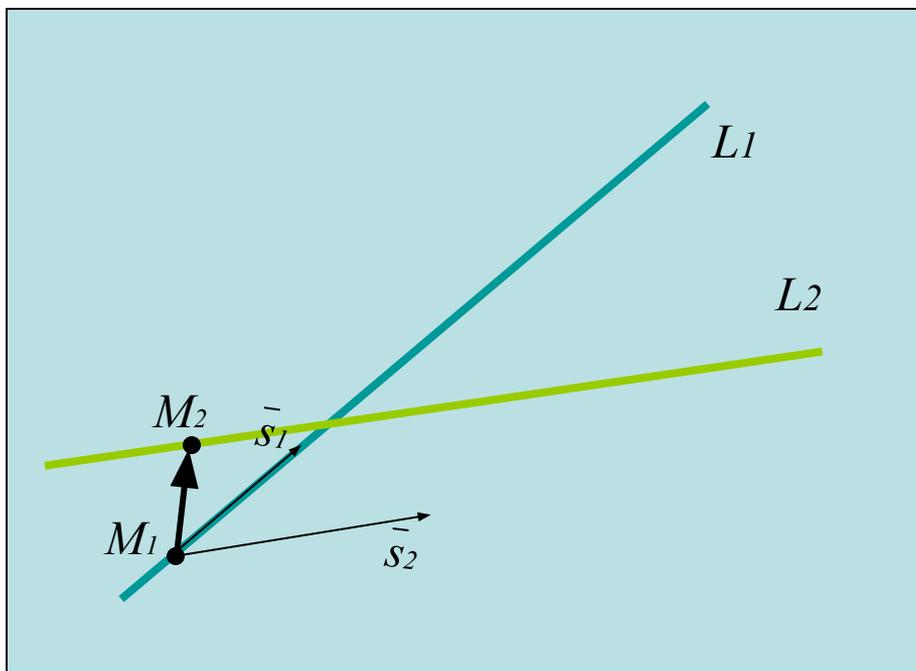
$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$



Условие компланарности трех векторов

$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

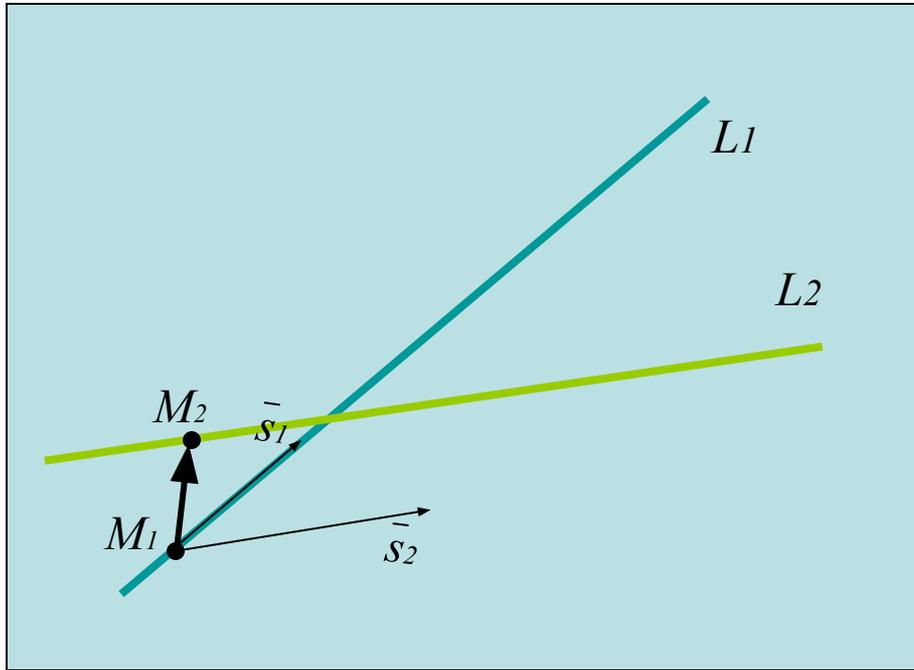
$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$\langle \overline{M_1 M_2}; \vec{s}_1; \vec{s}_2 \rangle = 0$$



Условие компланарности трех векторов

$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$\langle \overline{M_1M_2}; \vec{s}_1; \vec{s}_2 \rangle = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие принадлежности двух прямых L_1 и L_2 одной плоскости

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие принадлежности двух прямых L_1 и L_2 одной плоскости

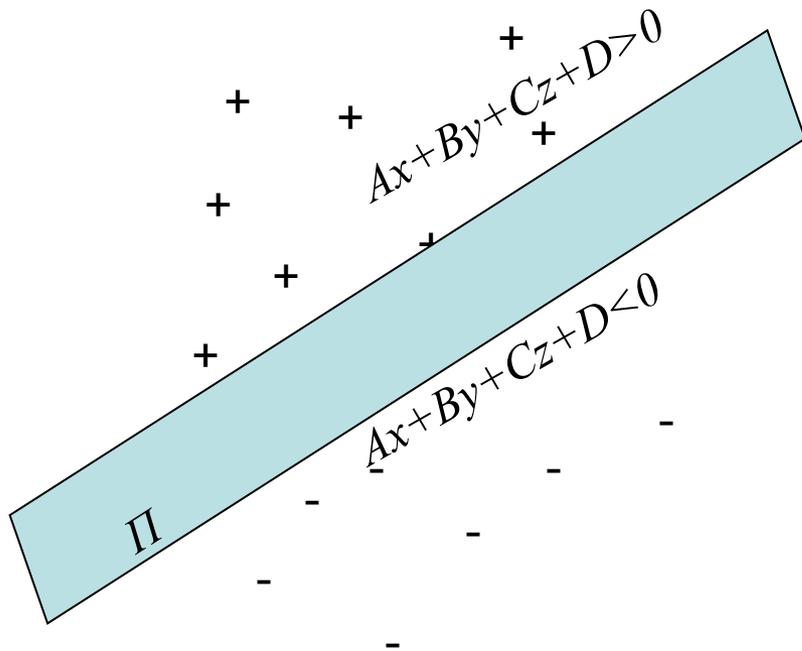
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие параллельности L_1 и L_2

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

11. Геометрический смысл неравенства первой степени с тремя неизвестными

Теорема: Пусть относительно ДПСК плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Тогда для координат (x,y,z) всех точек, лежащих по одну сторону от этой плоскости выполняется неравенство $Ax+By+Cz+D>0$, а для координат (x,y,z) всех точек, лежащих по другую сторону от этой плоскости выполняется неравенство $Ax+By+Cz+D<0$



Полупространство, для
координат всех точек
которых $Ax + By + Cz + D > 0$,
будем называть
положительным
полупространством

Полупространство, для
координат всех точек
которых $Ax + By + Cz + D < 0$,
будем называть
отрицательным
полупространством

Теорема: Пусть относительно ДПСК плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда если отложить нормальный вектор этой плоскости от любой точки этой плоскости, то конец отложенного вектора будет находиться в положительном полупространстве от данной плоскости

12. Расстояние от точки до плоскости

12. Расстояние от точки до плоскости



12. Расстояние от точки до плоскости

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$



12. Расстояние от точки до плоскости

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

M_1

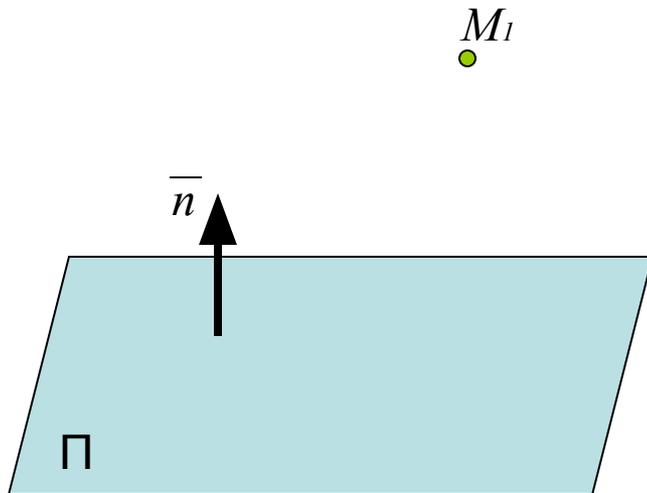


12. Расстояние от точки до плоскости

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\vec{n} \perp \Pi$$



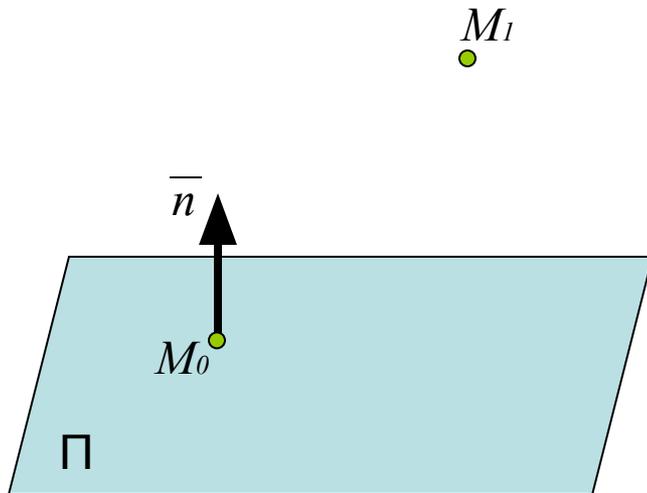
12. Расстояние от точки до плоскости

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

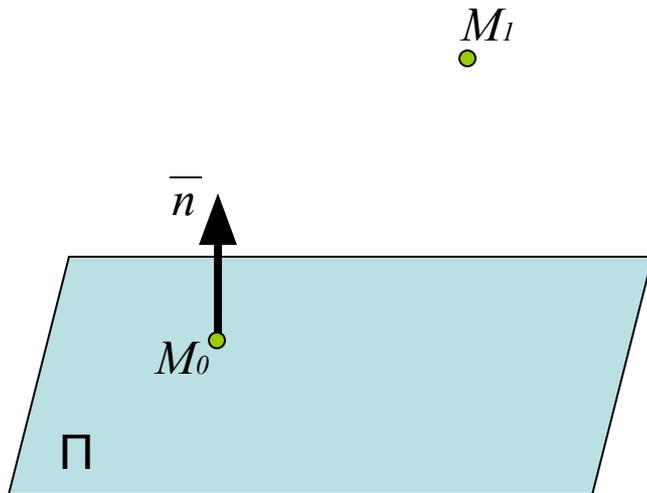
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\vec{n} \perp \Pi$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$



12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

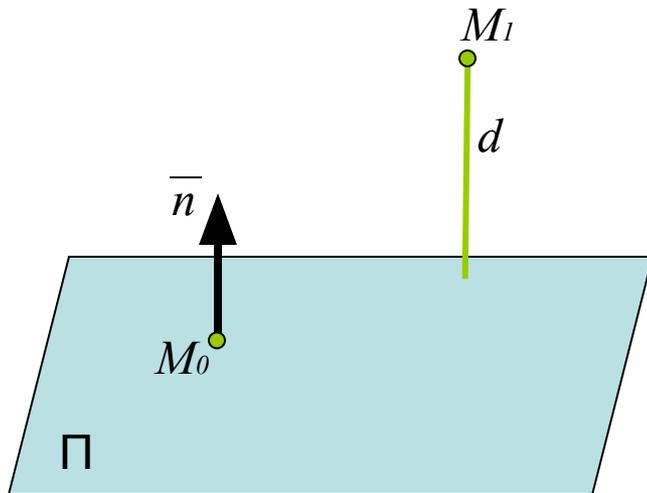
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\pi \perp \Pi$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

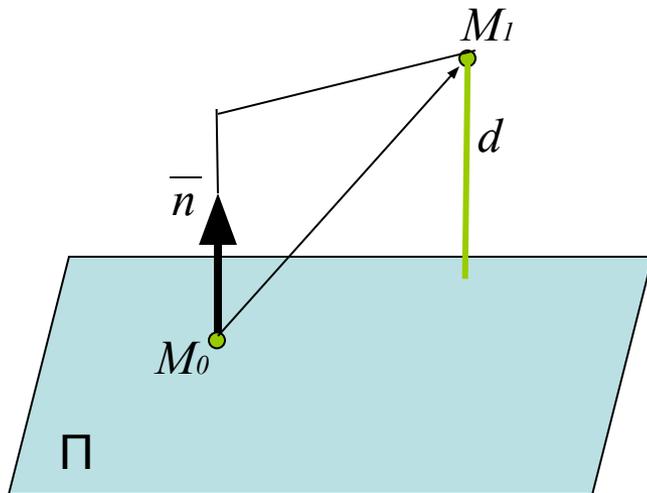
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\pi \perp \Pi$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

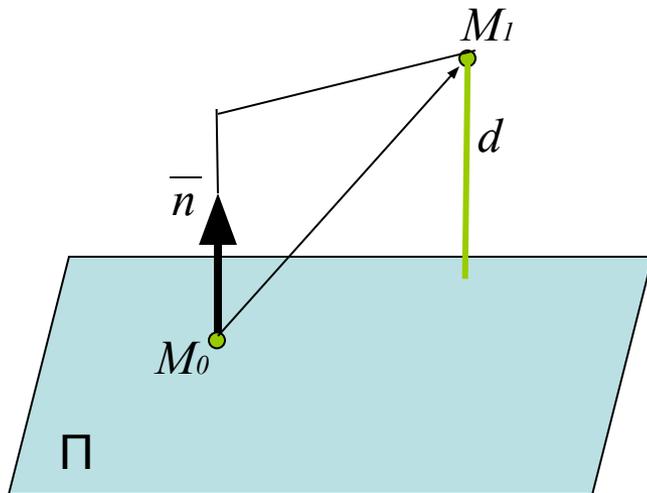
$$\pi \perp \Pi$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \Pi p_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1} \right|$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

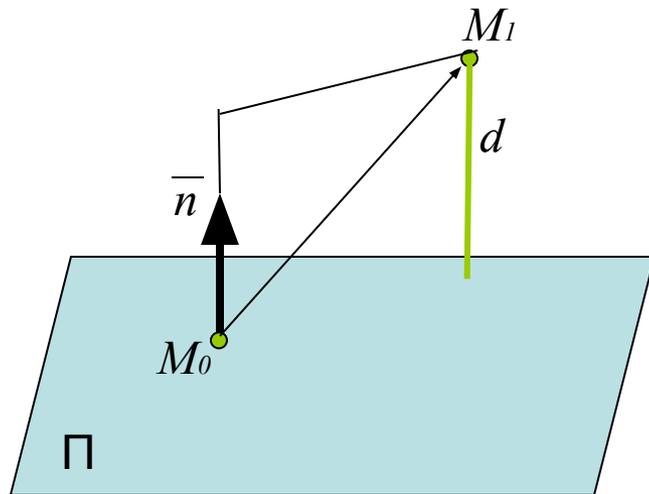
$$\pi \perp \Pi$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \Pi \text{ p}_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1} \right| = \left| \frac{(\bar{n}, \overline{M_0 M_1})}{|\bar{n}|} \right|$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\pi \perp \Pi$$

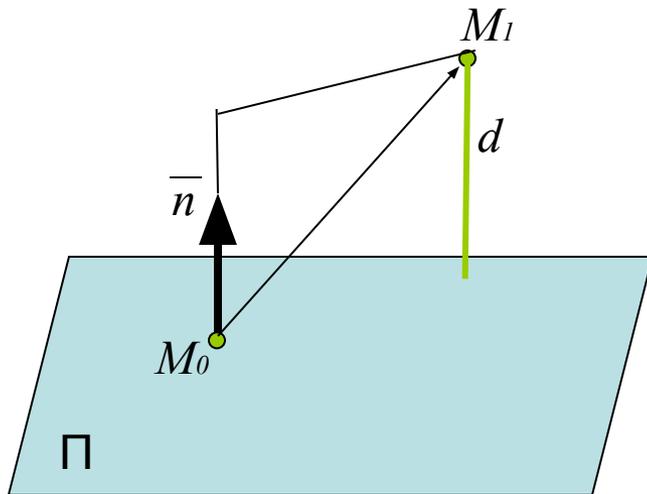
$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

$$d(M_1, \Pi) = |\Pi p_n \overline{M_0 M_1}| = \left| \frac{(\overline{n}, \overline{M_0 M_1})}{|\overline{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\pi \perp \Pi$$

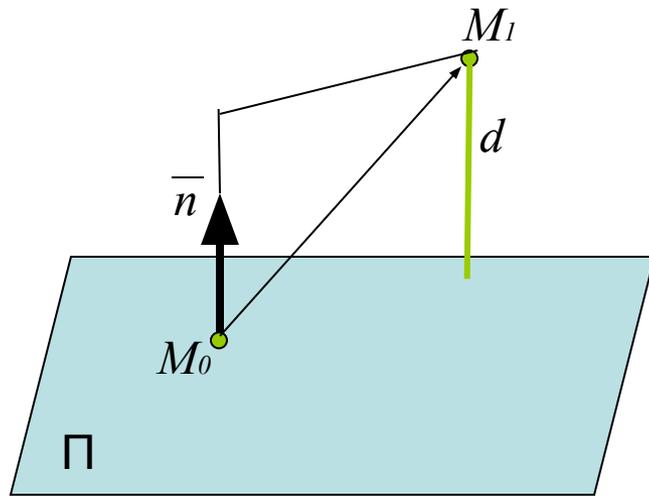
$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

$$d(M_1, \Pi) = |\Pi p_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1}| = \left| \frac{(\bar{n}, \overline{M_0 M_1})}{|\bar{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$\pi \perp \Pi$$

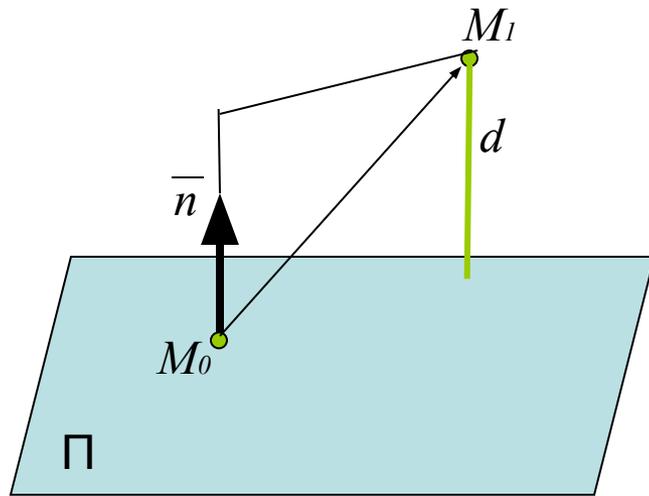
$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

$$d(M_1, \Pi) = \left| \Pi p_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1} \right| = \left| \frac{(\bar{n}, \overline{M_0 M_1})}{|\bar{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

12. Расстояние от точки до плоскости



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin \Pi$$

$$n \perp \Pi$$

$$M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$$

$$d = d(M_1, \Pi)$$

$$d(M_1, \Pi) = |\Pi p_{\bar{n}} \overline{M_0 M_1}| = \left| \frac{(\bar{n}, \overline{M_0 M_1})}{|\bar{n}|} \right| =$$

$$= \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$\text{т.к. } M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$

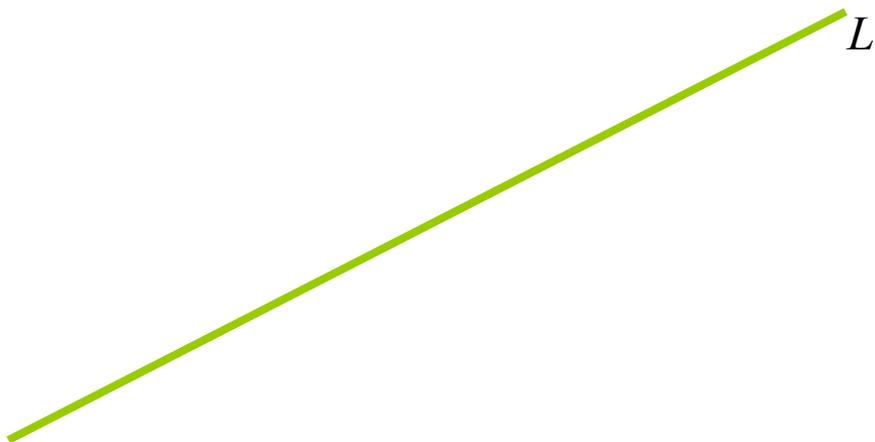
до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

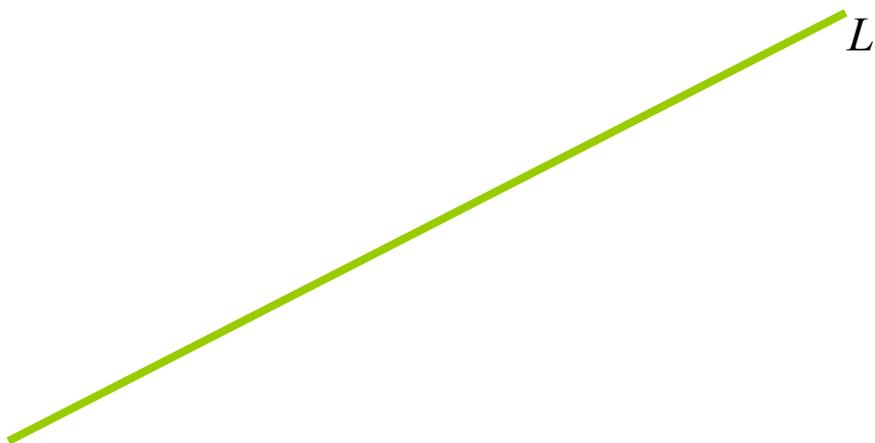


13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

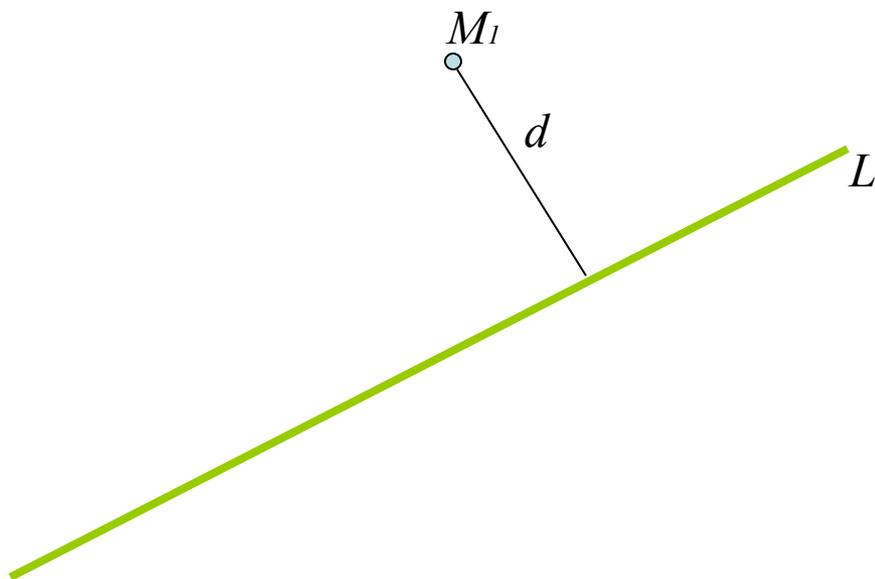
M_1
○

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$



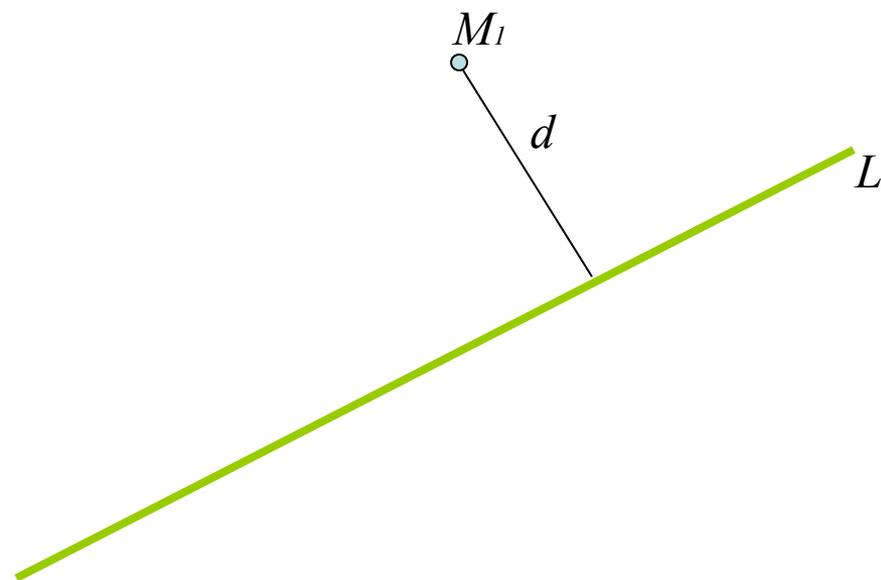
13. Расстояние от точки до прямой в пространстве



$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

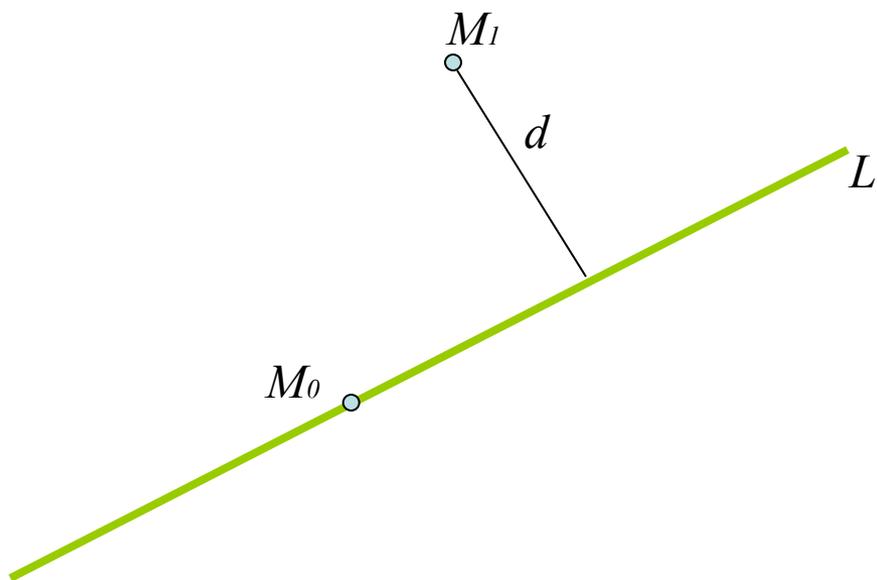


$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

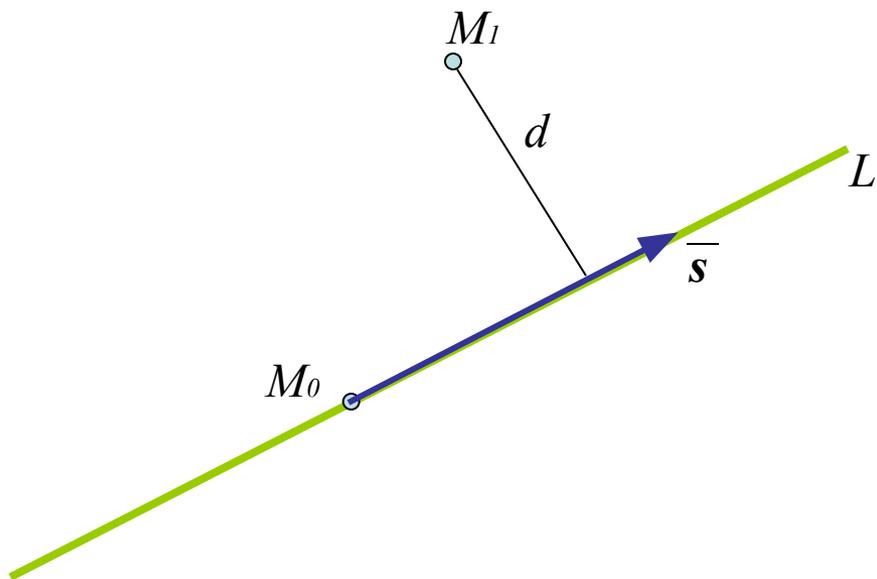


$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве



$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

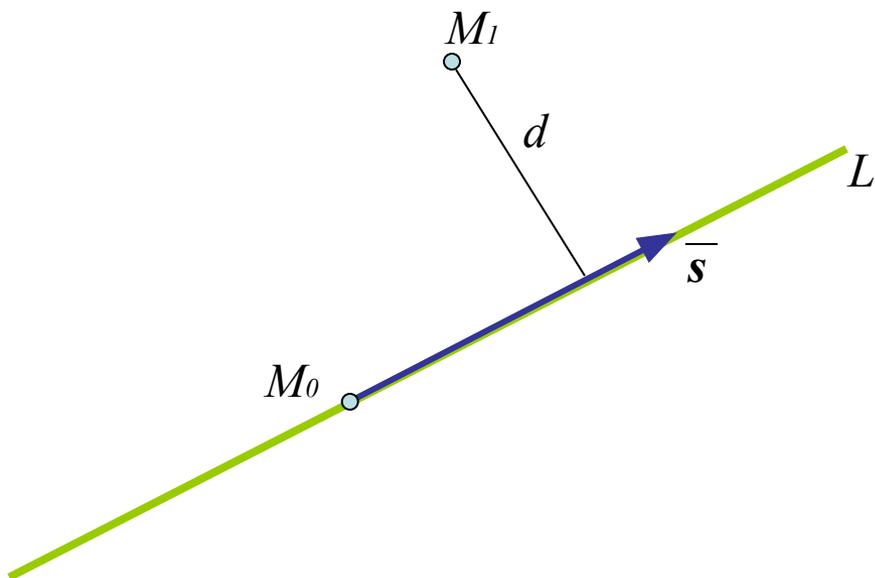
$$\vec{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

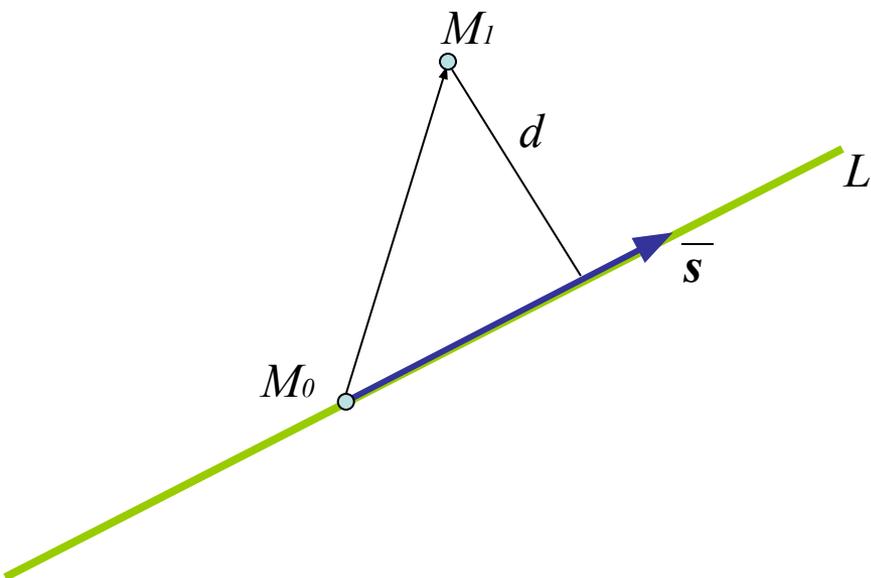


13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

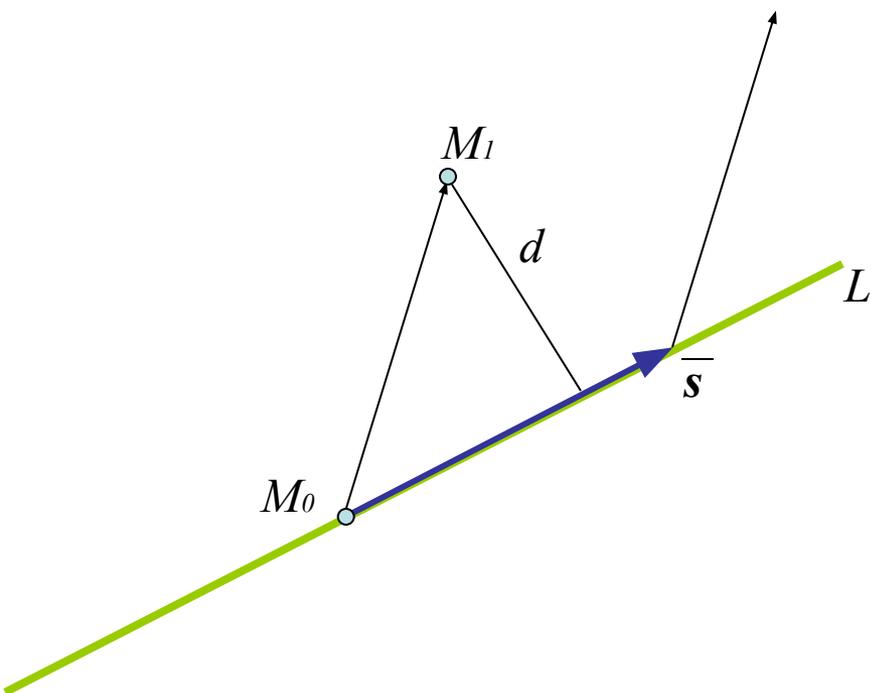


13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

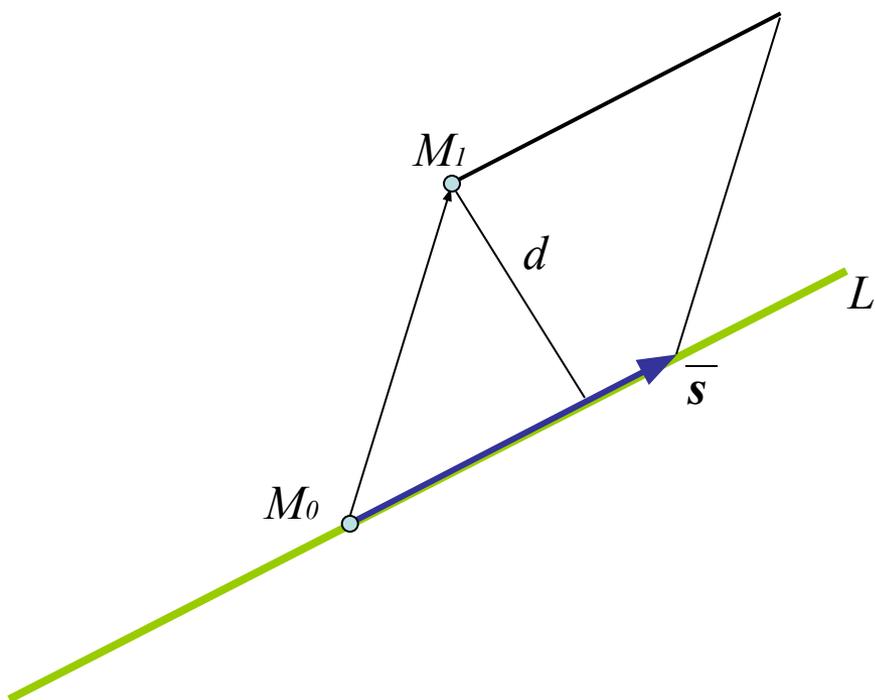


13. Расстояние от точки до прямой в пространстве

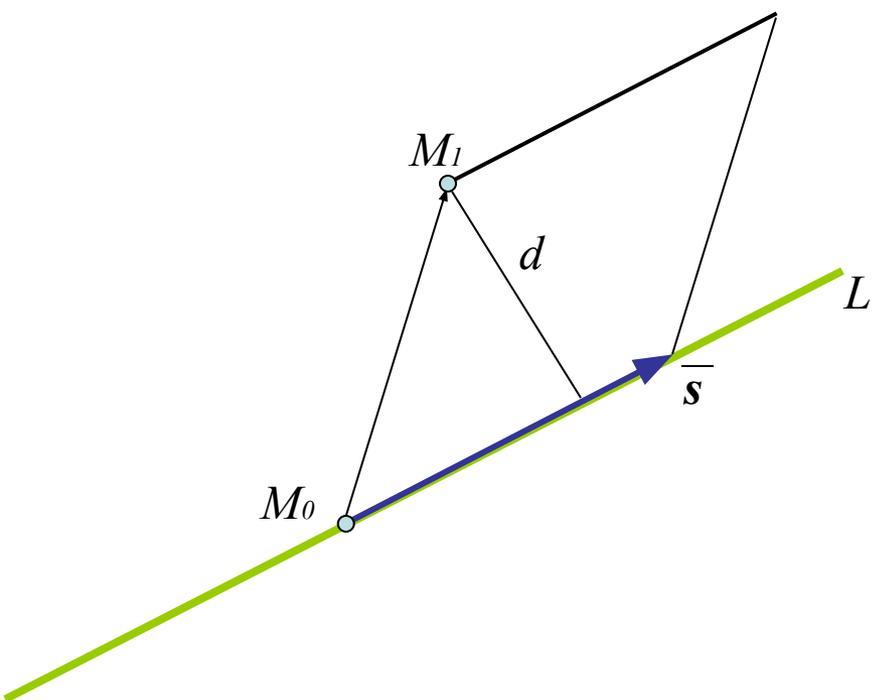
$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$



13. Расстояние от точки до прямой в пространстве



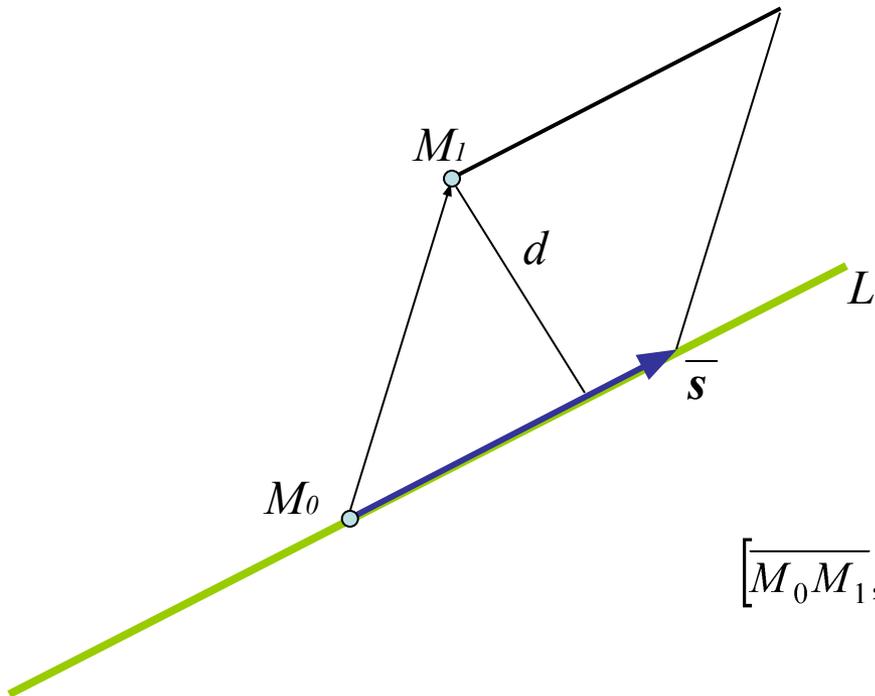
$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\vec{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$d(M_1, L) = \frac{|\overline{[M_0 M_1; \vec{s}]}}{|\vec{s}|}$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве



$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

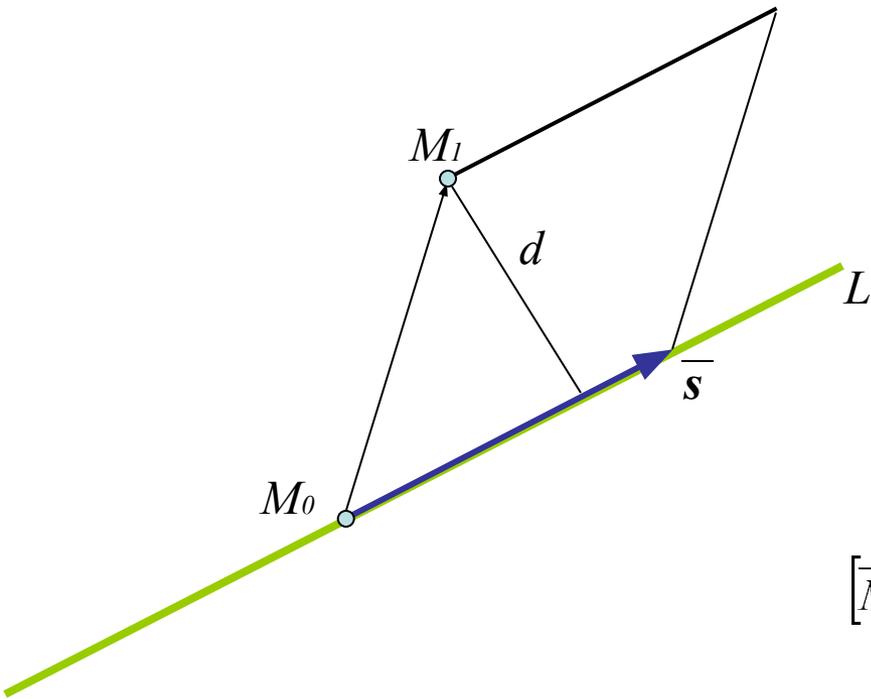
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$d(M_1, L) = \frac{|\overline{[M_0 M_1; \bar{s}]}|}{|\bar{s}|}$$

$$\overline{[M_0 M_1; \bar{s}]} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

13. Расстояние от точки до прямой в пространстве



$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \notin L$$

$$\bar{s} = \{l; m; n\}, M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$$

$$d(M_1, L) = \frac{|\overline{[M_0 M_1; \bar{s}]}|}{|\bar{s}|}$$

$$\overline{[M_0 M_1; \bar{s}]} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} \right\}$$

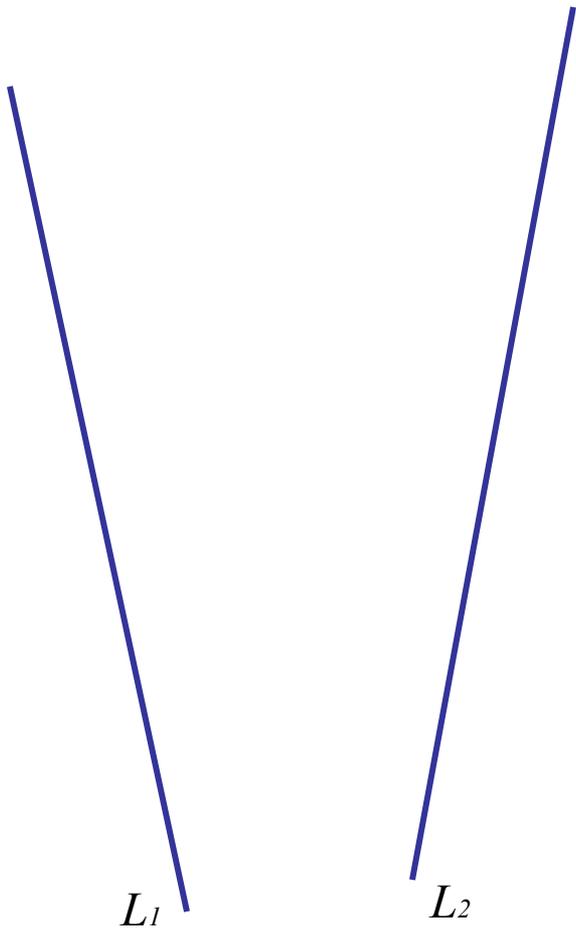
$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{array} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt{\left| \begin{array}{cc} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{array} \right|^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

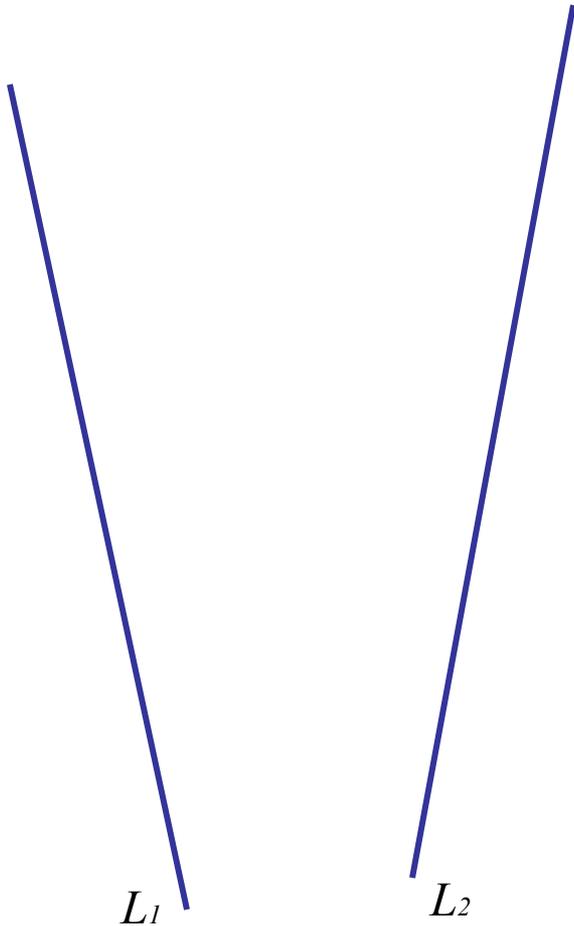
Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до
прямой $L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



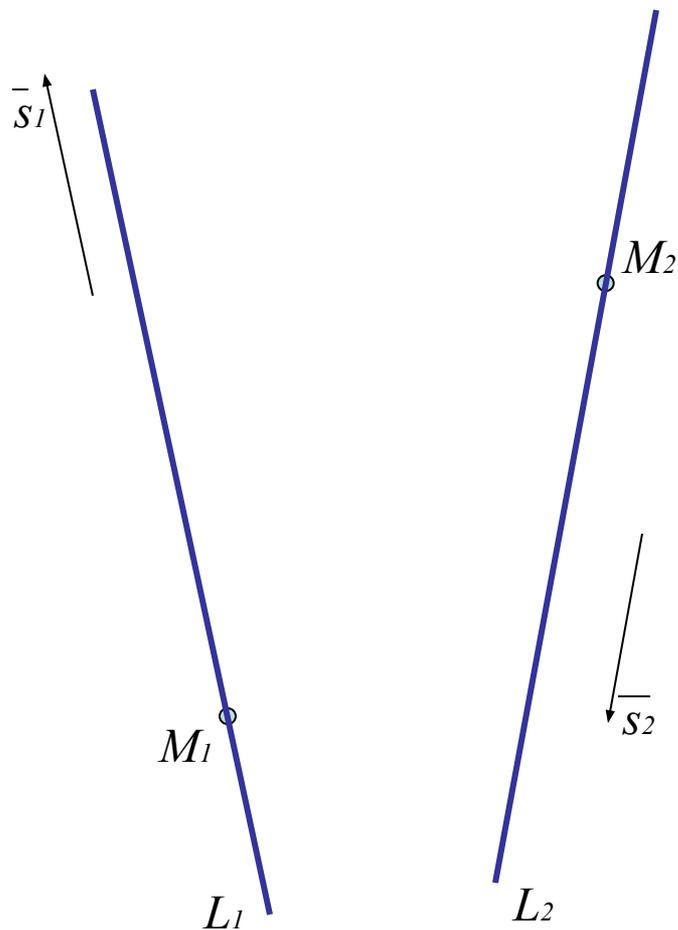
14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

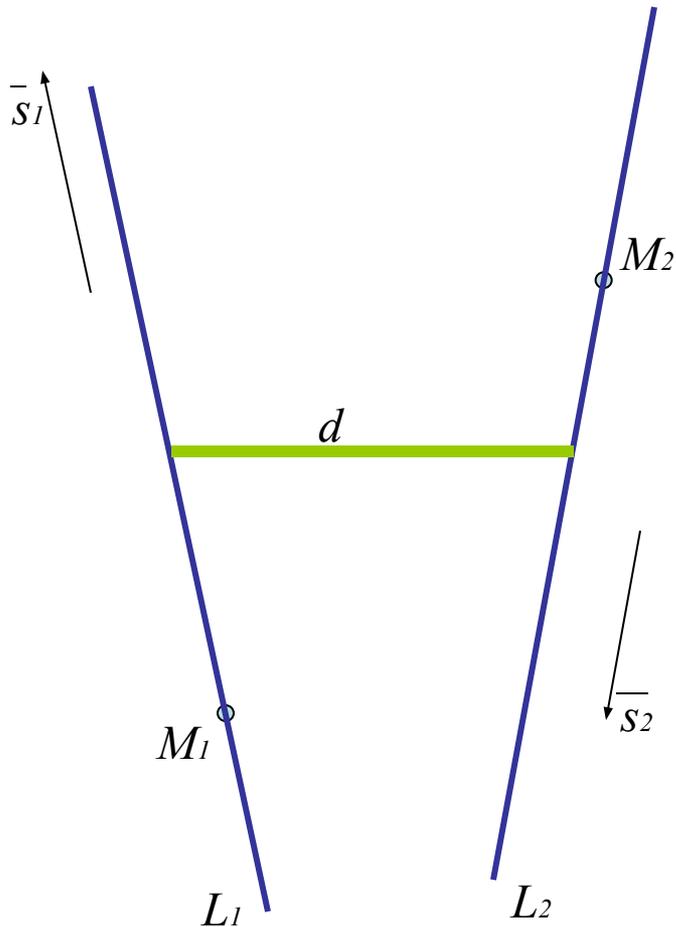
$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

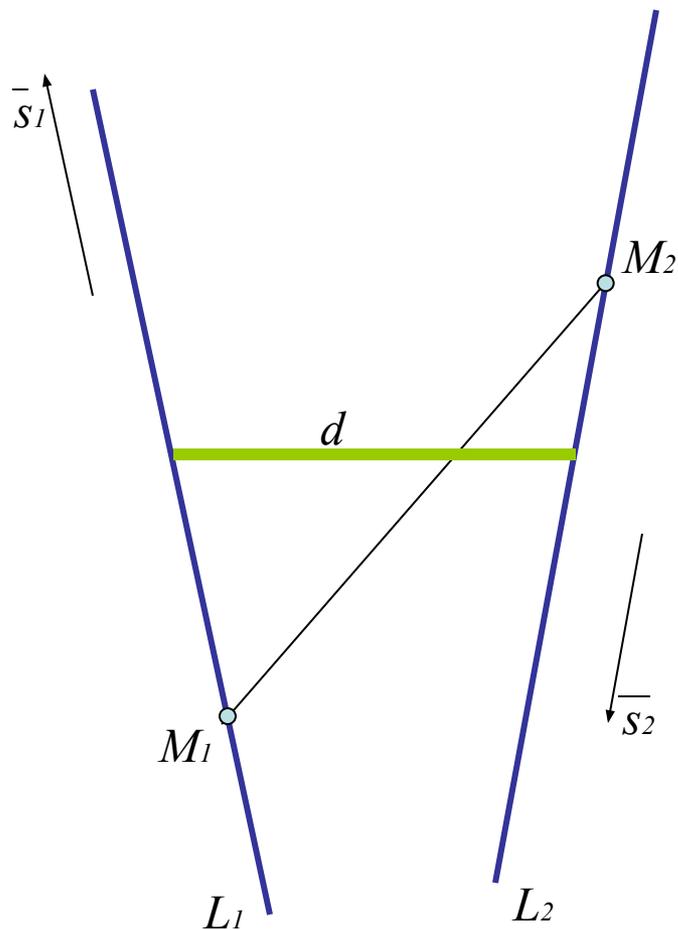
$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

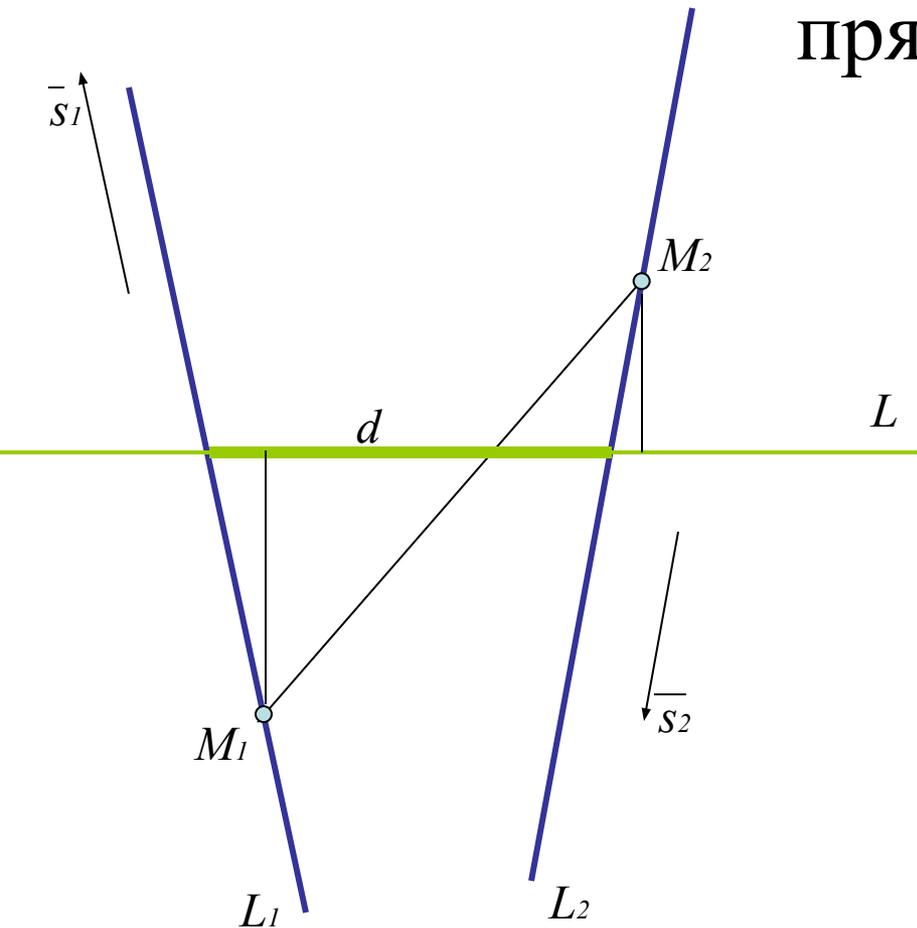
$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

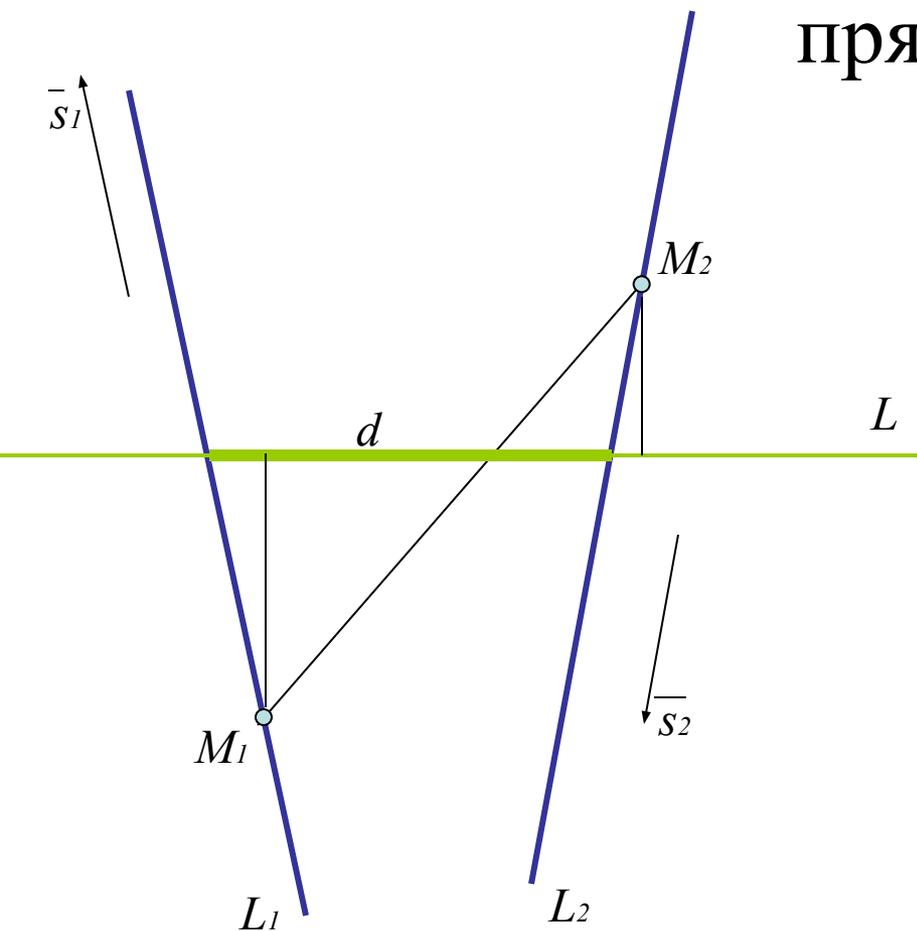
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$
$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$
$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$
$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$
$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

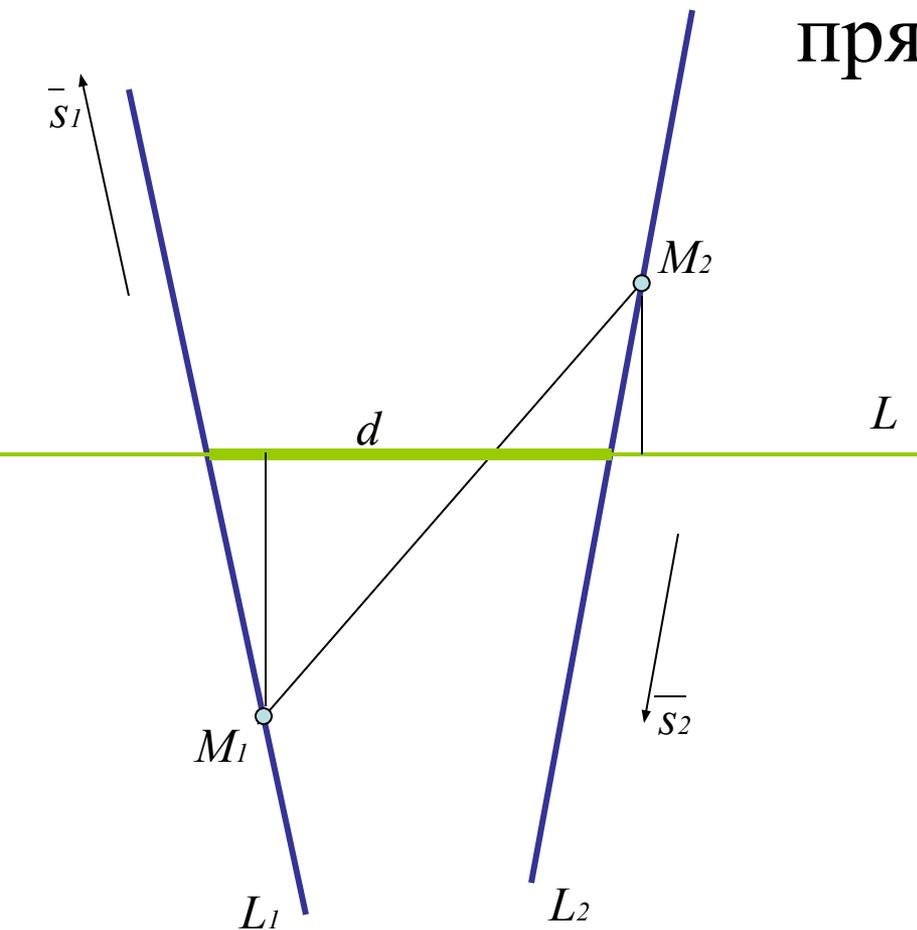
$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$d = \text{Pr}_{[\vec{s}_1, \vec{s}_2]} \overline{M_1 M_2}$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

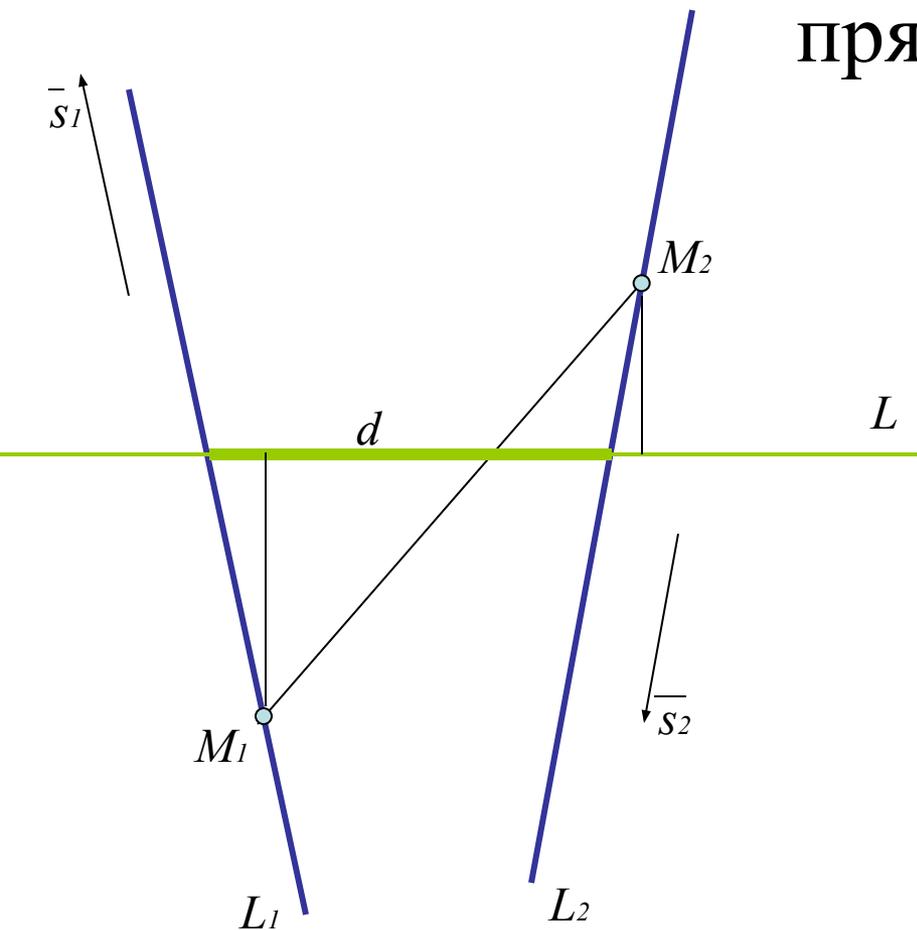
$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$d = \text{Pr}_{[\vec{s}_1 \vec{s}_2]} \overline{M_1 M_2} = \frac{|(M_1 M_2, [\vec{s}_1 \vec{s}_2])|}{|[\vec{s}_1 \vec{s}_2]|}$$

14. Расстояние между скрещивающимися прямыми



прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\vec{s}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$$

$$\vec{s}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$$

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \quad M_2(x_2; y_2; z_2)$$

$$d = \text{Pr}_{[\vec{s}_1, \vec{s}_2]} \overline{M_1 M_2} = \frac{|(\overline{M_1 M_2}, [\vec{s}_1, \vec{s}_2])|}{\|[\vec{s}_1, \vec{s}_2]\|} =$$

$$= \frac{|\langle \overline{M_1 M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{\|[\vec{s}_1, \vec{s}_2]\|}$$

$$\langle \overline{M_1 M_2}, \overline{s_1}, \overline{s_2} \rangle =$$

$$\left[\overline{s_1} \overline{s_2} \right] =$$

$$\left| \left[\overline{s_1} \overline{s_2} \right] \right| =$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

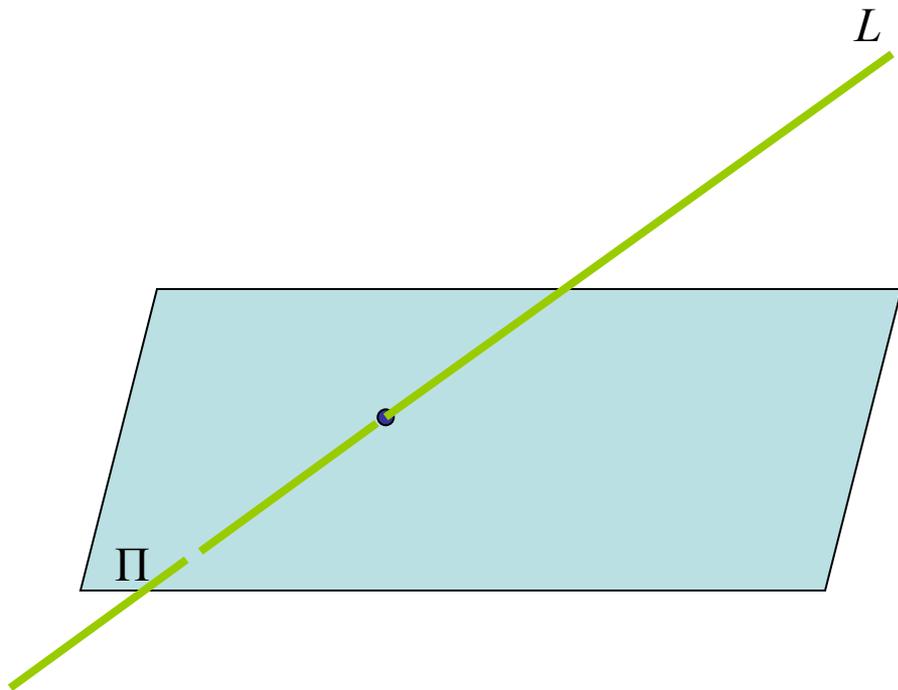
15. Угол между прямой и плоскостью

15. Угол между прямой и плоскостью

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$



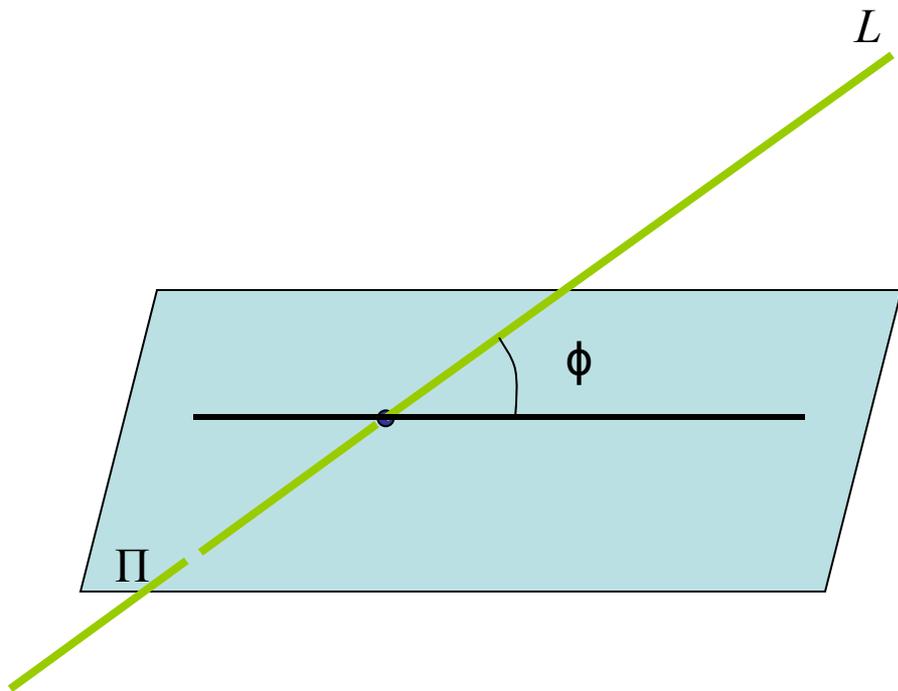
15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

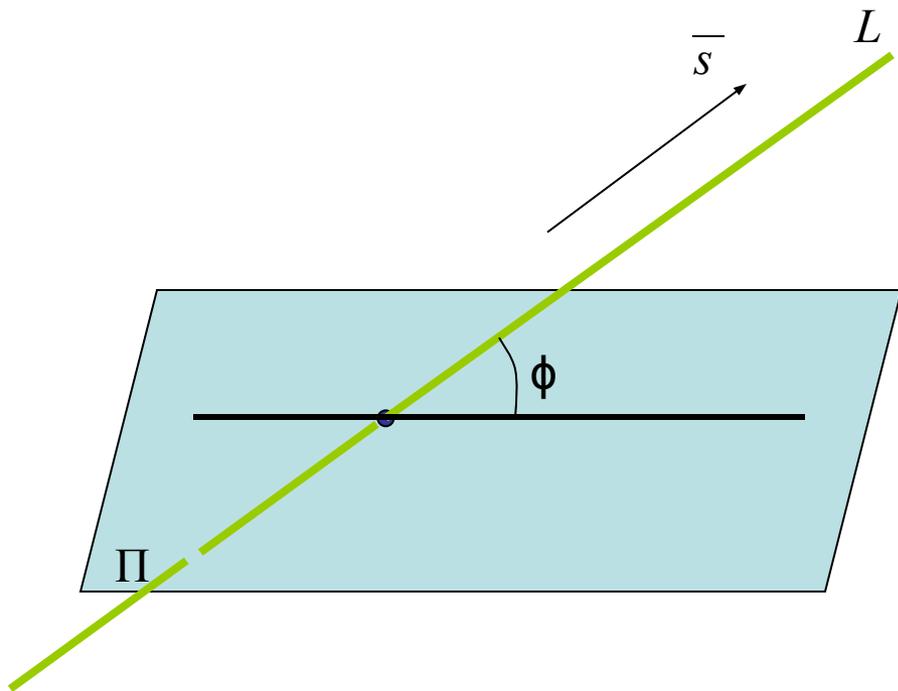
15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

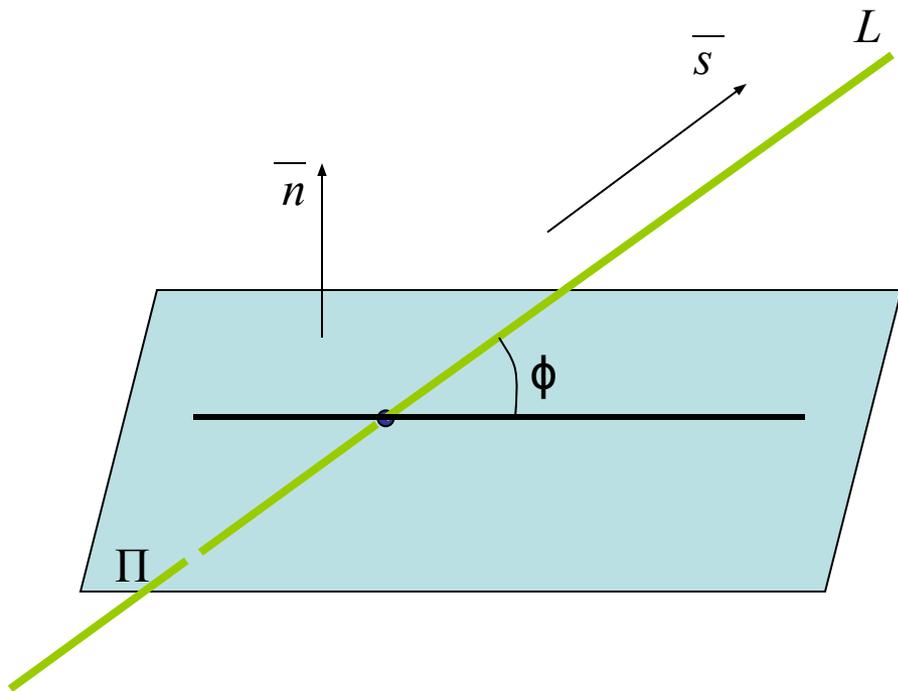
15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

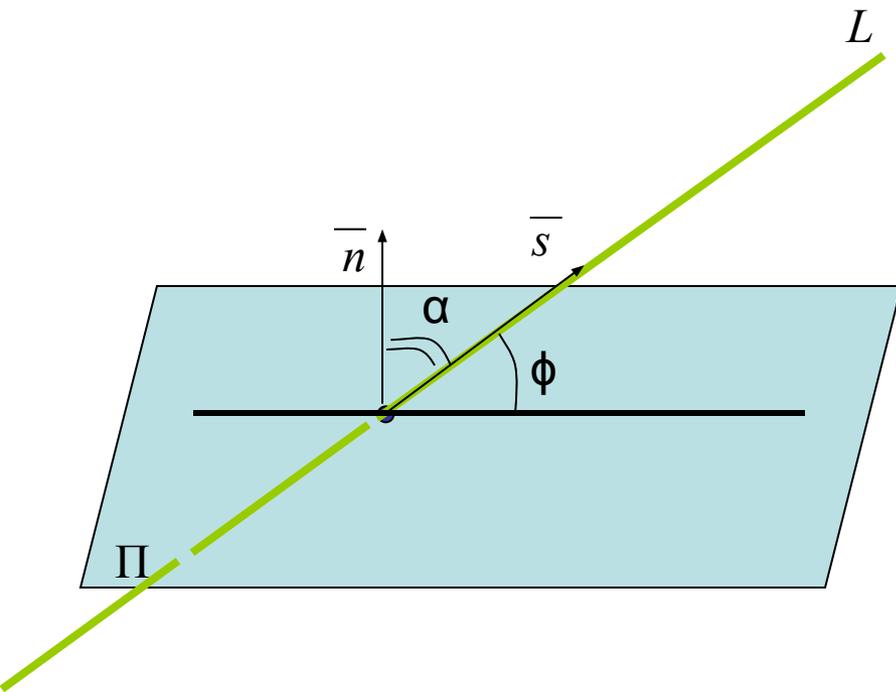
15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

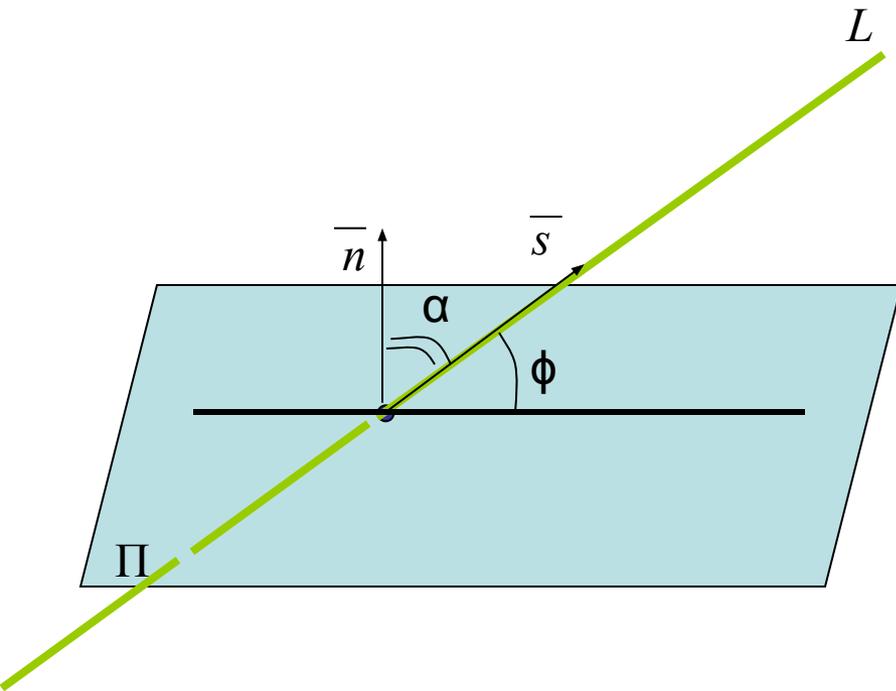
15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

15. Угол между прямой и плоскостью

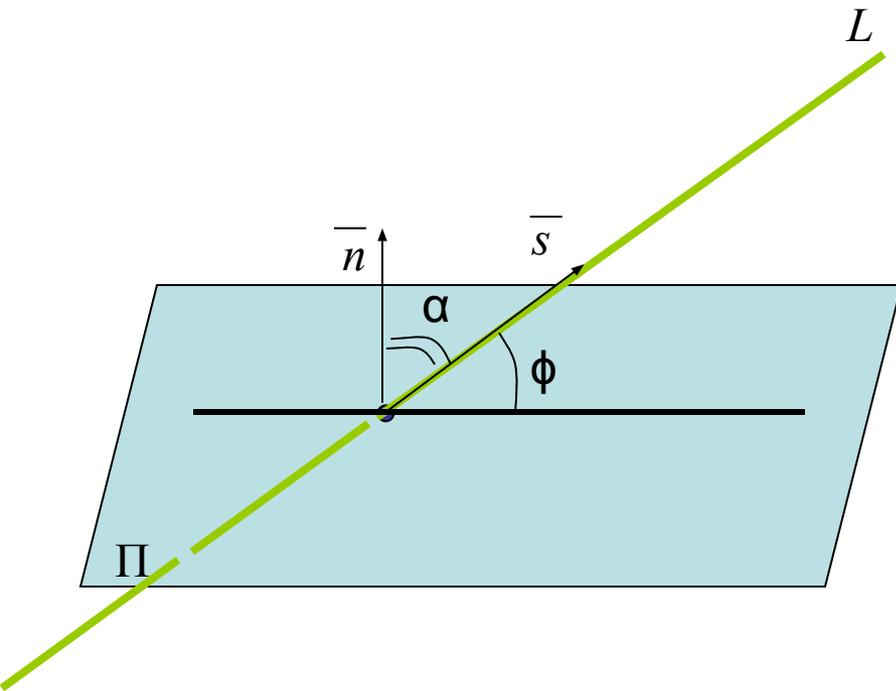


$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{n}, \bar{s})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}$$

15. Угол между прямой и плоскостью



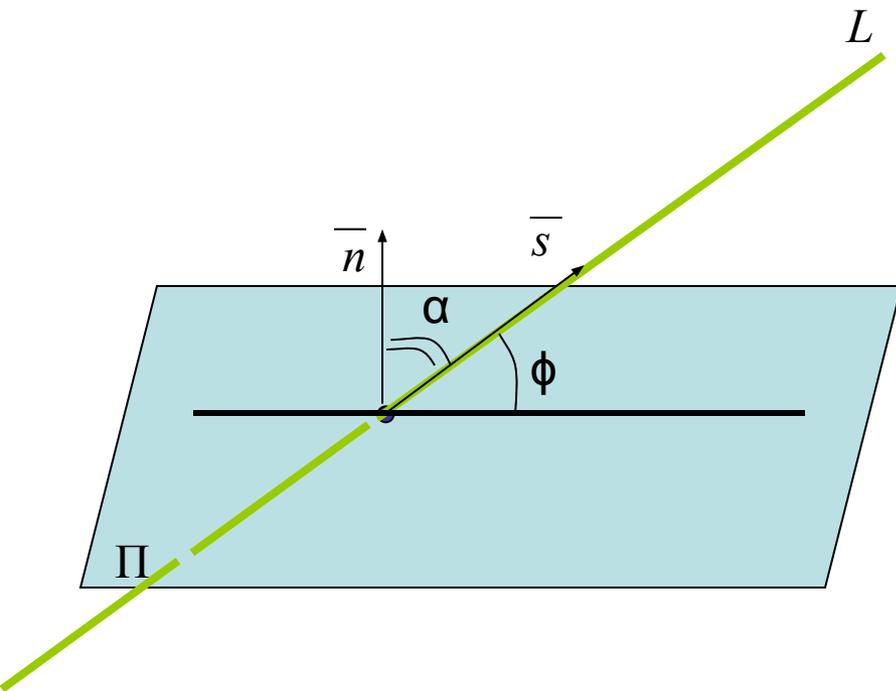
$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{n}, \bar{s})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}$$

$$\cos \alpha = \sin \varphi$$

15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

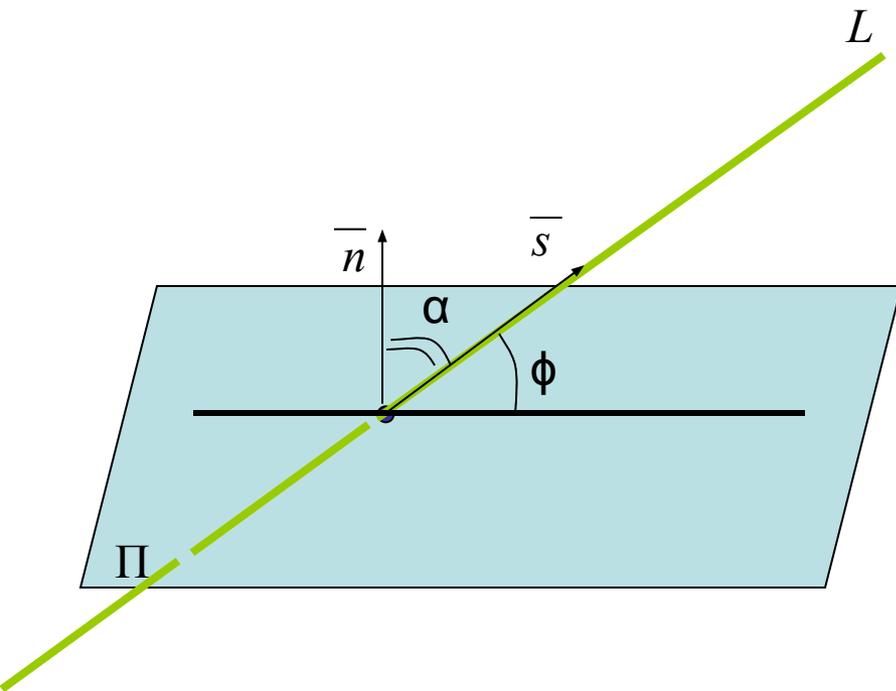
$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{n}, \bar{s})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}$$

$$\cos \alpha = \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

15. Угол между прямой и плоскостью



$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{n}, \bar{s})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}$$

$$\cos \alpha = \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$