Линии второго порядка, заданные каноническими уравнениями.

Взять в библиотеке методичку:

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА:

АДАПТИВНО-МОДУЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

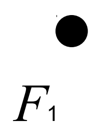
Методические рекомендации

для самостоятельной работы студентов

1. Эллипс и его каноническое уравнение.

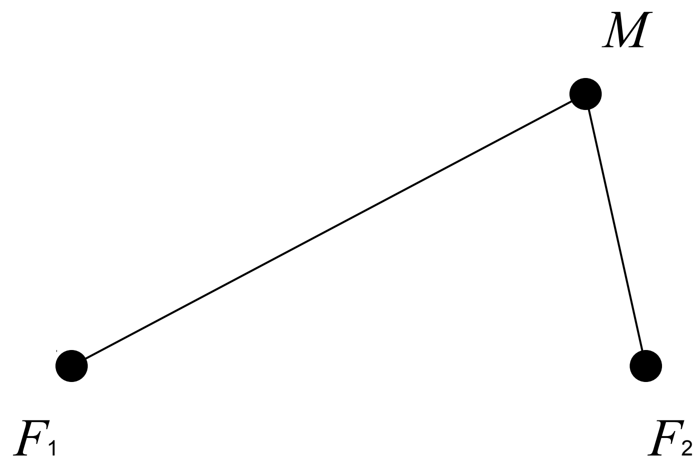
1. Эллипс и его каноническое уравнение.

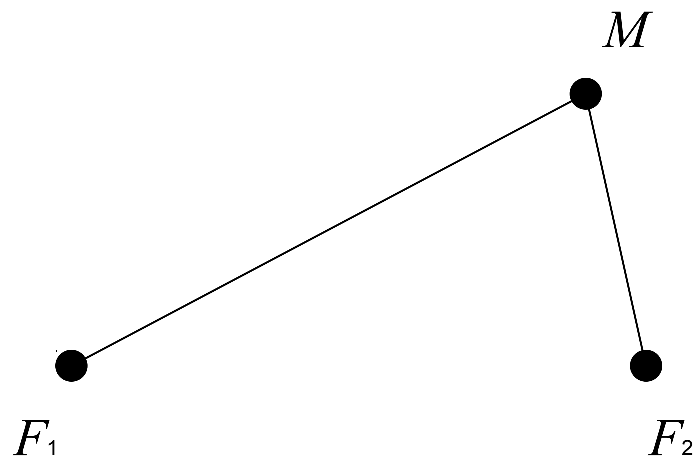
- ***Эллипсом*** называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$ и большая, чем расстояние между фокусами, равное $2c$.


F_1

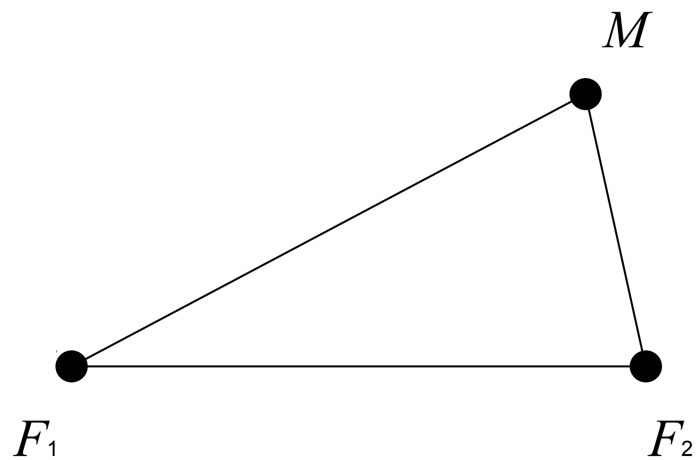

F_1
F_2

M
F1
F2


M
F1
F2

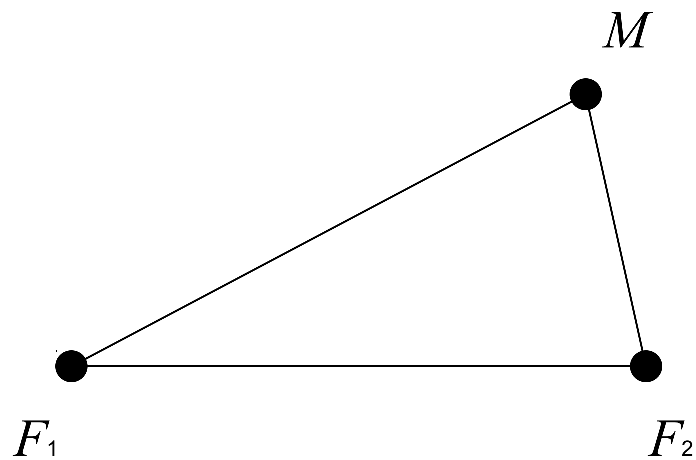


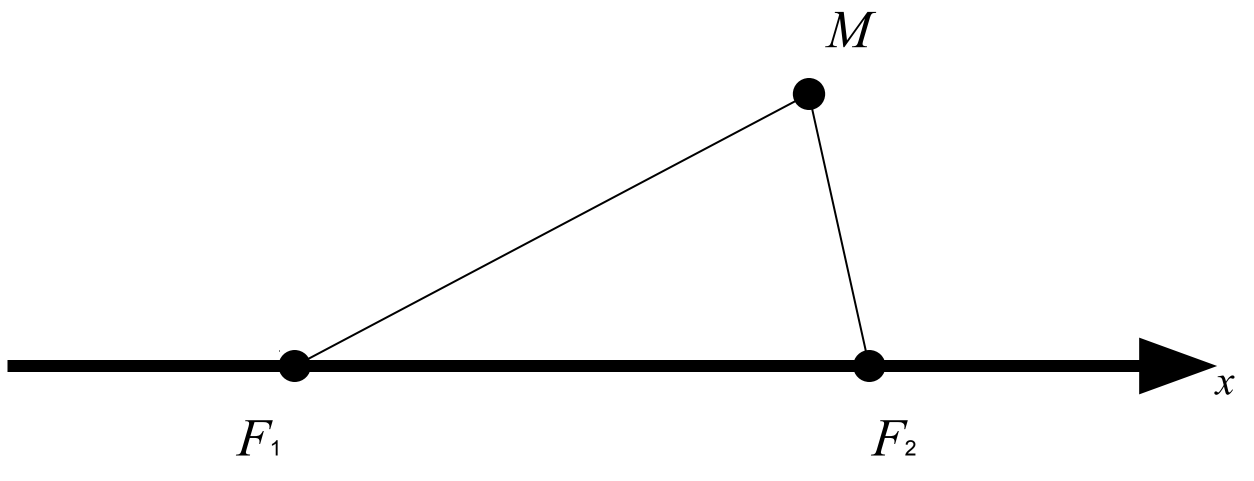
По определению $|F_1M| + |F_2M| = 2a > 2c$



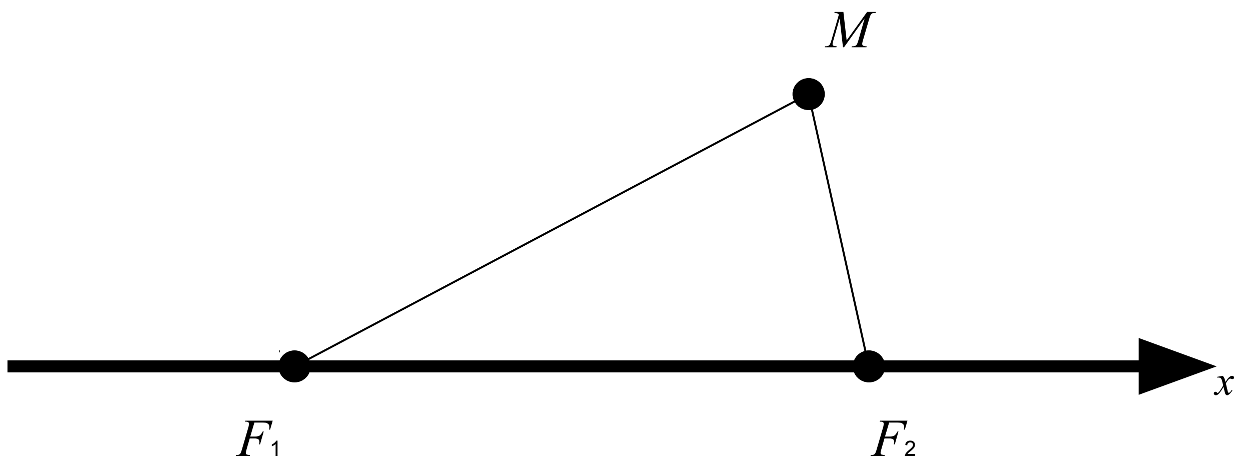
По определению $|F_1M| + |F_2M| = 2a > 2c$

$|F_1F_2| = 2c$

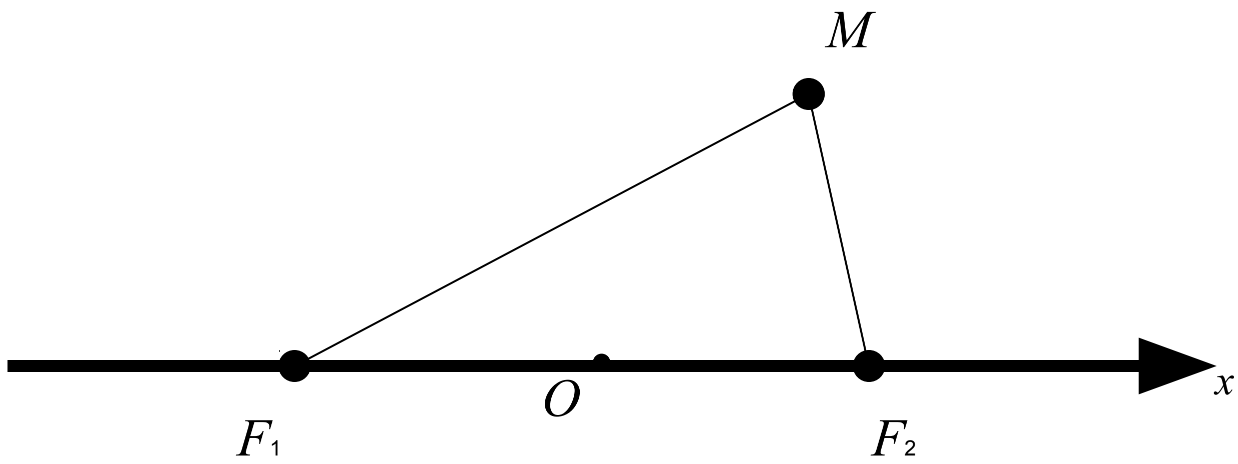

M
F1
F2



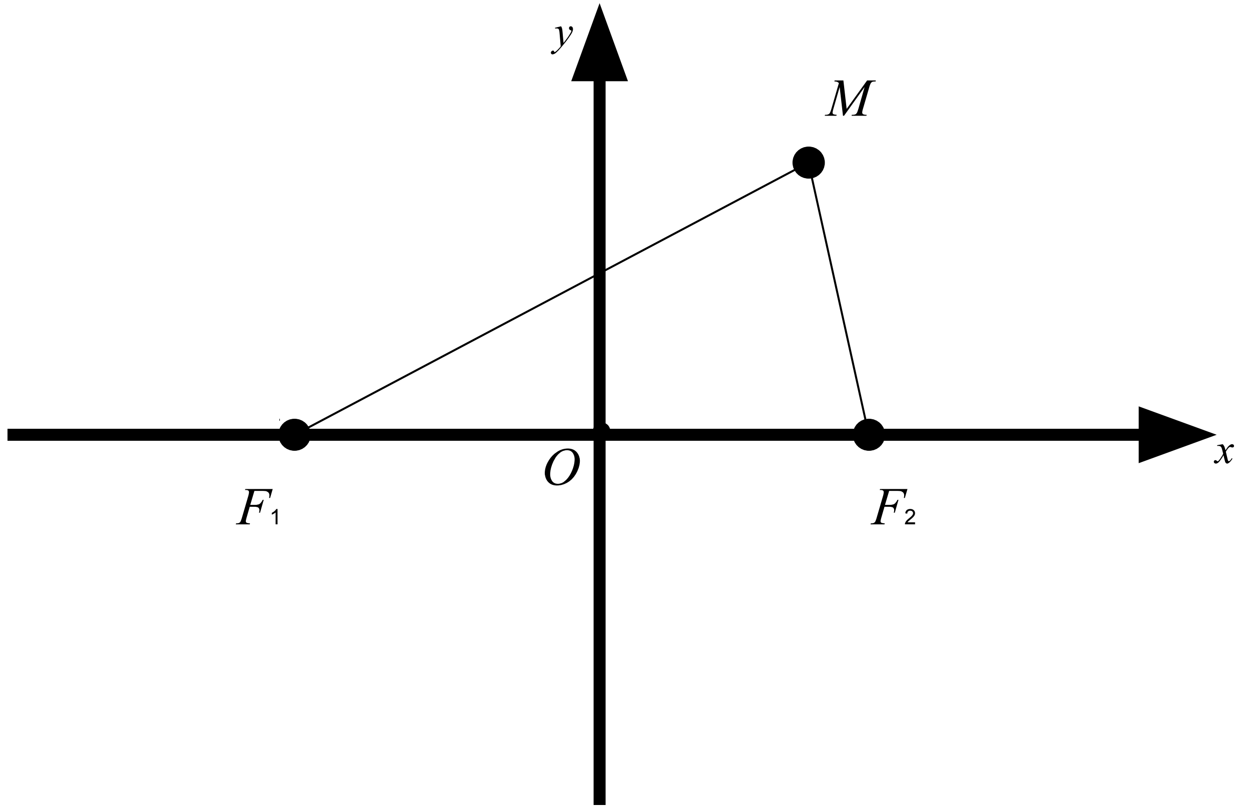
M
F1
F2
x



M
F1
F2
x



M
O
x
F_1
F_2



y
M
x
O
F_1
F_2

Так как $|\boldsymbol{F_1 F_2}| = \mathbf{2}\boldsymbol{c}$, Так как $|\boldsymbol{F_1 F_2}| = \mathbf{2}\boldsymbol{c}$,

значит в выбранной системе координат фокусы имеют координаты

Так как $|F_1 F_2| = 2c$,

значит в выбранной системе координат фокусы имеют координаты

$$F_1(-c; 0),\ F_2(c; 0)$$

Так как $|F_1 F_2| = 2c$,

значит в выбранной системе координат фокусы имеют координаты

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

произвольная точка $M(x,y)$, тогда

Так как $|F_1 F_2| = 2c$,

значит в выбранной системе координат фокусы имеют координаты

$F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$

произвольная точка $M(x,y)$, тогда

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

По определению $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ (1)

тогда

По определению $|\boldsymbol{F_1 M}| + |\boldsymbol{F_2 M}| = \boldsymbol{2a}$ **(1)**

тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

По определению $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ **(1)**

тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

преобразуем это выражение

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

По определению $|F_1M| + |F_2 M| = 2a$ **(1)**

тогда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

преобразуем это выражение

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

возведем в квадрат обе части равенства

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

По определению $|\boldsymbol{F_1 M}| + |\boldsymbol{F_2 M}| = 2\boldsymbol{a}$ **(1)**

Получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

преобразуем это выражение

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

возведем в квадрат обе части равенства

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

раскроем скобки

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

приведем подобные

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

приведем подобные

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

разделим на -4

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

приведем подобные

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

разделим на -4

$$-xc + a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

приведем подобные

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

разделим на -4

$$-xc + a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

возведем в квадрат обе части равенства

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

приведем подобные

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

разделим на -4

$$-xc+a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

возведем в квадрат обе части равенства

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2((x-c)^2+y^2)$$

раскроем скобки

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

приведем подобные

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

разделим на -4

$$-xc+a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

возведем в квадрат обе части равенства

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2((x-c)^2+y^2)$$

раскроем скобки

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

приведём подобные и сгруппируем

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2);$$

в полученном выражении обозначим

$a^2-c^2=b^2$ (тта как $a>c$ по определению)

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2);$$

в полученном выражении обозначим

$a^2-c^2=b^2$ (тта как $a>c$ по определению)

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

умножим обе части на $\dfrac{1}{a^2b^2}$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2);$$

в полученном выражении обозначим

$a^2-c^2=b^2$ (тта как $a>c$ по определению)

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

умножим обе части на $\dfrac{1}{a^2b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

Таким образом, мы доказали, что координаты любой точки *M (x; y)* эллипса удовлетворяют уравнению (2).

Таким образом, мы доказали, что координаты любой точки *M (x; y)* эллипса удовлетворяют уравнению (2). Однако это уравнение пока нельзя назвать уравнением эллипса, т.к. не доказано обратное предположение:

Если числа x и y удовлетворяют уравнению (2), то точка $M(x; y)$ удовлетворяет соотношению (1), т.е. лежит на эллипсе.

Если числа x и y удовлетворяют уравнению (2), то точка $M\ (x;\ y)$ удовлетворяет соотношению (1), т.е. лежит на эллипсе.

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Докажем это утверждение

Докажем это утверждение

- Пусть точка *M (x; y)* удовлетворяет уравнению (2), тогда выразим :

$$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \quad \text{и подставим}$$

Докажем это утверждение

- Пусть точка *M (x; y)* удовлетворяет уравнению (2), тогда выразим :

$$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$$ и подставим

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} =$$

Докажем это утверждение

- Пусть точка *M (x; y)* удовлетворяет уравнению (2), тогда выразим :

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$ и подставим

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$=$$

Докажем это утверждение

- Пусть точка *M (x; y)* удовлетворяет уравнению (2), тогда выразим :

$$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \quad \text{и подставим}$$

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

Докажем это утверждение

- Пусть точка *M (x; y)* удовлетворяет уравнению (2), тогда выразим :

$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$ и подставим

$$\left|MF_1\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{x^2(a^2 - b^2)}{a^2} + 2xc + c^2 + b^2} =$$

так как $a^2 - c^2 = b^2$, значит

$$a^2 - b^2 = c^2$$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

так как $a^2 - c^2 = b^2$, значит $\begin{matrix} a^2 - b^2 = c^2 \\ c^2 + b^2 = a^2 \end{matrix}$ после замены получим

$$= \sqrt{\frac{x^2 c^2}{a^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{xc}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{xc}{a}\right|;$$

так как $a^2 - c^2 = b^2$, значит $\begin{matrix} a^2 - b^2 = c^2 \\ c^2 + b^2 = a^2 \end{matrix}$ после замены получим

$$= \sqrt{\frac{x^2c^2}{a^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{xc}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{xc}{a}\right|;$$

аналогично $|MF_2| =$

так как $a^2 - c^2 = b^2$, значит $\begin{matrix} a^2 - b^2 = c^2 \\ c^2 + b^2 = a^2 \end{matrix}$ после замены получим

$$= \sqrt{\frac{x^2 c^2}{a^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{xc}{a}\right)^2} = \left|a + \frac{xc}{a}\right|;$$

аналогично $\left|MF_2\right| = \left|a - \frac{xc}{a}\right|;$

из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ следует, что

$|x| \le a$, а т как $0 < c < a$, т

из уравнен я

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ следует, что

$|x|\le a,$ а т как $0<c<a,$ т

$$a+\frac{cx}{a}>0 \quad \text{и} \quad a-\frac{cx}{a}>0$$

из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ следует, что

$|x|\le a,$ а т как $0<c<a,$ т

$$a+\frac{cx}{a}>0 \quad \text{и} \quad a-\frac{cx}{a}>0$$

Значит

$$|F_1M|=a+\frac{cx}{a} \quad \text{и} \quad |F_2M|=a-\frac{cx}{a}$$

следовател ьно $|F_1M|+|F_2M|=2a$

Таким образом, уравнение (2) есть уравнение эллипса, т.к. доказано, что координаты любой точки *M (x; y)* эллипса, т.е. любой точки, для которой выполняется выражение (1) удовлетворяет уравнению (2) и обратно, если два числа *x* и *y* удовлетворяет уравнению (2), то точка *M (x; y)* удовлетворяет соотношению (1), т.е. лежит на эллипсе.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

каноническое уравнение

эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

каноническое уравнение эллипса

2. **Исследование формы эллипса.**

2. **Исследование формы эллипса.**

Так как координаты x и y входят в уравнение в четной степени, то если на эллипсе лежит любая точка $M(x, y)$ (т.е. координаты этой точки удовлетворяют уравнению(2)),

2. **Исследование формы эллипса.**

Так как координаты x и y входят в уравнение в четной степени, то если на эллипсе лежит любая точка $M(x, y)$ (т.е. координаты этой точки удовлетворяют уравнению(2)), то на этом эллипсе будут лежать точки $M_1(-x,y)$ и $M_2(x, -y)$, симметричные с точкой $M(x, y)$ относительно осей Ox и Oy и точка $M_3(-x;-y)$, симметричная относительно начала координат.

2. **Исследование формы эллипса.**

Так как координаты x и y входят в уравнение в четной степени, то если на эллипсе лежит любая точка $M(x, y)$ (т.е. координаты этой точки удовлетворяют уравнению(2)), то на этом эллипсе будут лежать точки $M_1(-x,y)$ и $M_2(x, -y)$, симметричные с точкой $M(x, y)$ относительно осей Ox и Oy и точка $M_3(-x;-y)$, симметричная относительно начала координат.

Следовательно, оси Ох и Оу являются осями симметрии, а начало координат – центром симметрии эллипса.

из уравнения $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Следует, что для координат любой точки имеет место

$$|x| \le a \quad \text{и} \quad |y| \le b$$

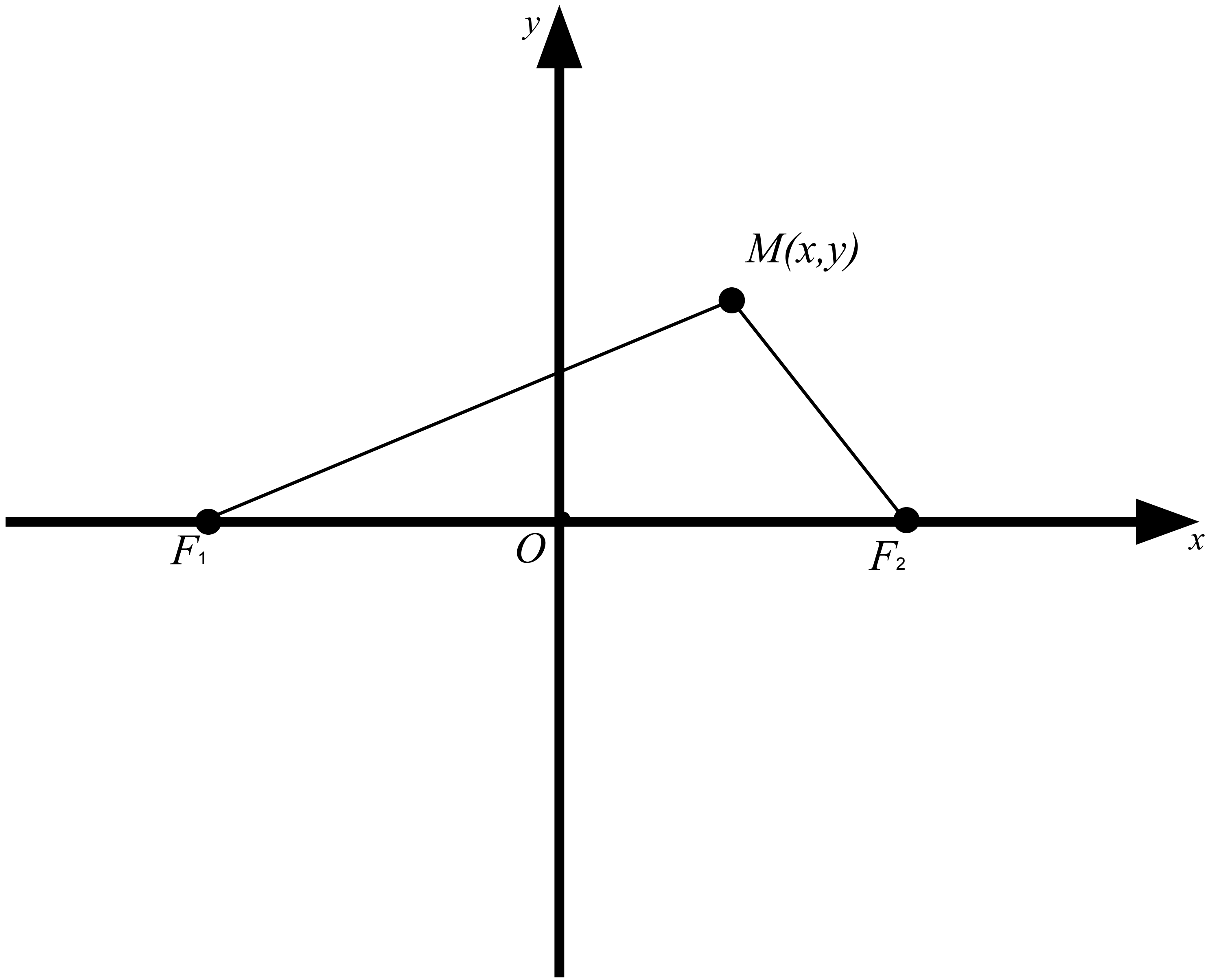
из уравнения $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

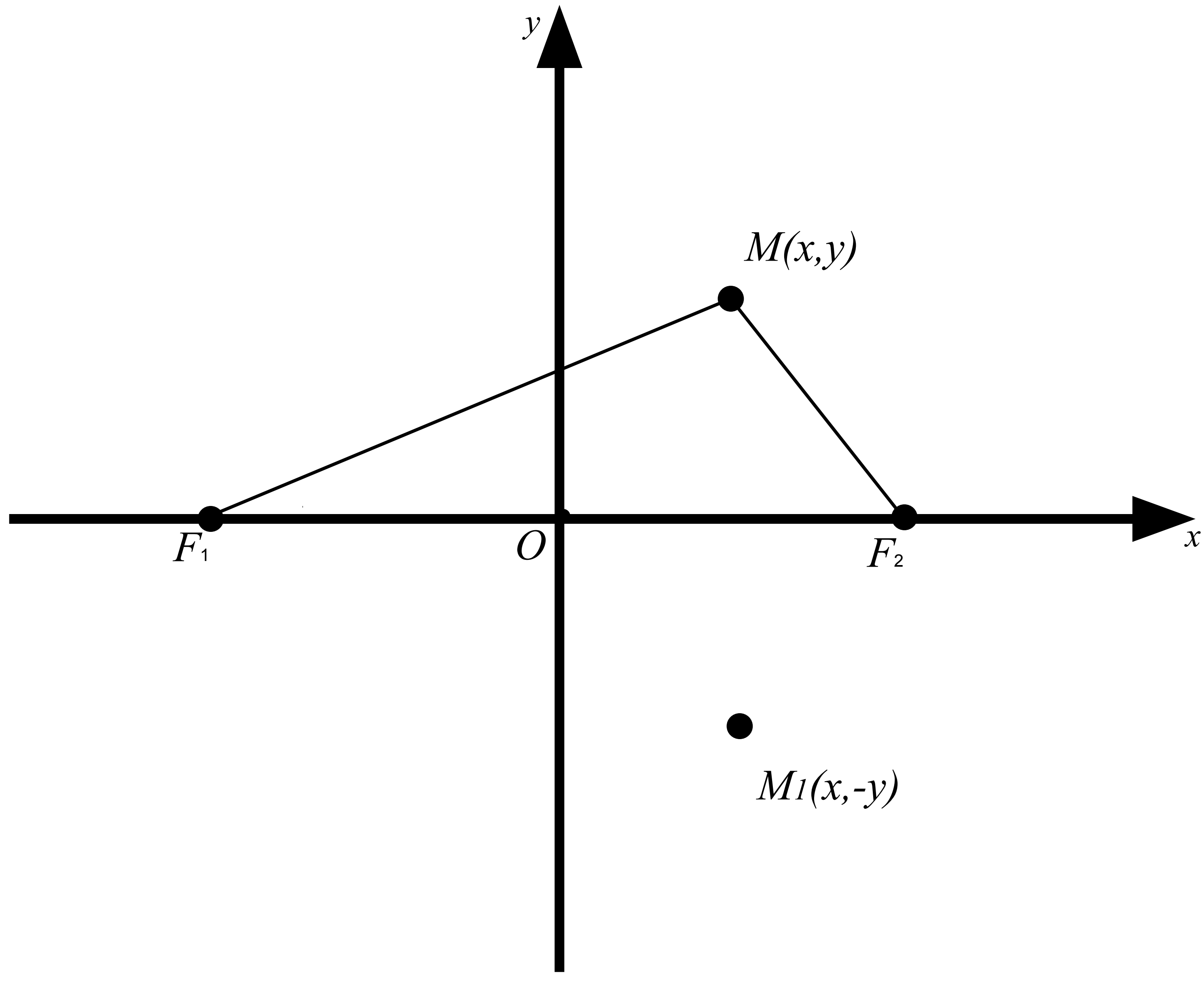
Следует, что для координат любой точки имеет место

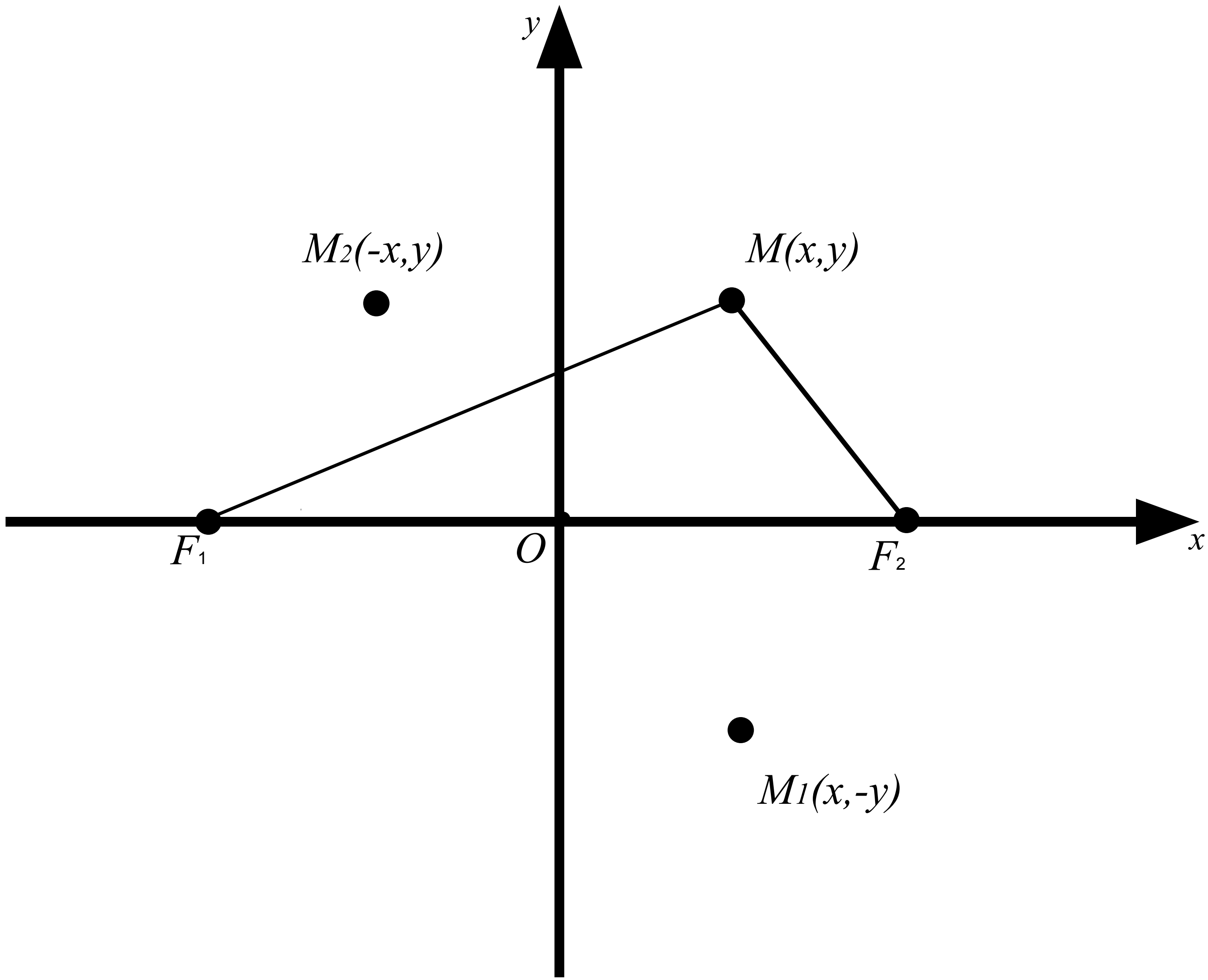
$$|x|\le a \quad \text{и} \quad |y|\le b$$

Геометрически это означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника, сторонами которого являются прямые

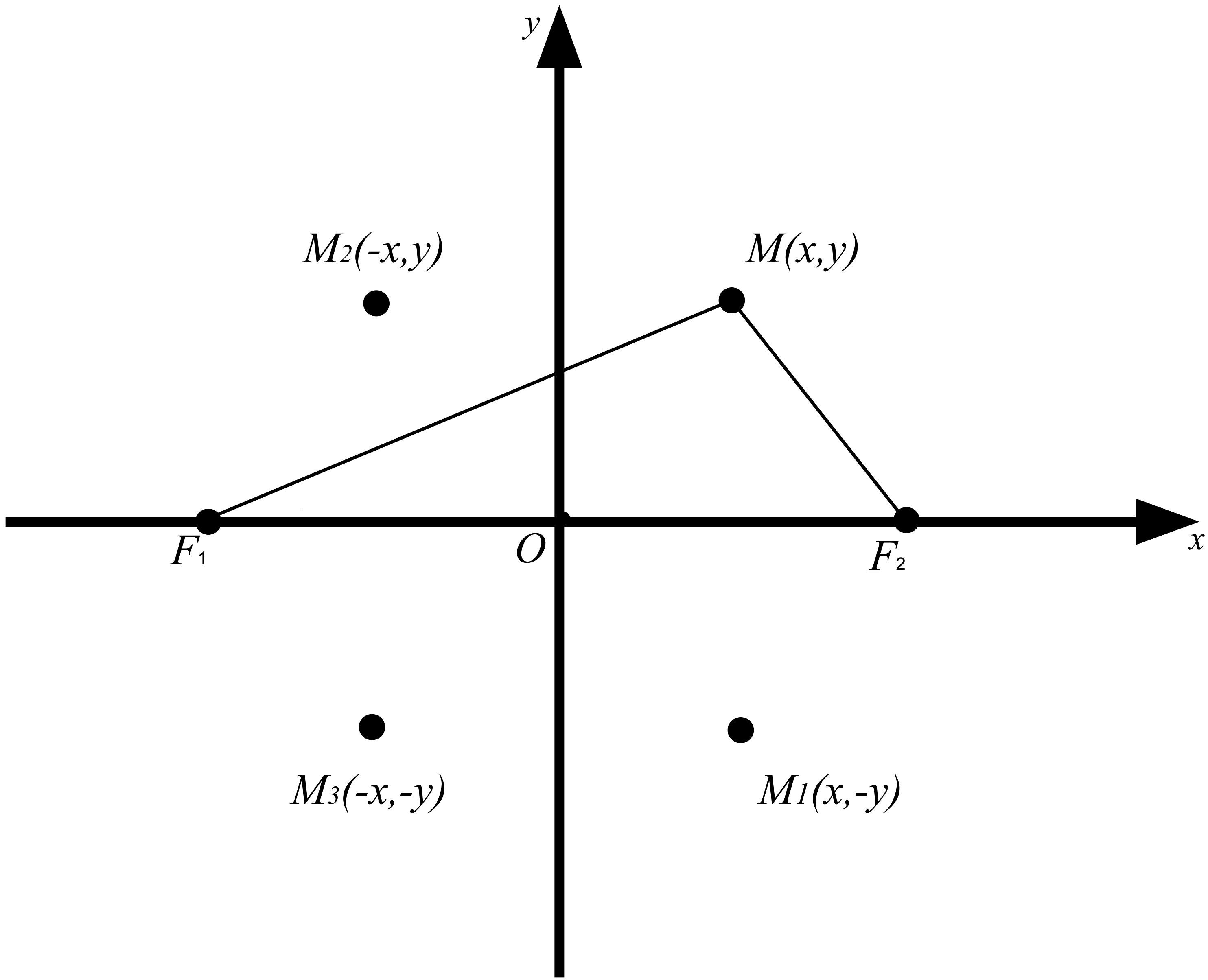
x=a, x=-a, y=b, y=-b


y
M(x,y)
F1
O
F2
x

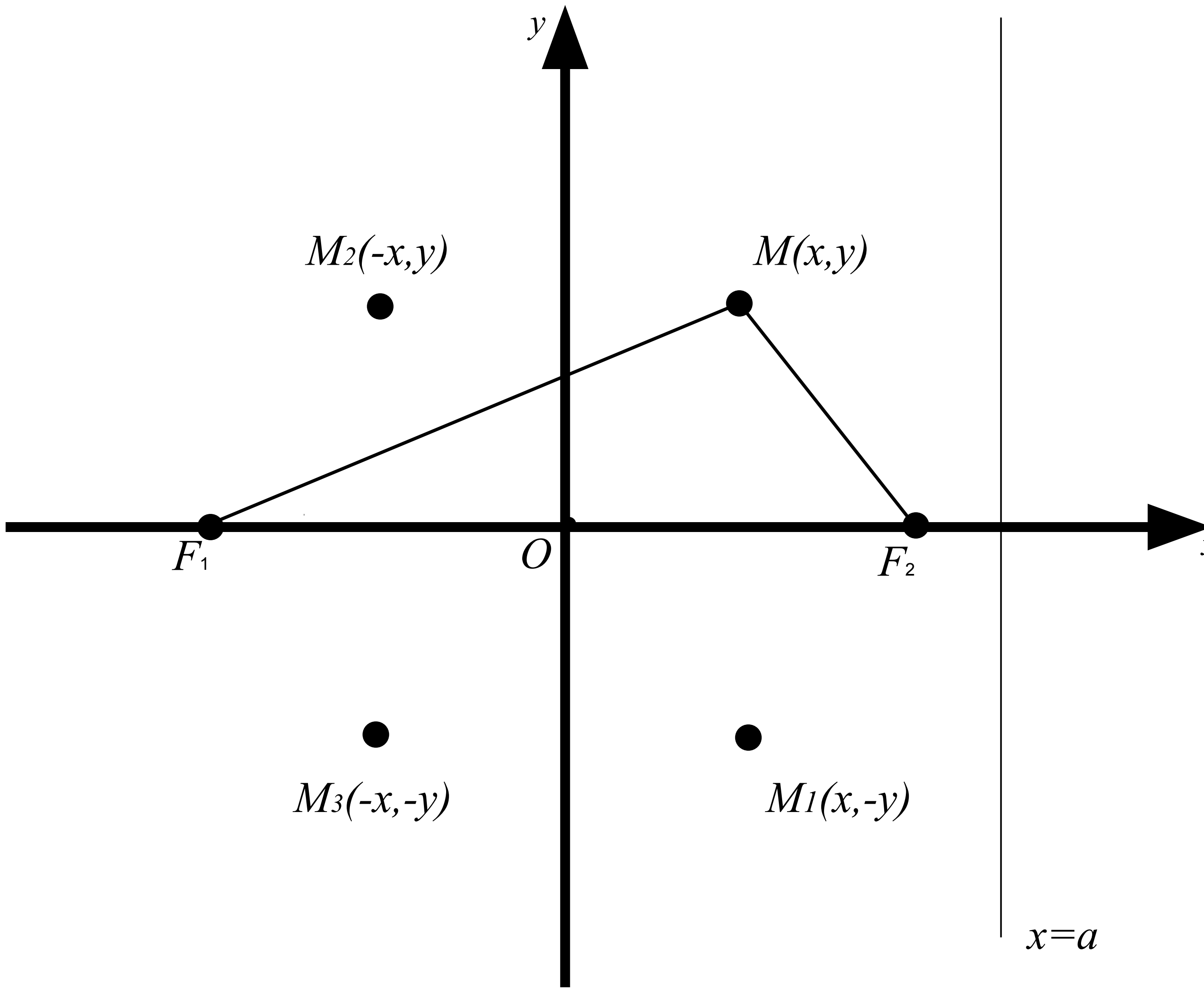

y
M(x,y)
F1
O
F2
x
M1(x,-y)

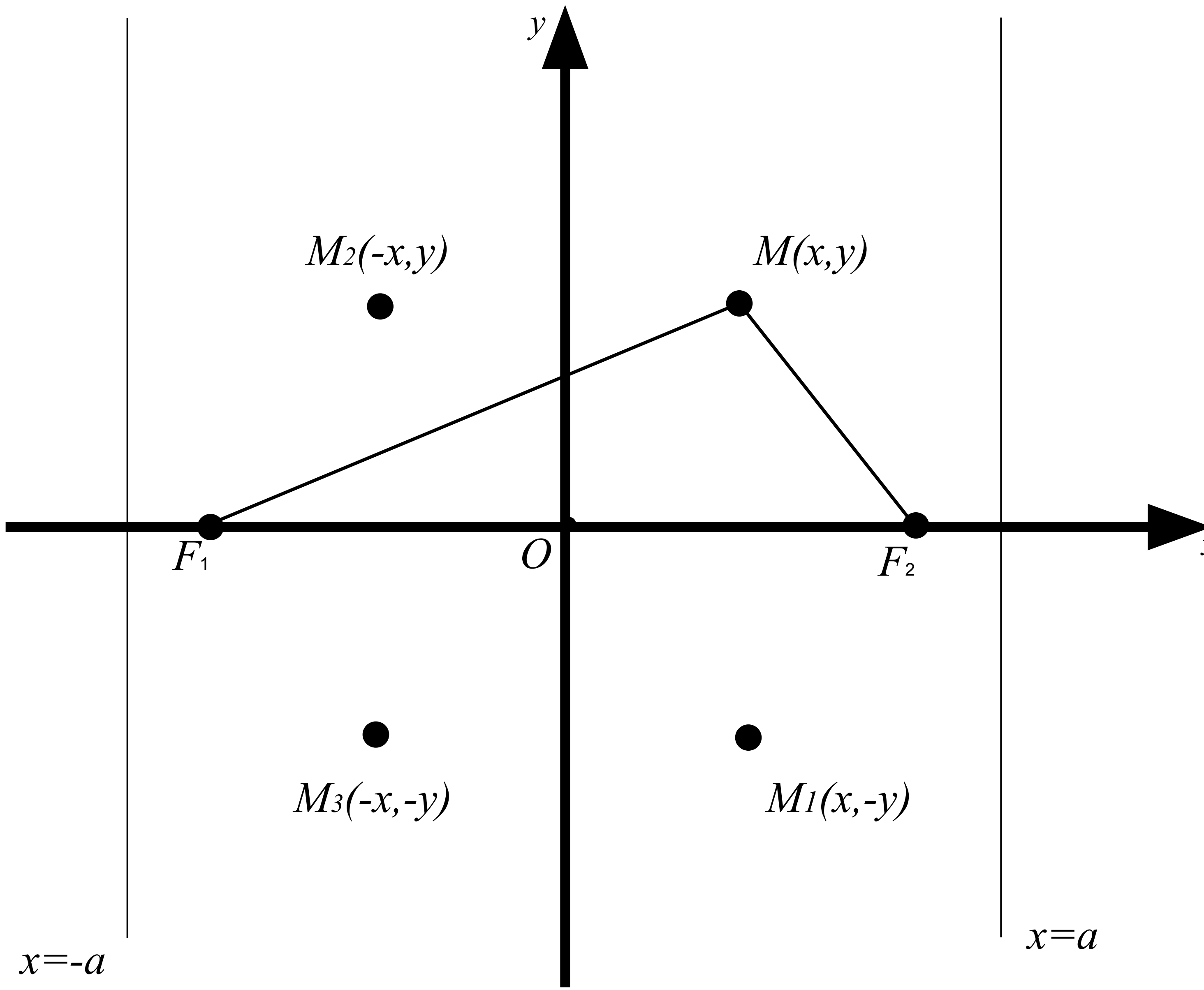


y
M2(-x,y)
M(x,y)
F1
O
F2
x
M1(x,-y)

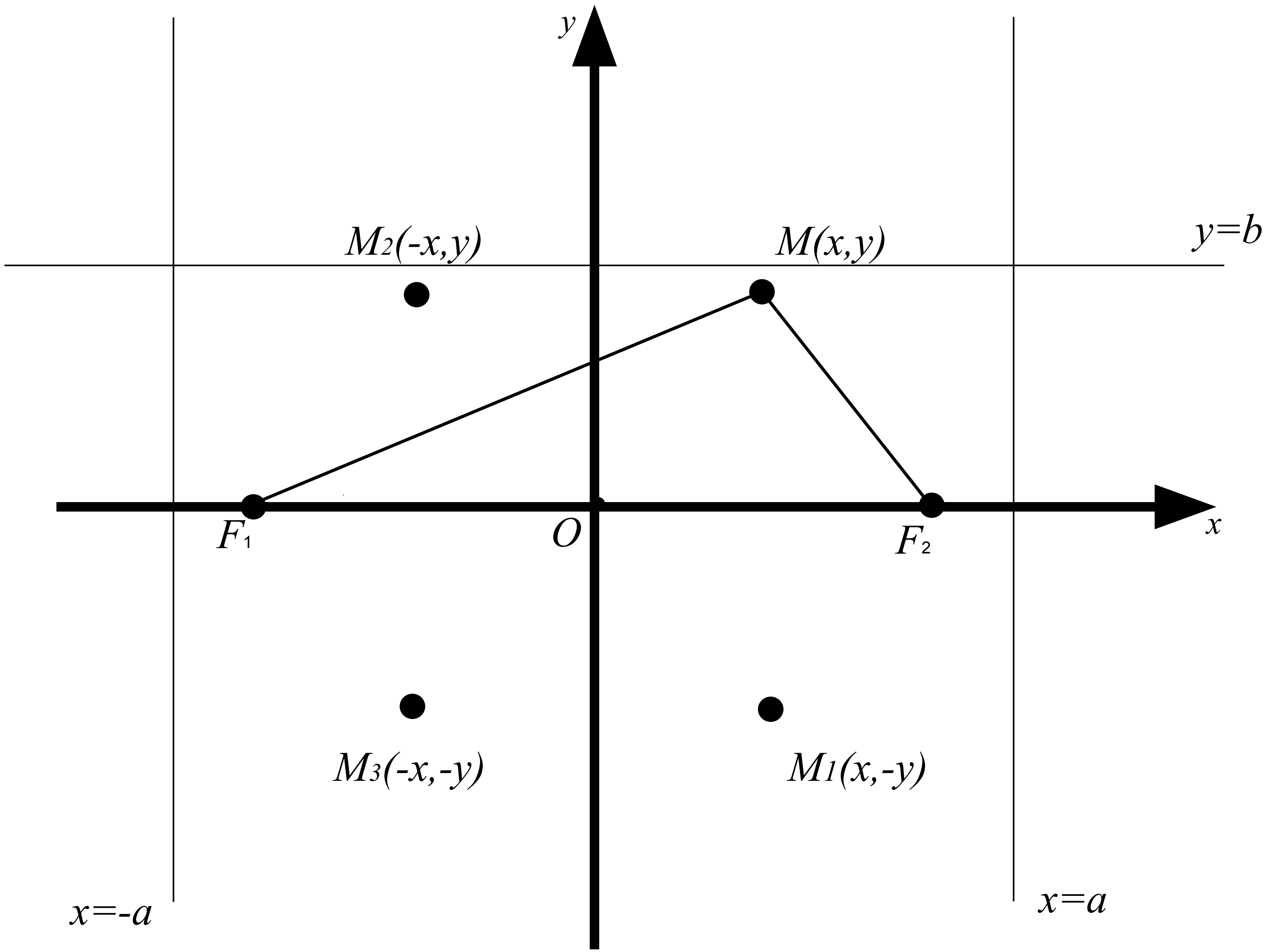


y
M2(-x,y)
M(x,y)
F1
O
F2
x
M3(-x,-y)
M1(x,-y)

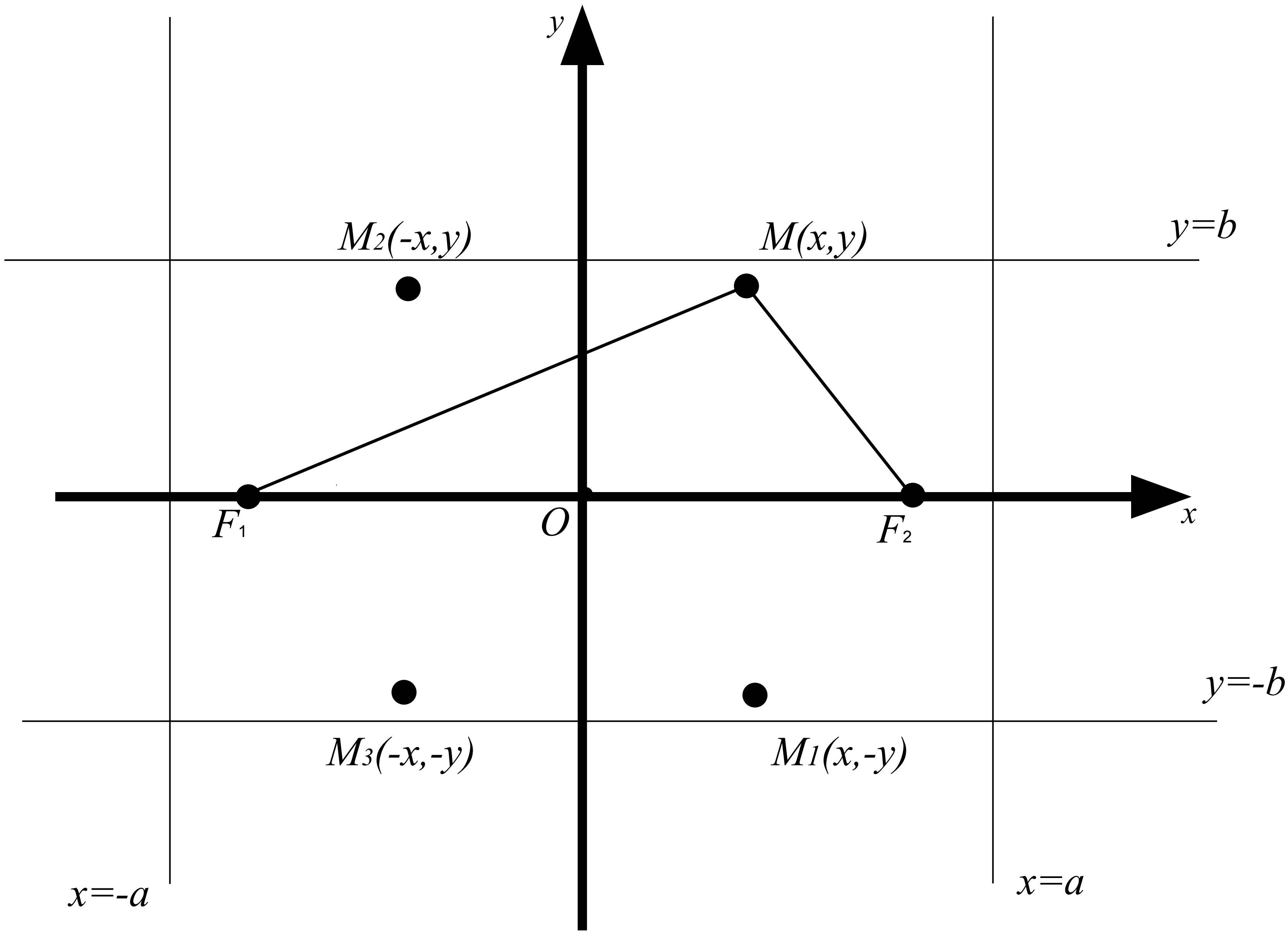

y
M2(-x,y)
M(x,y)
F1
O
F2
x
M3(-x,-y)
M1(x,-y)
x=a

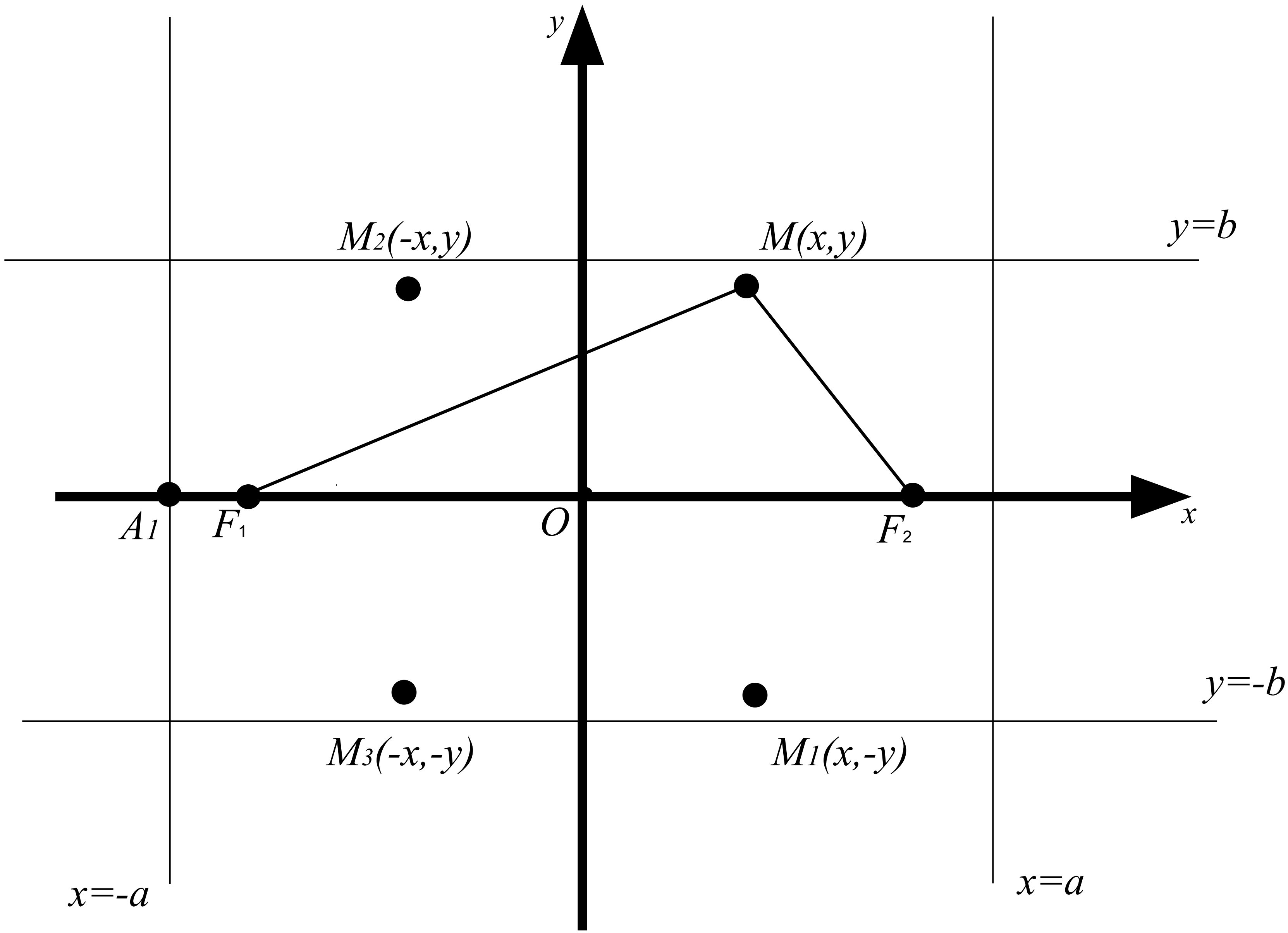


y
x
O
F_1
F_2
$M(x,y)$
$M_2(-x,y)$
$M_3(-x,-y)$
$M_1(x,-y)$
$x=-a$
$x=a$

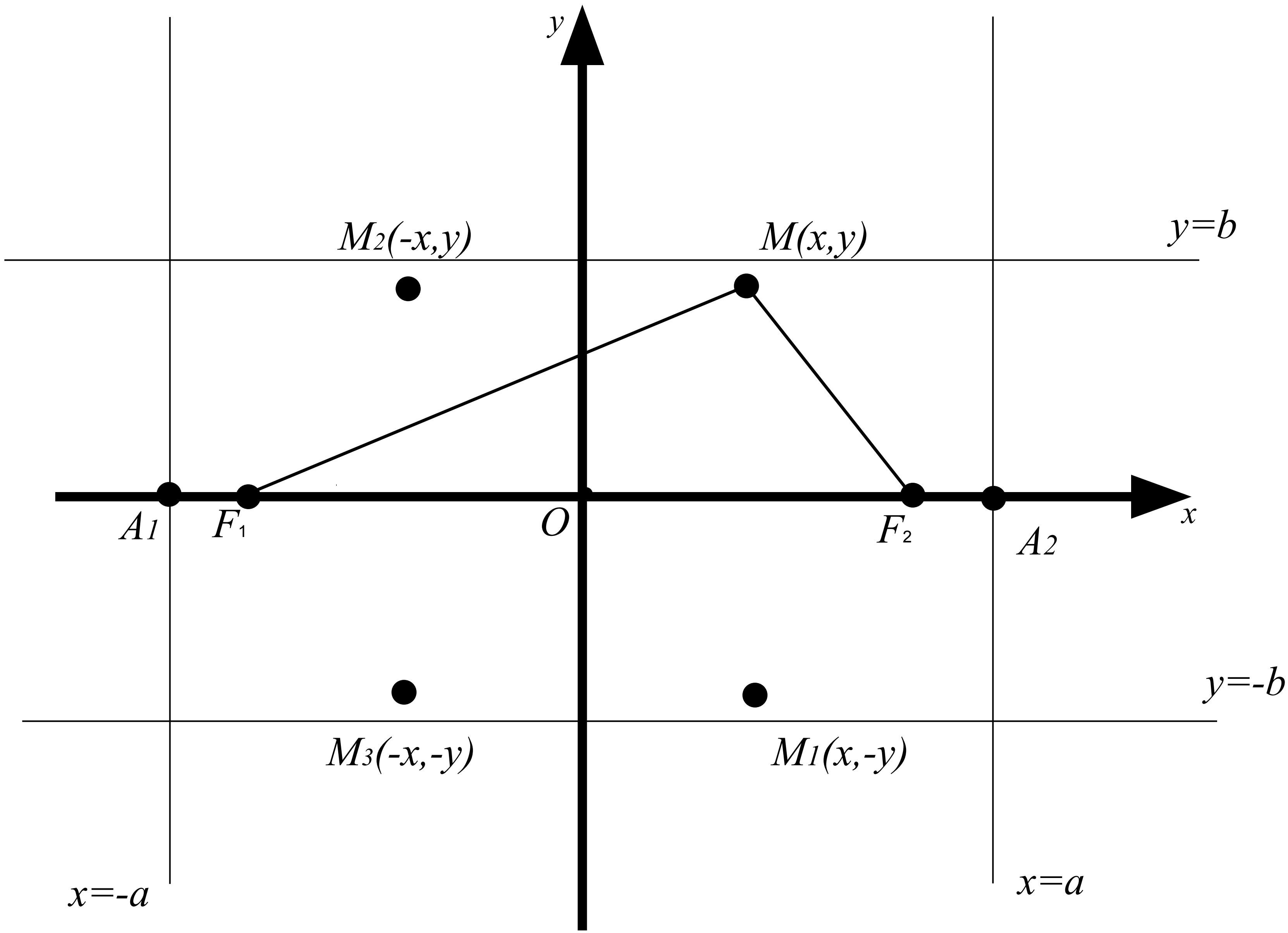


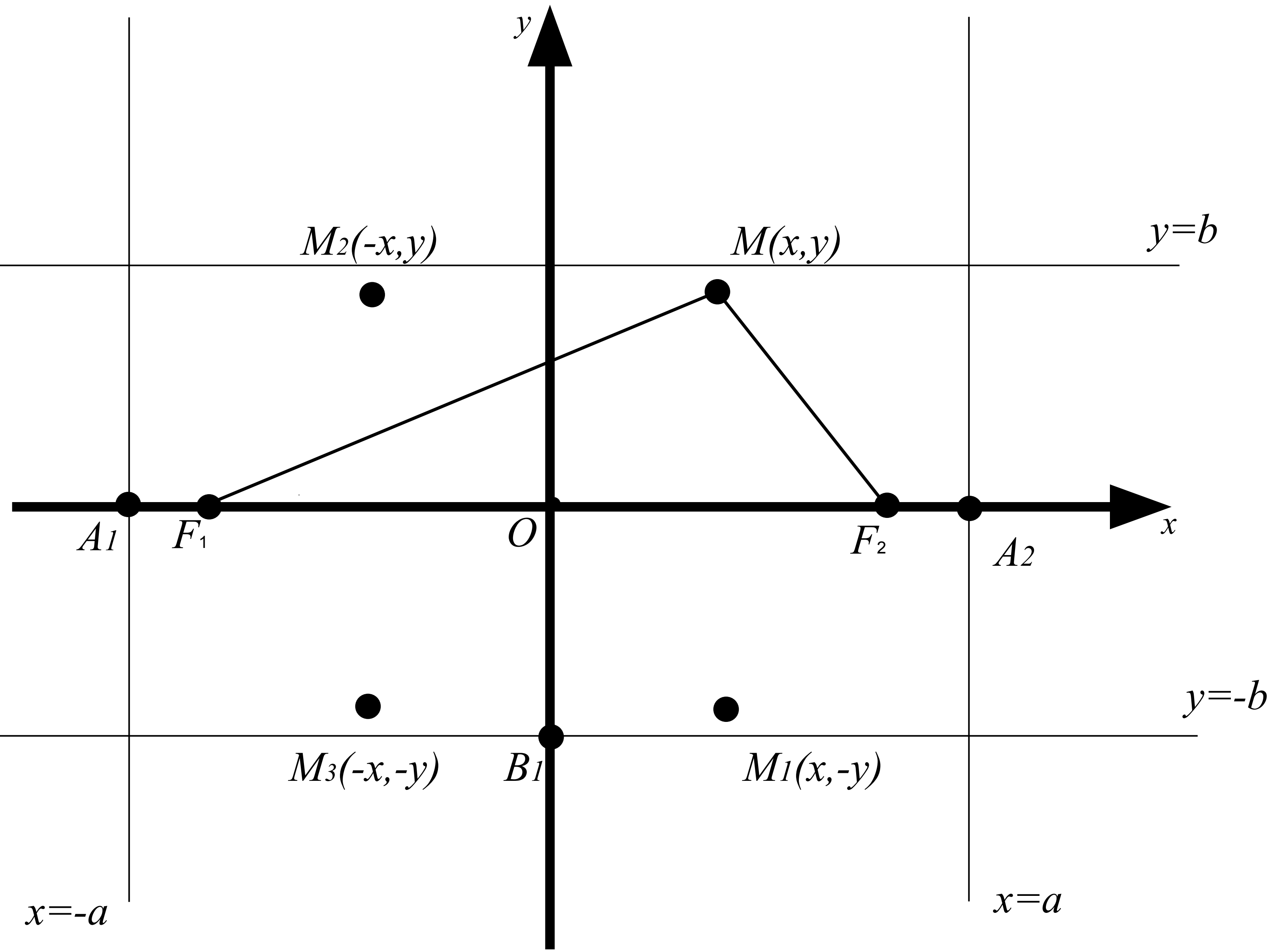
y
x
O
F_1
F_2
$M(x,y)$
$M_2(-x,y)$
$M_3(-x,-y)$
$M_1(x,-y)$
$y=b$
$x=-a$
$x=a$

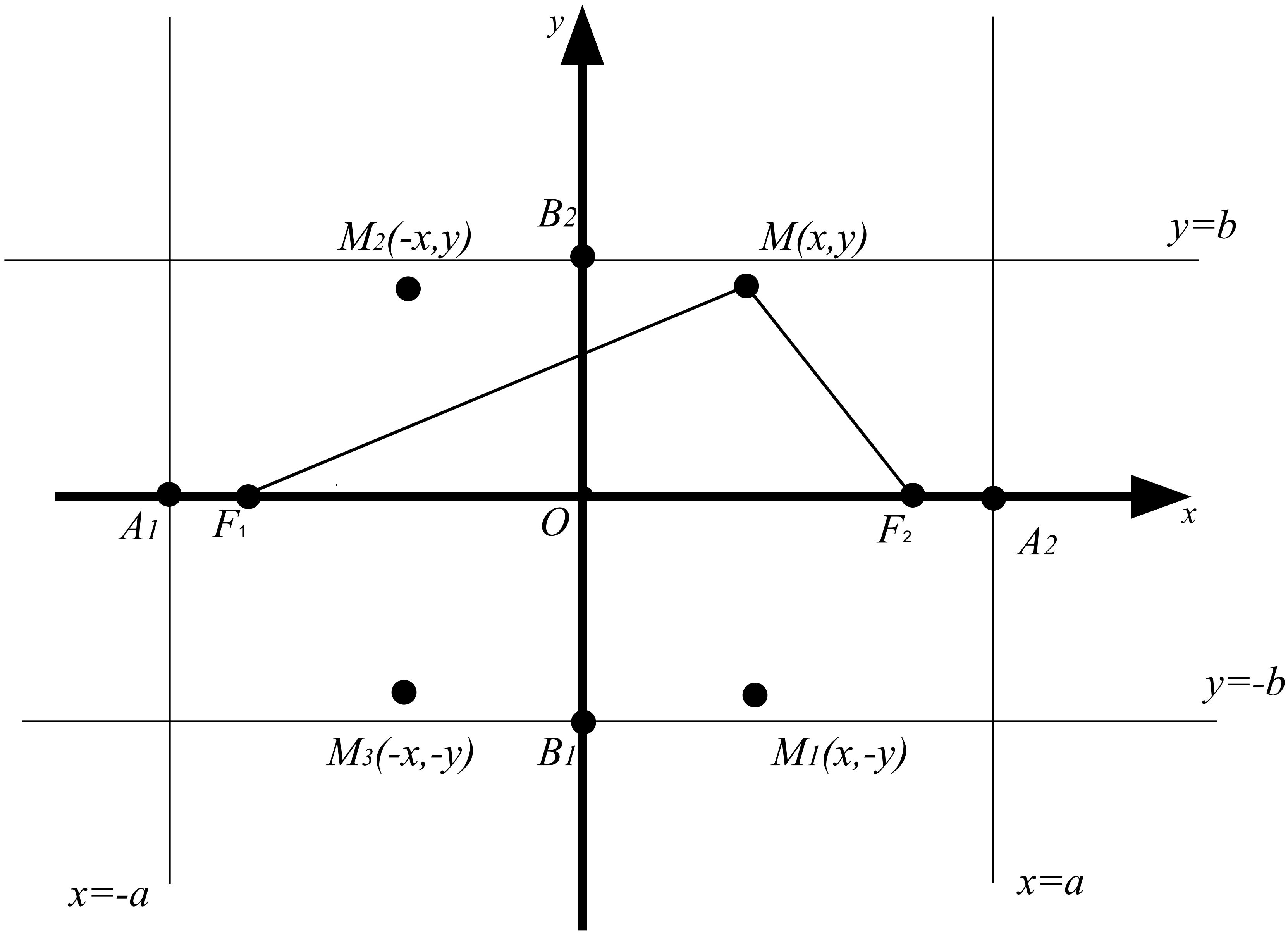

y
x
O
F_1
F_2
$M(x,y)$
$M_2(-x,y)$
$M_3(-x,-y)$
$M_1(x,-y)$
$y=b$
$y=-b$
$x=-a$
$x=a$



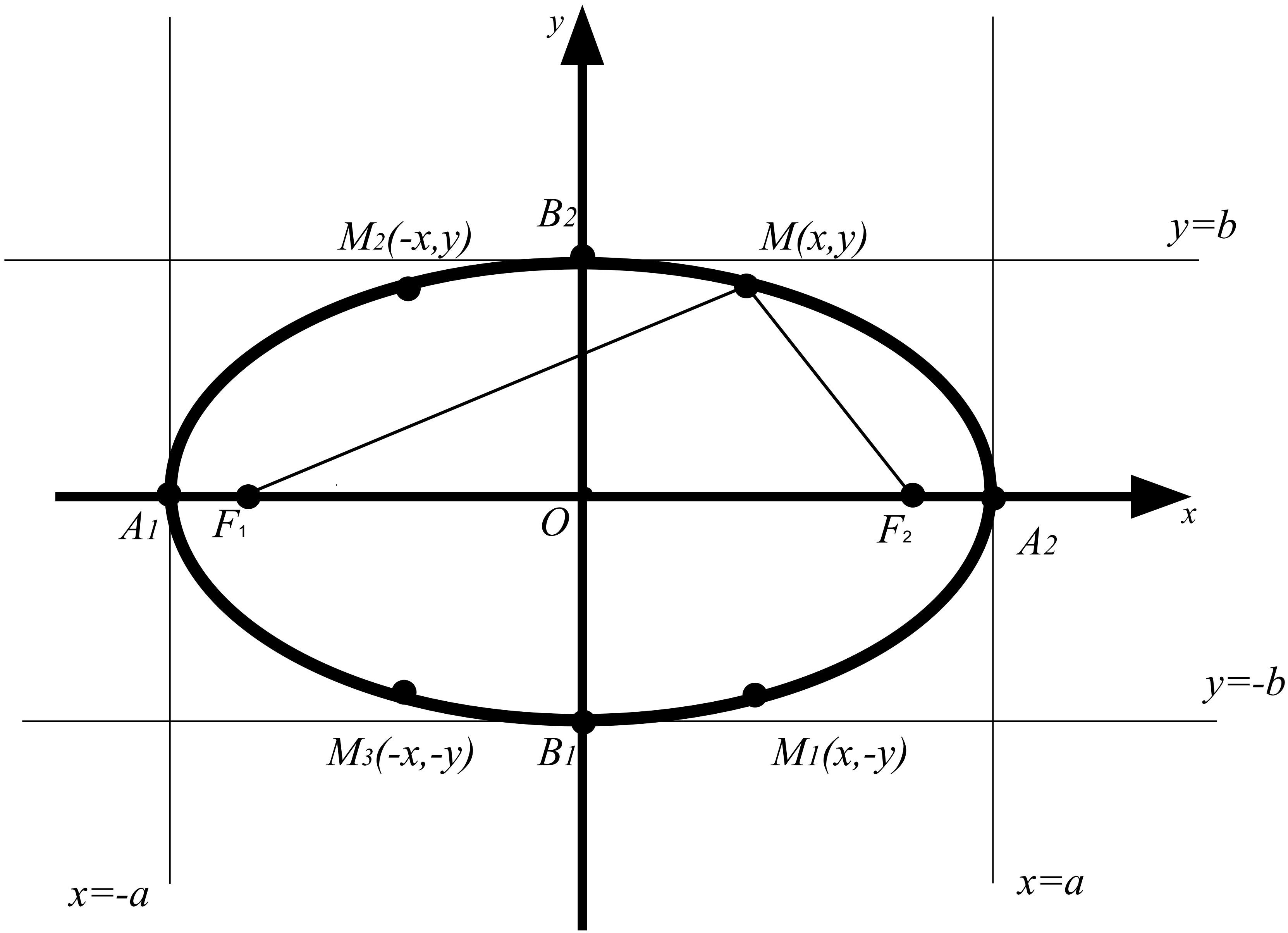
y
x
O
A1
F1
F2
M(x,y)
M2(-x,y)
M3(-x,-y)
M1(x,-y)
y=b
y=-b
x=-a
x=a


y
x
y=b
y=-b
x=-a
x=a
M₂(-x,y)
M(x,y)
M₃(-x,-y)
M₁(x,-y)
A₁
F₁
O
F₂
A₂

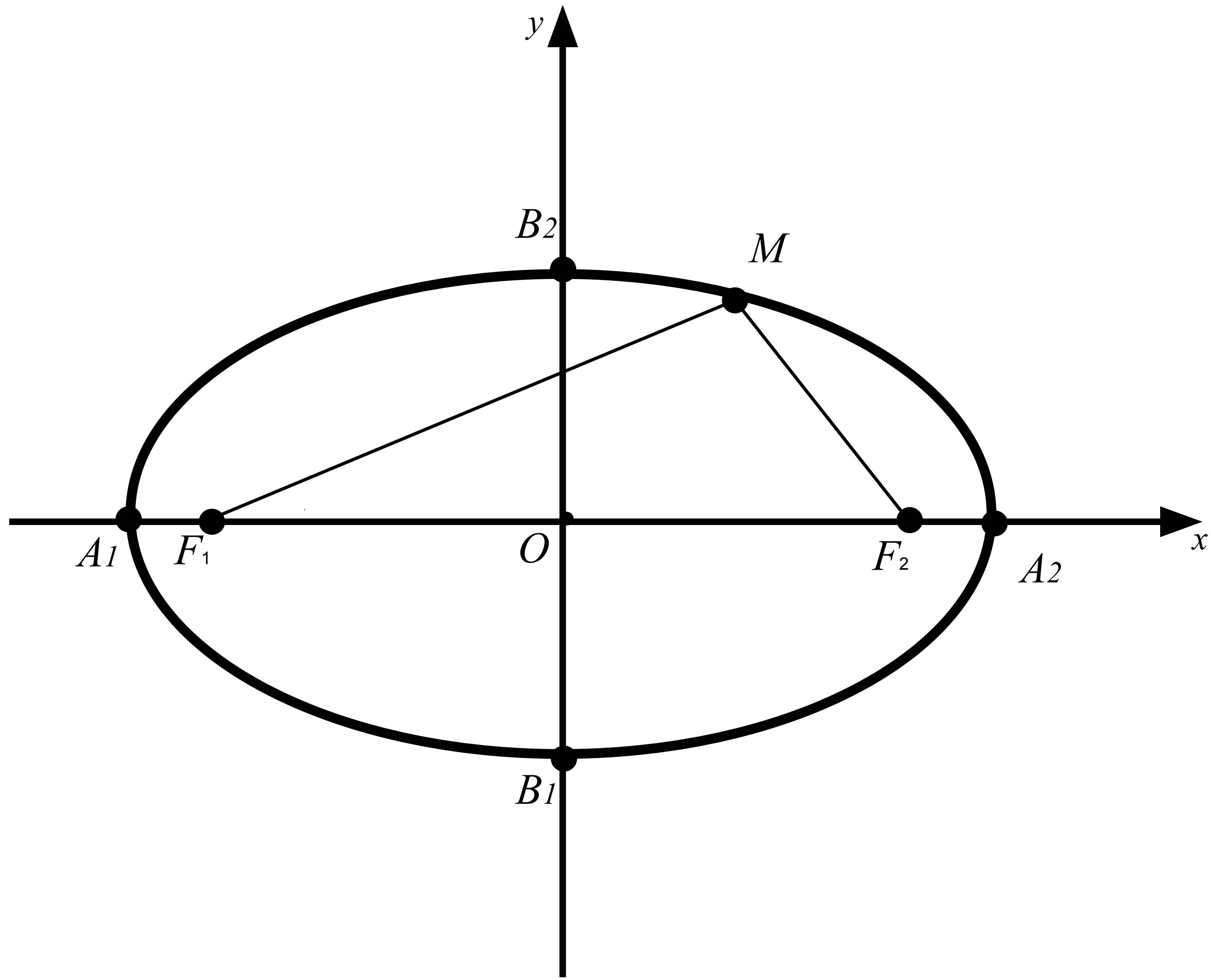

y
x
y=b
y=-b
x=-a
x=a
M2(-x,y)
M(x,y)
M3(-x,-y)
M1(x,-y)
A1
F1
O
F2
A2
B1



y
B2
M2(-x,y)
M(x,y)
y=b
A1
F1
O
F2
A2
x
y=-b
M3(-x,-y)
B1
M1(x,-y)
x=-a
x=a



y
B2
M2(-x,y)
M(x,y)
y=b
A1
F1
O
F2
A2
x
y=-b
M3(-x,-y)
B1
M1(x,-y)
x=-a
x=a


y
B2
M
A1
F1
O
F2
x
A2
B1

Точки пересечения эллипса с осями координат называются ***вершинами*** эллипса $(\pm a;0)$ и $(0;\pm b)$

Точки пересечения эллипса с осями координат называются ***вершинами*** эллипса $(\pm a;0)$ и $(0;\pm b)$

Полуосью эллипса называется отрезок, одним концом которого является центр симметрии эллипса, а другим одна из его вершин.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются ***вершинами*** эллипса $(\pm a;0)$ è $(0;\pm b)$

Полуосью эллипса называется отрезок, одним концом которого является центр симметрии эллипса, а другим одна из его вершин.

Будем предполагать, что в каноническом уравнении (2) $a>b$, тогда

a – большая полуось

b – меньшая полуось

Точки пересечения эллипса с осями координат называются ***вершинами*** эллипса $(\pm a;0)$ è $(0;\pm b)$

Полуосью эллипса называется отрезок, одним концом которого является центр симметрии эллипса, а другим одна из его вершин.

Будем предполагать, что в каноническом уравнении (2) $a>b$, тогда

a – большая полуось

b – меньшая полуось

В случае $a=b$ уравнение (2) примет вид

$$x^2+y^2=a^2$$

Отношение половины расстояния между фокусами эллипса (фокальное расстояние) к большей полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ***e***:

$$e = \frac{c}{a}$$

Отношение половины расстояния между фокусами эллипса (фокальное расстояние) к большей полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ***e***:

$$e = \frac{c}{a}$$

так как $0 \le c < a$, т $0 \le e < 1$

если $e = 0$, т эллипс - окружность

Отношение половины расстояния между фокусами эллипса (фокальное расстояние) к большей полуоси эллипса называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ***e***:

$$e = \frac{c}{a}$$

так как $0 \le c < a$, т $0 \le e < 1$

если $e = 0$, т эллипс - окружность

Перепишем формулы для фокальных радиусов

$|F_1M| = r_1 = a + ex$ и $|F_2M| = r_2 = a - ex$

3.Директрисы эллипса.

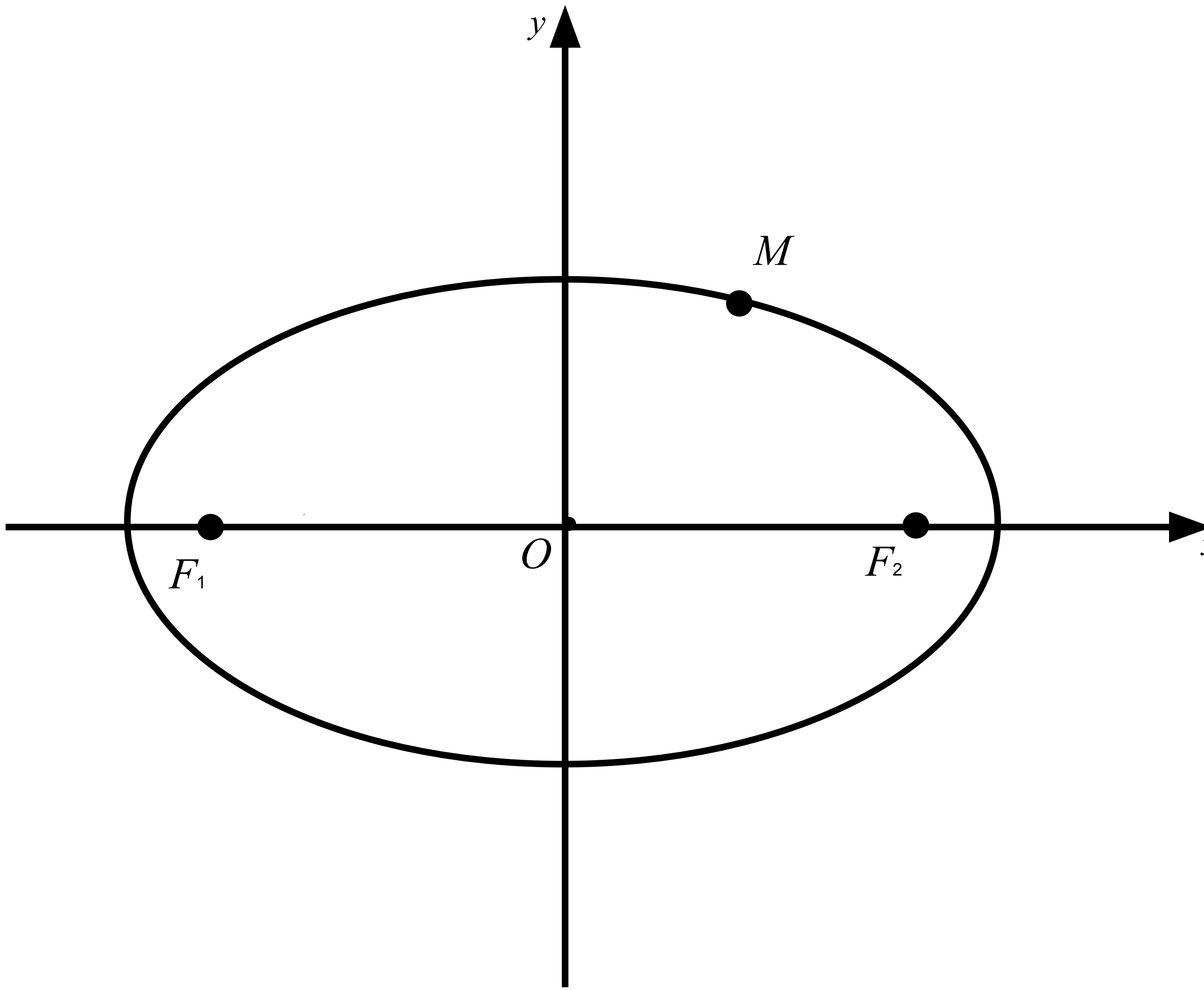
Две прямые перпендикулярные оси эллипса, на которой расположены его фокусы, и отстоящие от центра эллипса на расстояние a/e, где a –большая полуось эллипса, e – эксцентриситет называются ***директрисами*** эллипса.

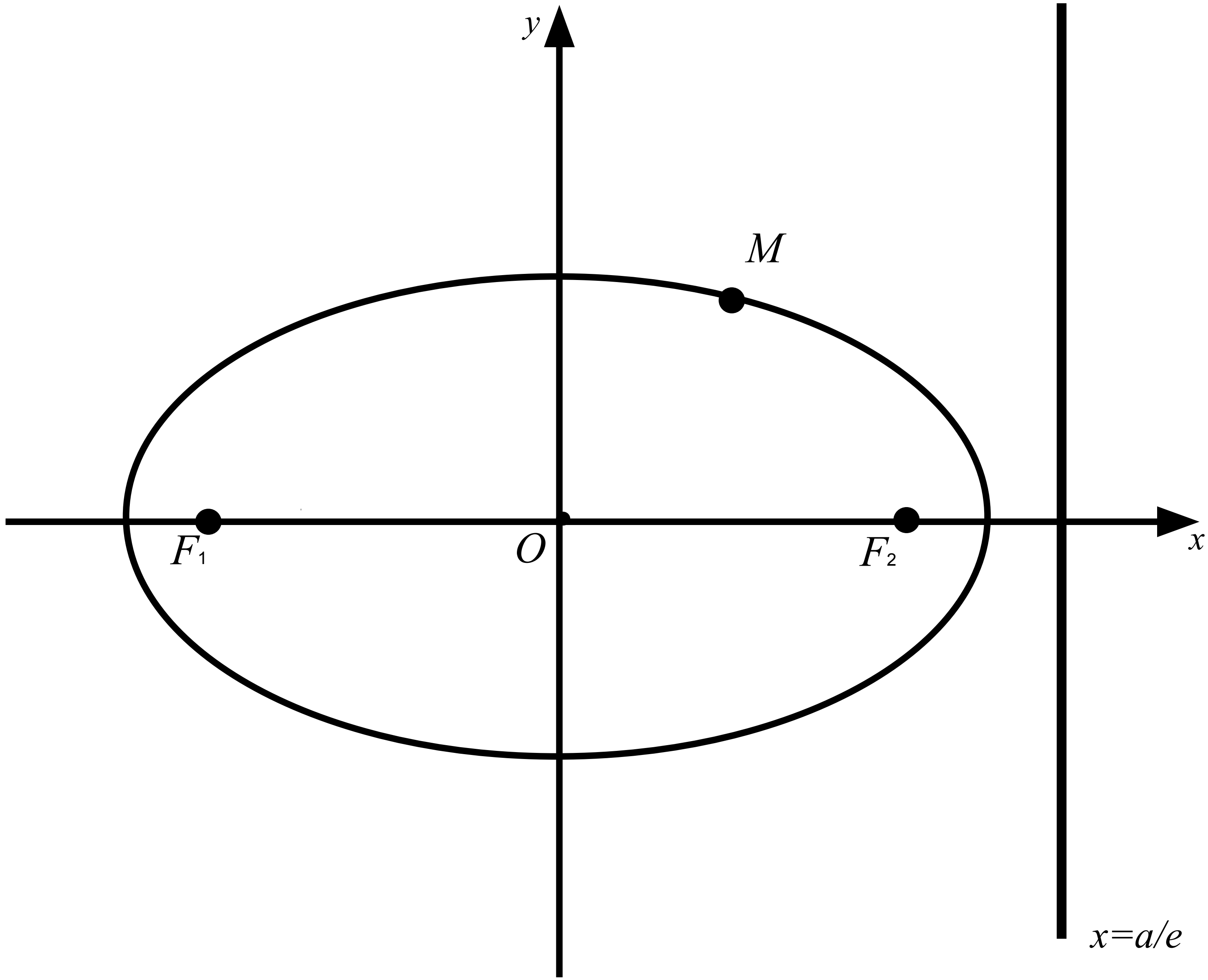
3.Директрисы эллипса.

Две прямые перпендикулярные оси эллипса, на которой расположены его фокусы, и отстоящие от центра эллипса на расстояние *a/e*, где *a* –большая полуось эллипса, *e* – эксцентриситет называются ***директрисами*** эллипса.

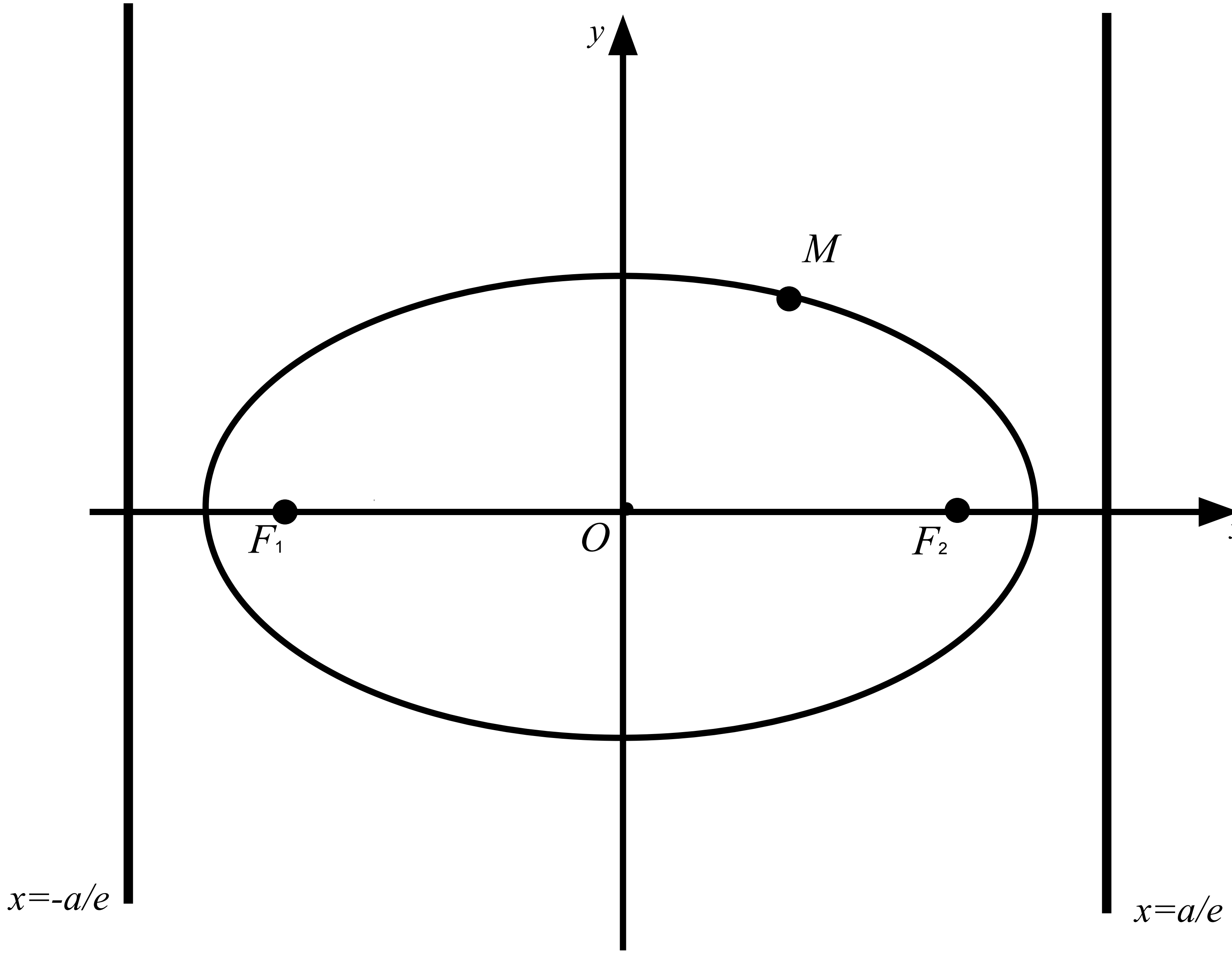
Уравнения директрис имеют вид

$$x = \pm\frac{a}{e}$$


y
M
O
x
F_1
F_2

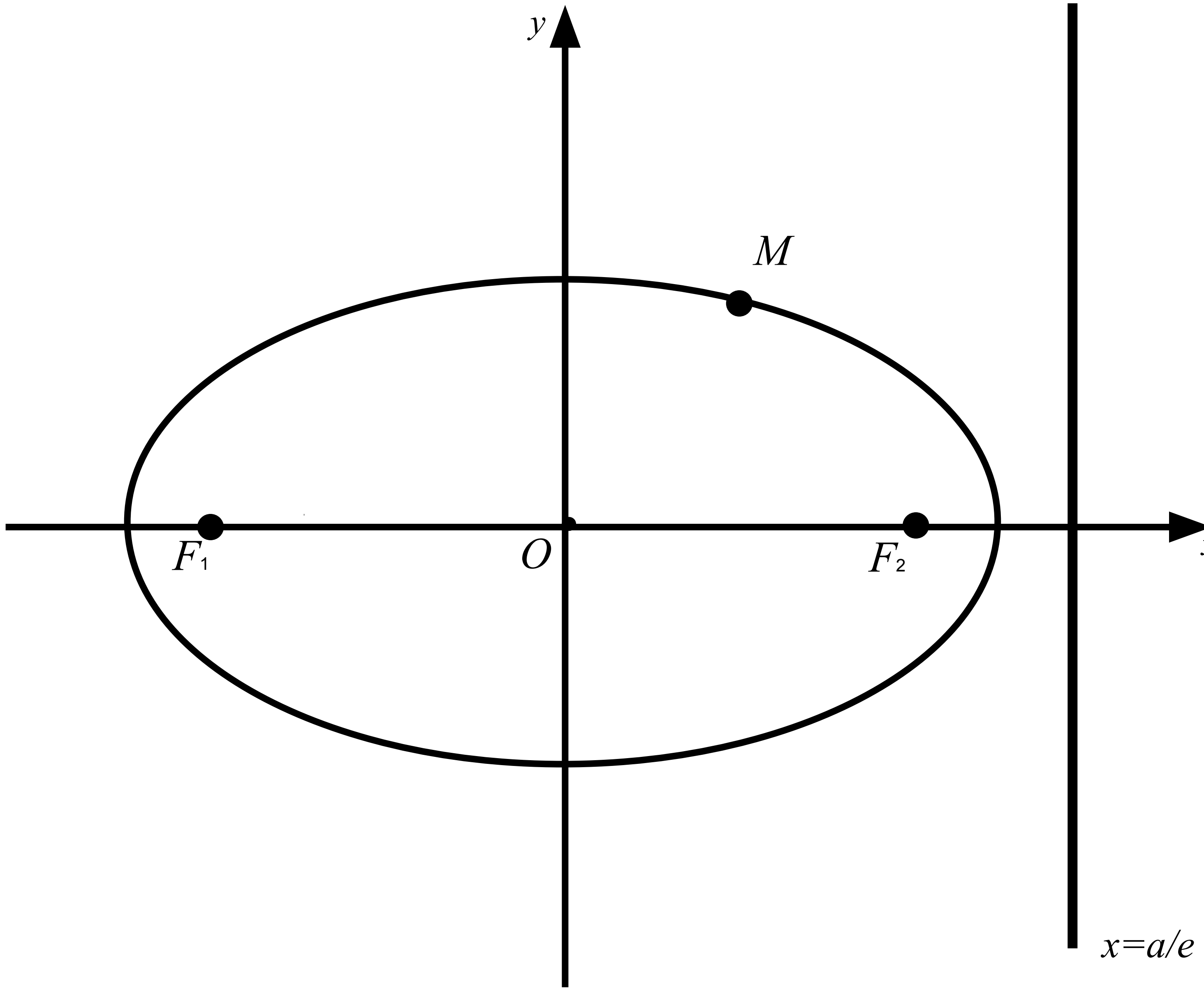


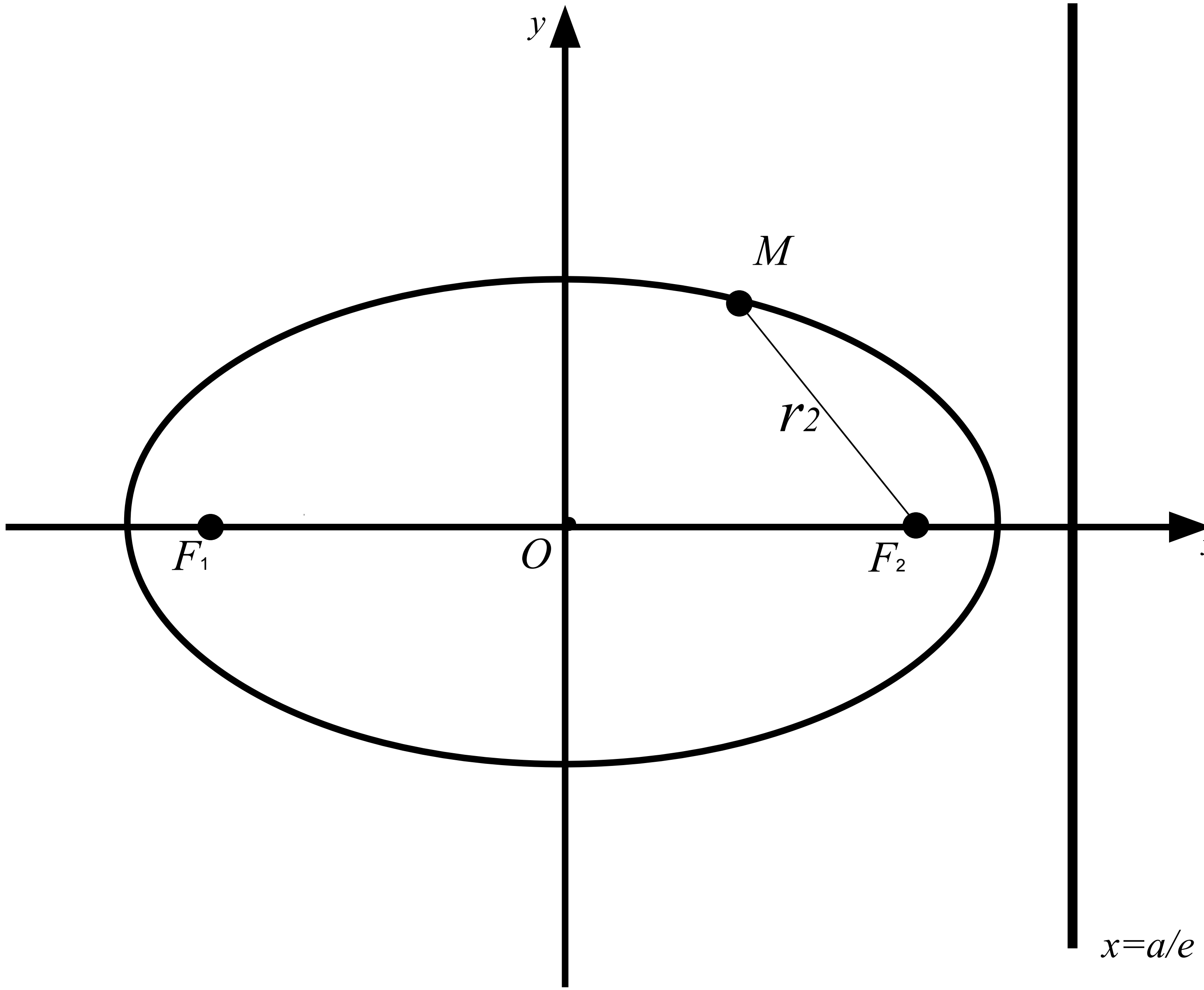
y
M
F_1
O
F_2
x
x=a/e



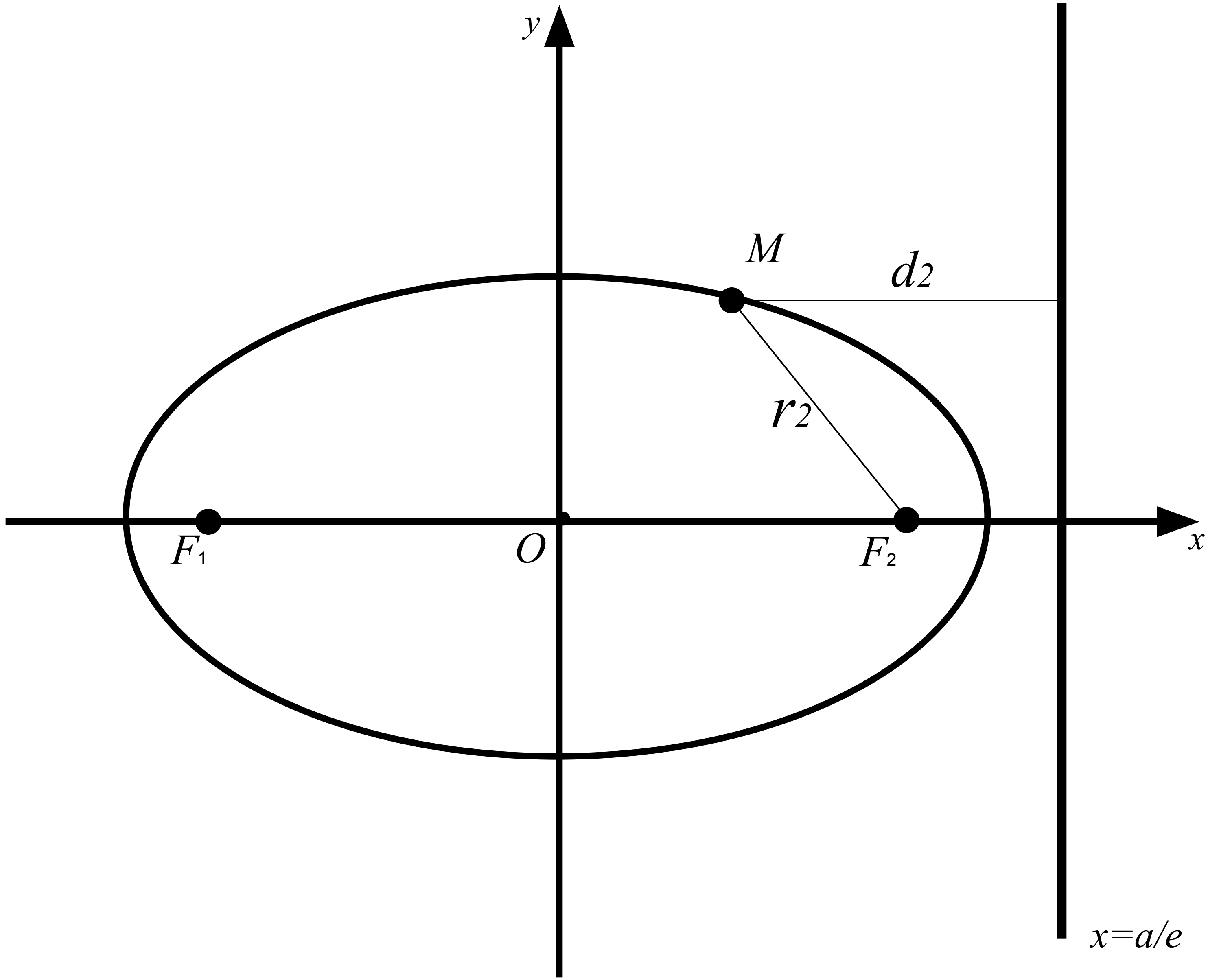
y
M
F1
O
F2
x
x=-a/e
x=a/e

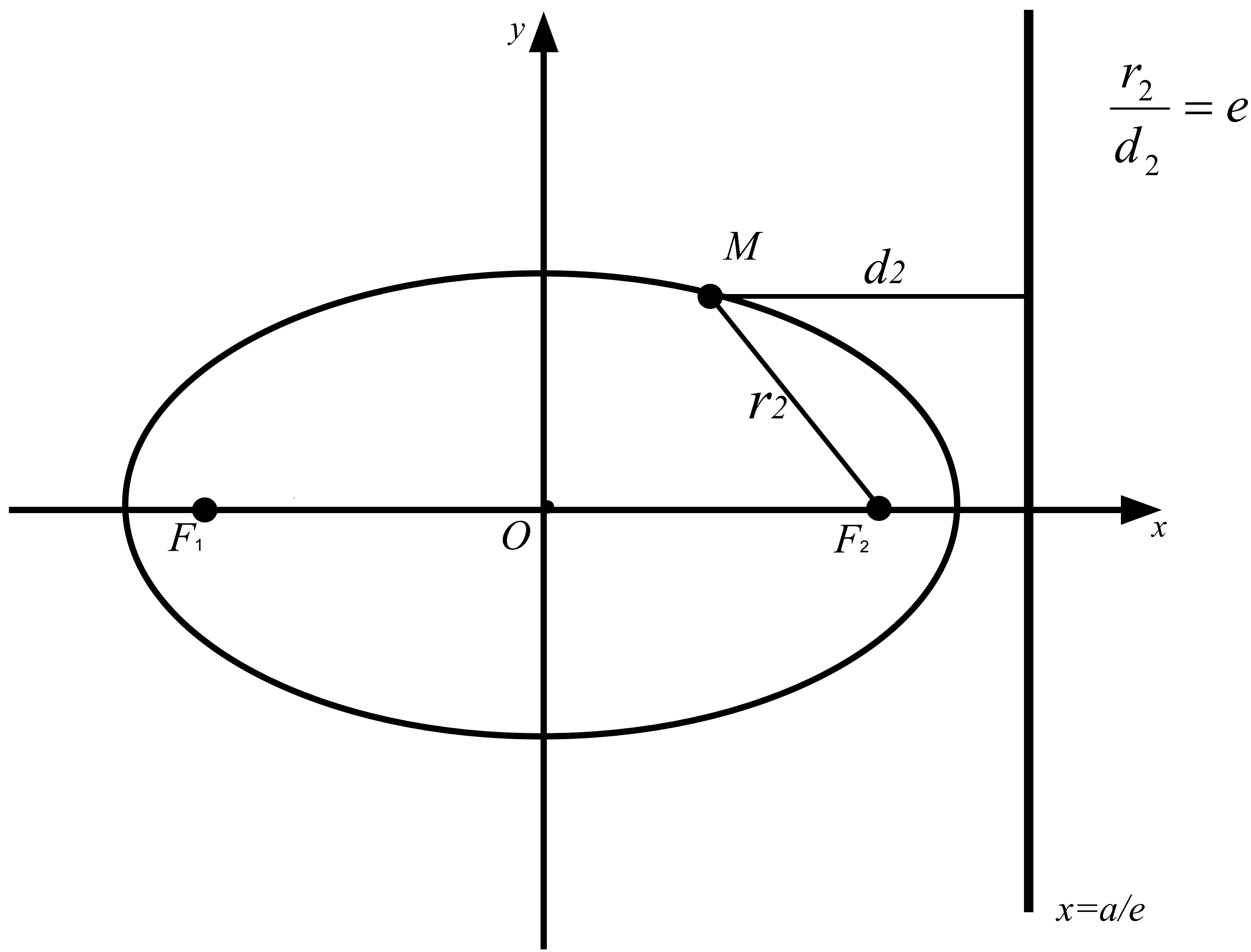
Теорема:
Для того, чтобы точка лежала на эллипсе необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса эллипса к расстоянию от той же точки до директрисы, соответствующей рассматриваемому фокусу, было равно эксцентриситету эллипса.


y
M
F_1
O
F_2
x
x=a/e

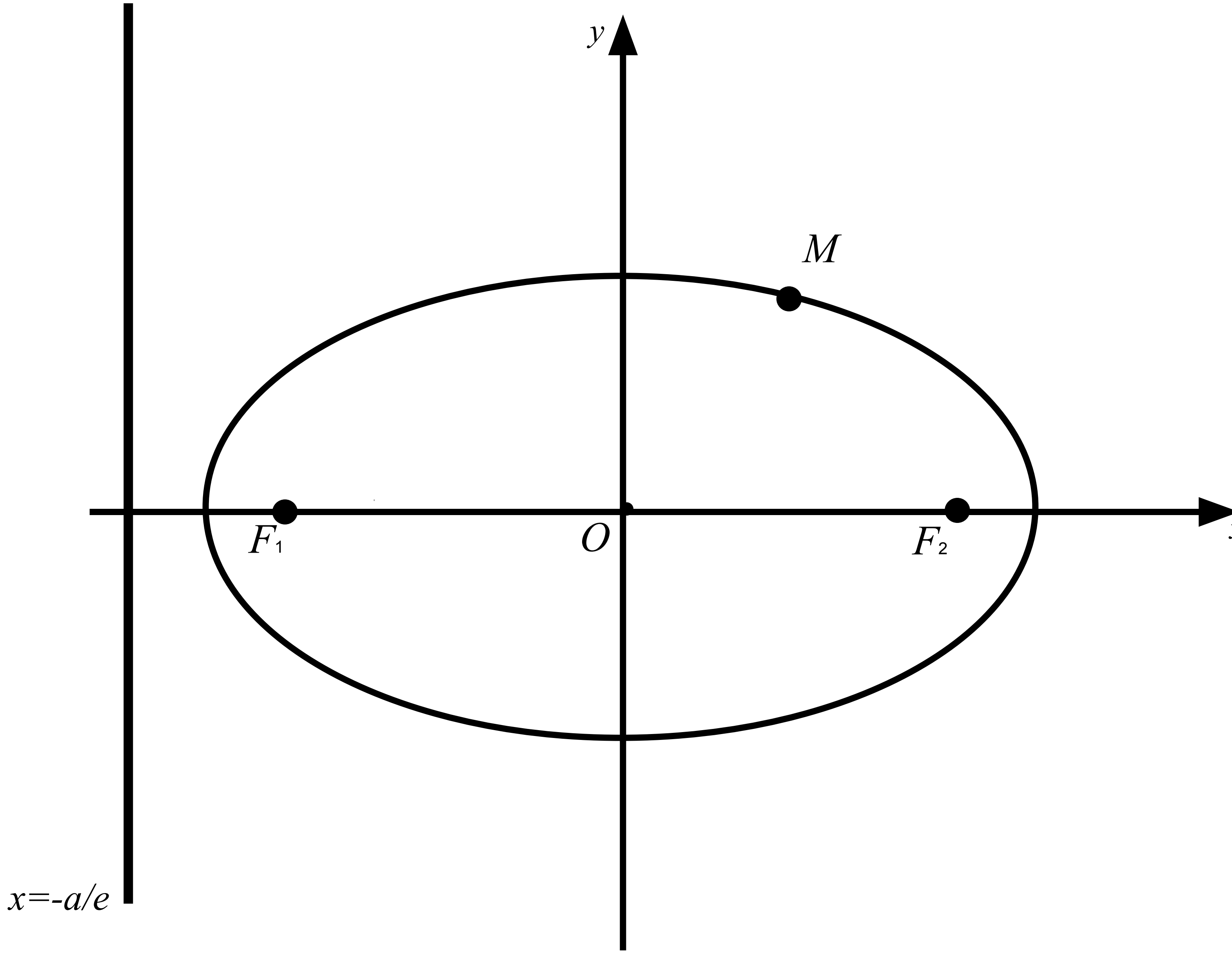


y
M
r2
F1
O
F2
x
x=a/e

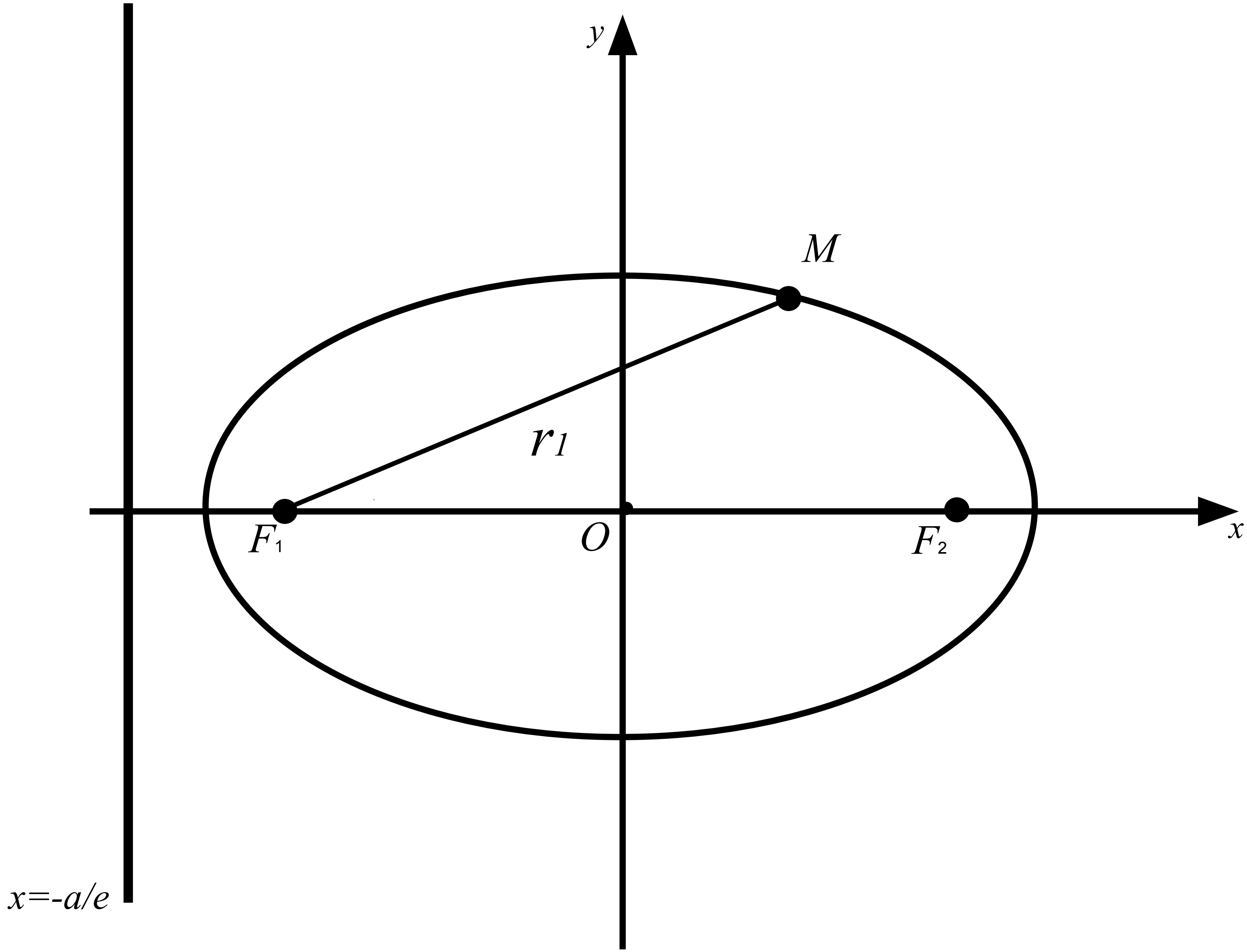

y
M
d2
r2
F1
O
F2
x
x=a/e

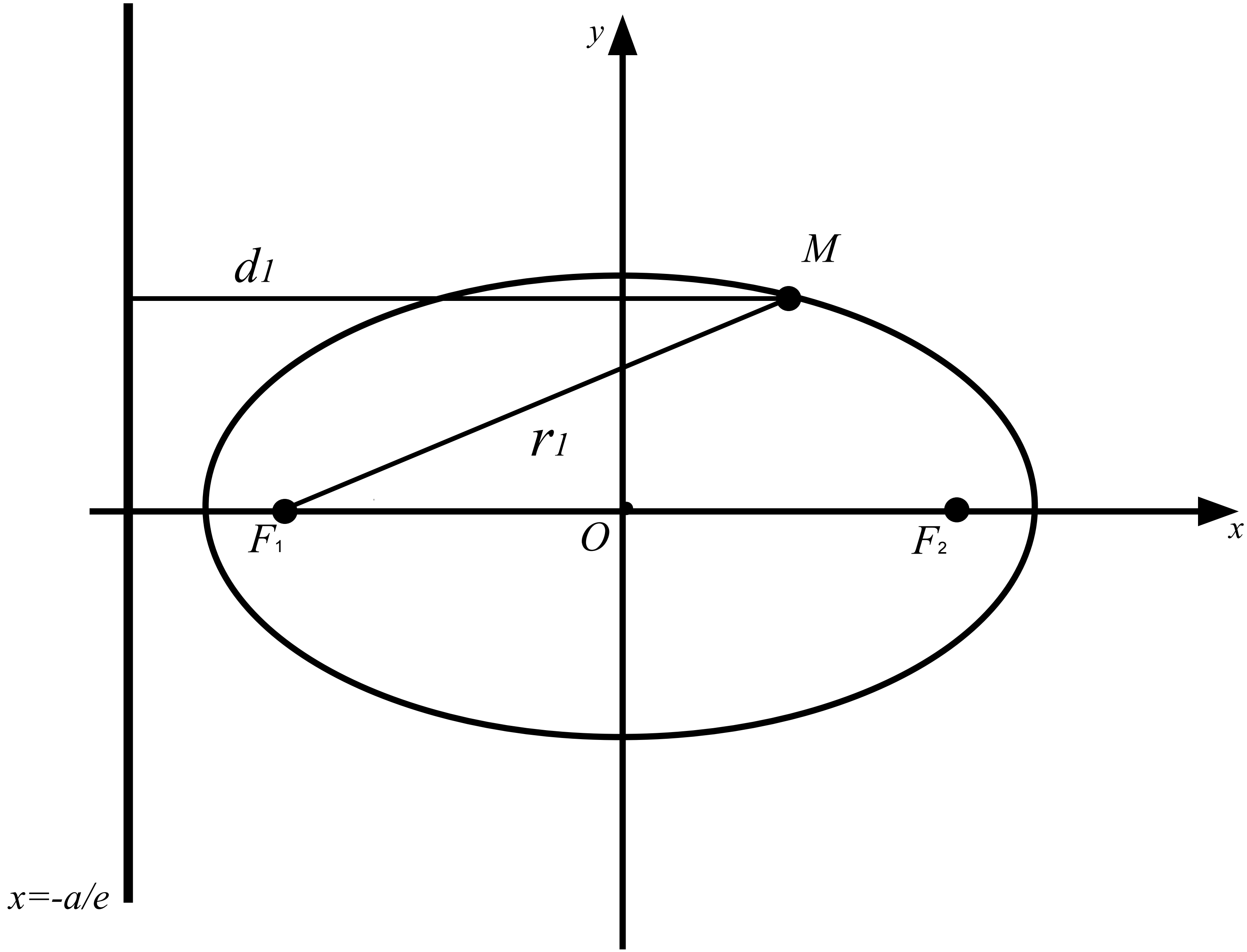


y
$\frac{r_2}{d_2} = e$
M
d_2
r_2
F_1
O
F_2
x
x=a/e

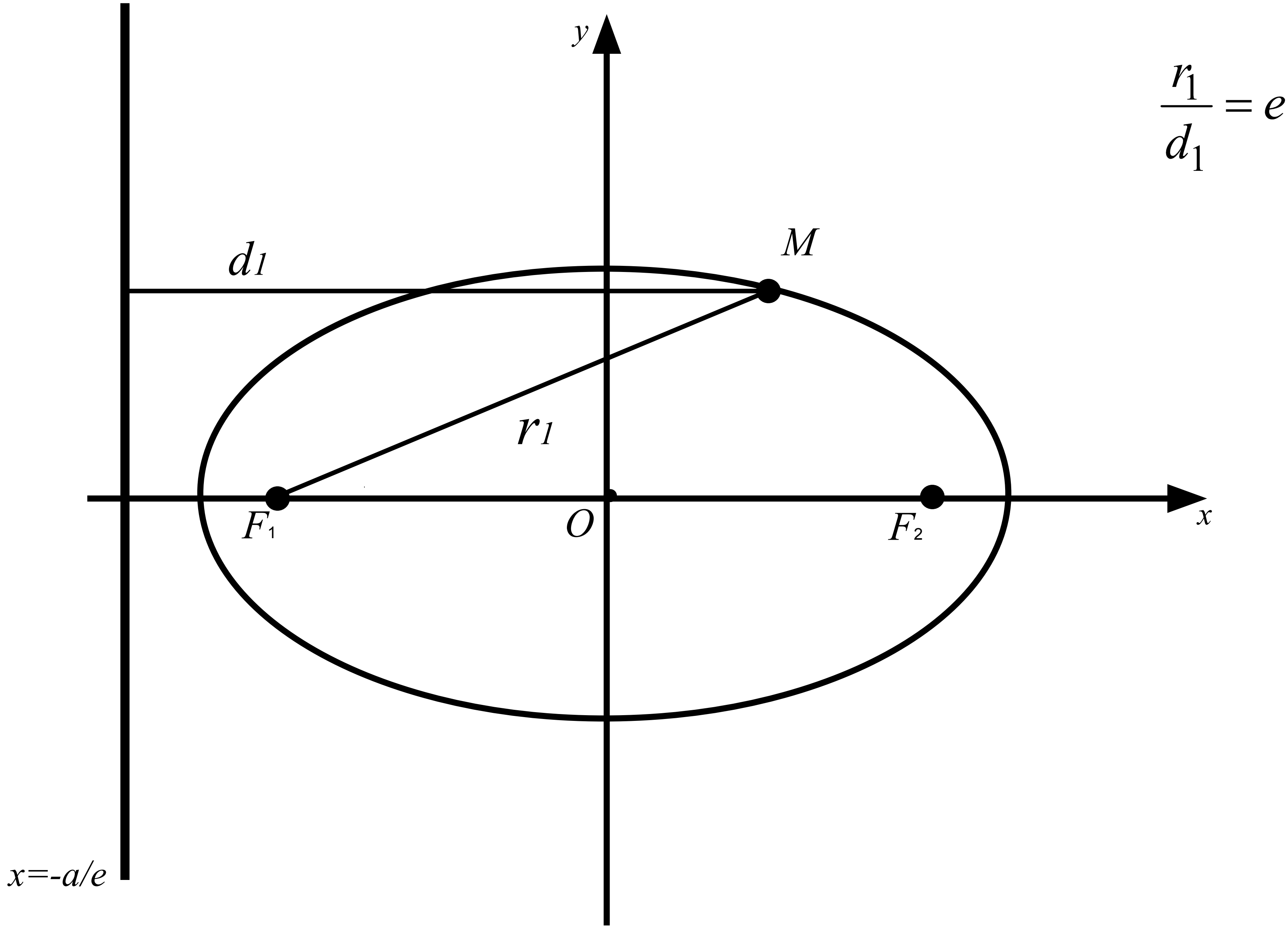


y
M
F1
O
F2
x
x=-a/e

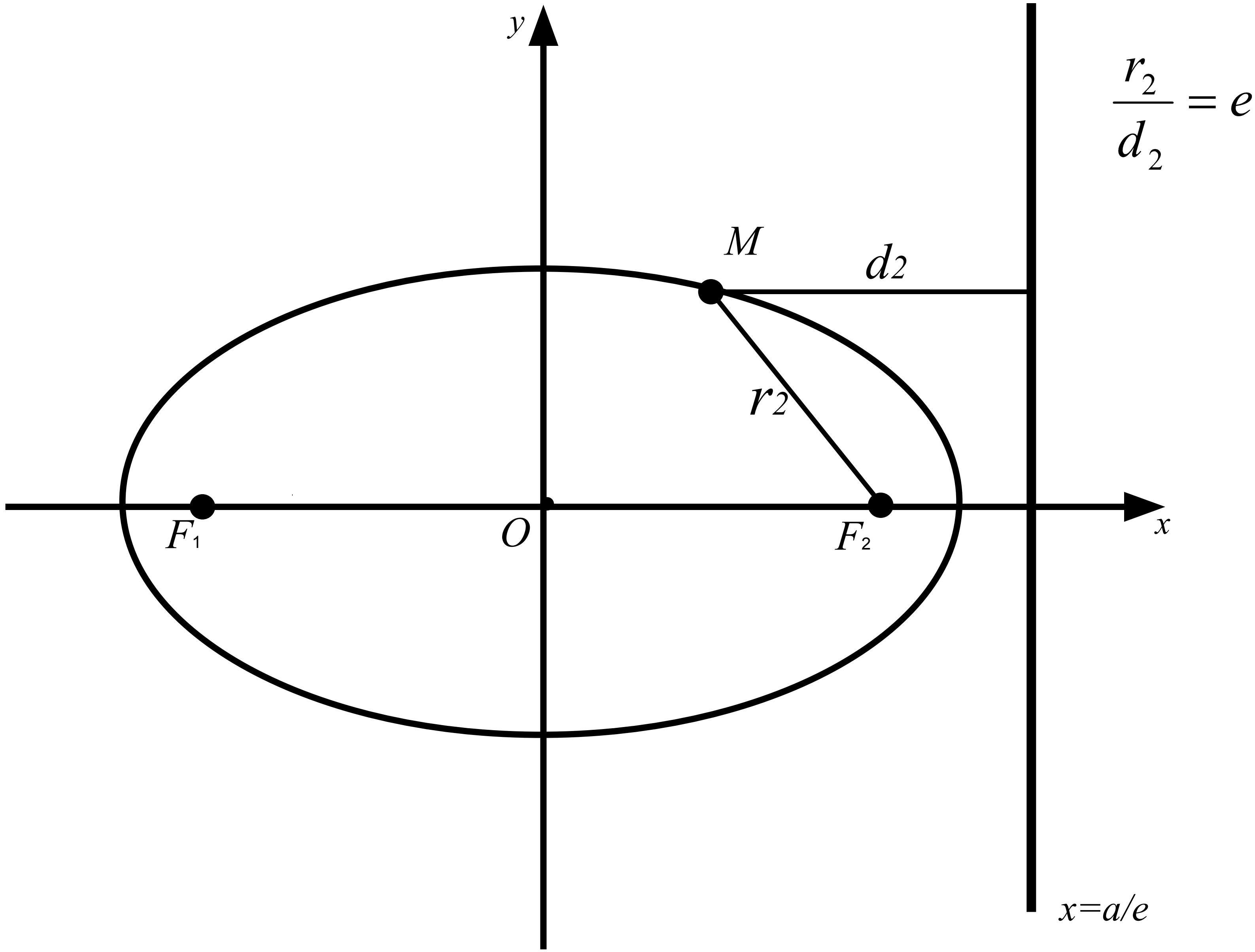

y
M
r1
F1
O
F2
x
x=-a/e



y
M
d_1
r_1
F_1
O
F_2
x
$x=-a/e$



y
$\frac{r_1}{d_1} = e$
M
d_1
r_1
F_1
O
F_2
x
x=-a/e


y
$\frac{r_2}{d_2} = e$
M
d_2
r_2
F_1
O
F_2
x
x=a/e

(=>) имеем точку $M(x;y)$ принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

(=>) имеем точку $M(x;y)$ принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

(=>) имеем точку *M(x;y)* принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

требуется доказать, что

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

(=>) имеем точку *M(x;y)* принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

требуется доказать, что

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

найдём

$$d_2 =$$

(=>) имеем точку *M(x;y)* принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

требуется доказать, что

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

найдём

$$d_2 = \frac{a}{e} - x =$$

(=>) имеем точку *M(x;y)* принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

требуется доказать, что

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

найдём

$$d_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e} =$$

(=>) имеем точку *M(x;y)* принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

требуется доказать, что

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

найдём

$$d_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e} = \frac{r_2}{e}$$

(=>) имеем точку *M(x;y)* принадлежащую эллипсу (2), для которой выполняется

$$r_2 = a - ex, \qquad x = \frac{a}{e}$$

требуется доказать, что

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

найдём

$$d_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e} = \frac{r_2}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2}{d_2} = e$$

(<=) Пусть существует точка *M(x;y)*, для которой выполняется $\frac{r_2}{d_2} = e$ докажем, что точка принадлежит эллипсу, т.е. её координаты удовлетворяют ур. (2)

(<=) Пусть существует точка $M(x;y)$, для которой выполняется $\frac{r_2}{d_2} = e$ докажем, что точка принадлежит эллипсу, т.е. её координаты удовлетворяют ур. (2) $|F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Так как $F_2\,(c,0)$, тогда $d_2 = \left|\frac{a}{e} - x\right|$,

(<=) Пусть существует точка $M(x;y)$, для которой выполняется $\frac{r_2}{d_2} = e$ докажем, что точка принадлежит эллипсу, т.е. её координаты удовлетворяют ур. (2) $|F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Так как $F_2\,(c,0)$, тогда $d_2 = \left|\frac{a}{e} - x\right|,$ из $\frac{r_2}{d_2} = e \Rightarrow r_2 = d_2 e$

(<=) Пусть существует точка *M(x;y)*, для которой выполняется $\frac{r_2}{d_2} = e$ докажем, что точка принадлежит эллипсу, т.е. её координаты удовлетворяют ур. (2) $\left|F_2 M\right| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Так как $F_2\ (c,0)$, тогда $d_2 = \left|\frac{a}{e} - x\right|$,

из $\frac{r_2}{d_2} = e \Rightarrow r_2 = d_2 e$

Подставим $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|\frac{a}{e} - x\right| e$$

(<=) Пусть существует точка $M(x;y)$, для которой выполняется $\frac{r_2}{d_2} = e$ докажем, что точка принадлежит эллипсу, т.е. её координаты удовлетворяют ур. (2) $|F_2M| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Так как $F_2\ (c,0)$, тогда $d_2 = \left|\frac{a}{e} - x\right|,$ из $\frac{r_2}{d_2} = e \Rightarrow r_2 = d_2 e$

Подставим $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|\frac{a}{e} - x\right| e$

Возведём в квадрат, упростим, помня, что $e = \frac{c}{a}$ и $a^2 - c^2 = b^2$

(<=) Пусть существует точка *M(x;y)*, для которой выполняется $\frac{r_2}{d_2}=e$ докажем, что точка принадлежит эллипсу, т.е. её координаты удовлетворяют ур. (2) $|F_2M|=r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Так как $F_2\ (c,0)$, тогда $d_2=\left|\frac{a}{e}-x\right|$, из $\frac{r_2}{d_2}=e \Rightarrow r_2=d_2e$

Подставим $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\left|\frac{a}{e}-x\right|e$

Возведём в квадрат, упростим, помня, что $e=\frac{c}{a}$ и $a^2-c^2=b^2$

получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Самостоятельно изучить вопросы по данной теме:

1. Вид эллипса в случае $a<b$
2. Уравнение касательной к эллипсу
3. Оптическое свойство эллипса