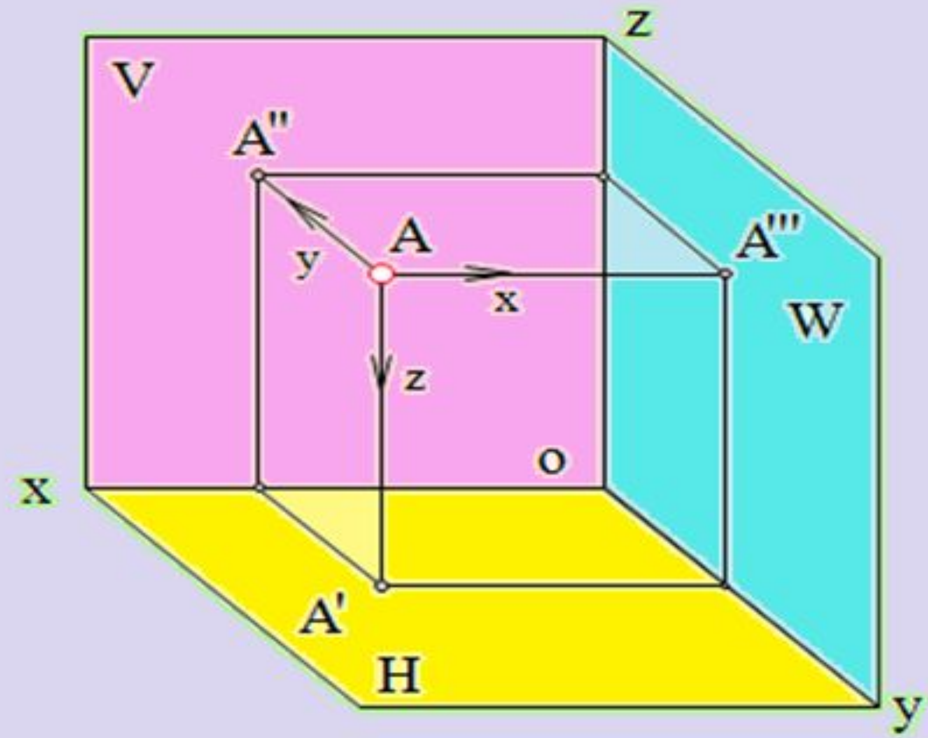
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Занятие 2. МЕТОДЫ ПРЕЦИРОВАНИЯ. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ



1. Предмет и метод начертательной геометрии

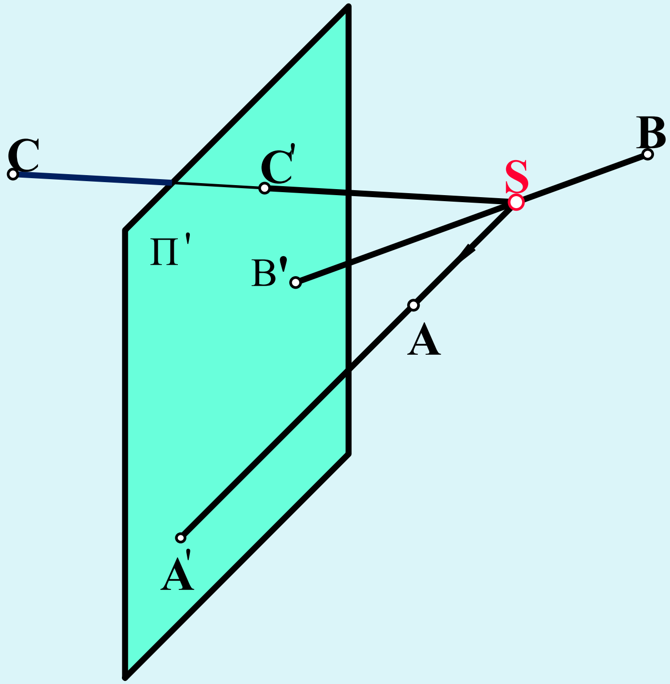
Начертательная геометрия является тем разделом геометрии, в котором изучаются методы изображения пространственных фигур на чертеже и алгоритмы решения позиционных, метрических и конструктивных задач.

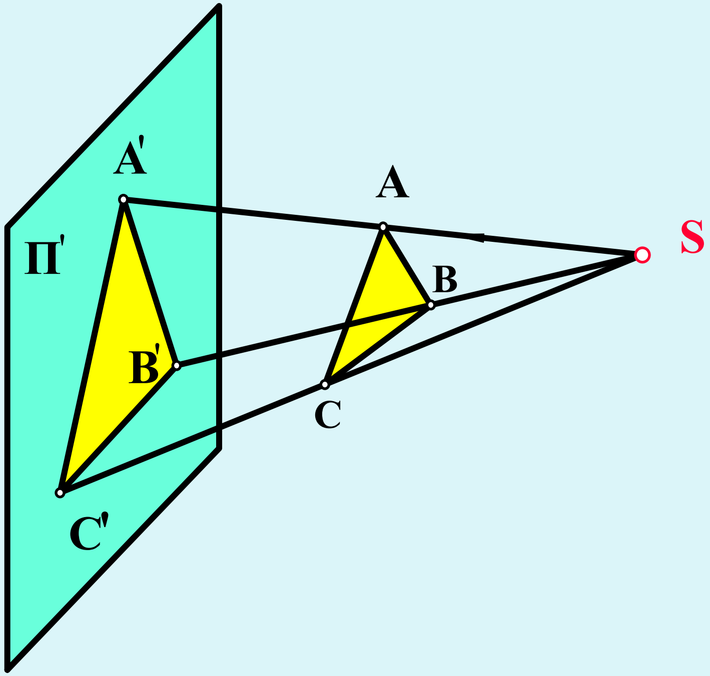
Для того чтобы чертеж был геометрически равноценным изображаемой фигуре (оригиналу), он должен быть построен по определенным геометрическим законам.
В начертательной геометрии чертеж строится при помощи метода проецирования, поэтому чертежи носят название проекционных чертежей. При построении этих чертежей широко используются проекционные свойства фигур, благодаря чему изображение обладает такими геометрическими свойствами, по которым можно судить о свойствах самого оригинала.

Чертежи должны не только определять форму и размеры предмета, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, помогать всесторонне исследовать предметы и их отдельные детали. Эти требования к чертежам и привели к созданию теории изображений, составляющей основу начертательной геометрии. Правила построения изображений основаны на методе проекций. Поэтому проекционный метод построения изображений является основным методом начертательной геометрии.

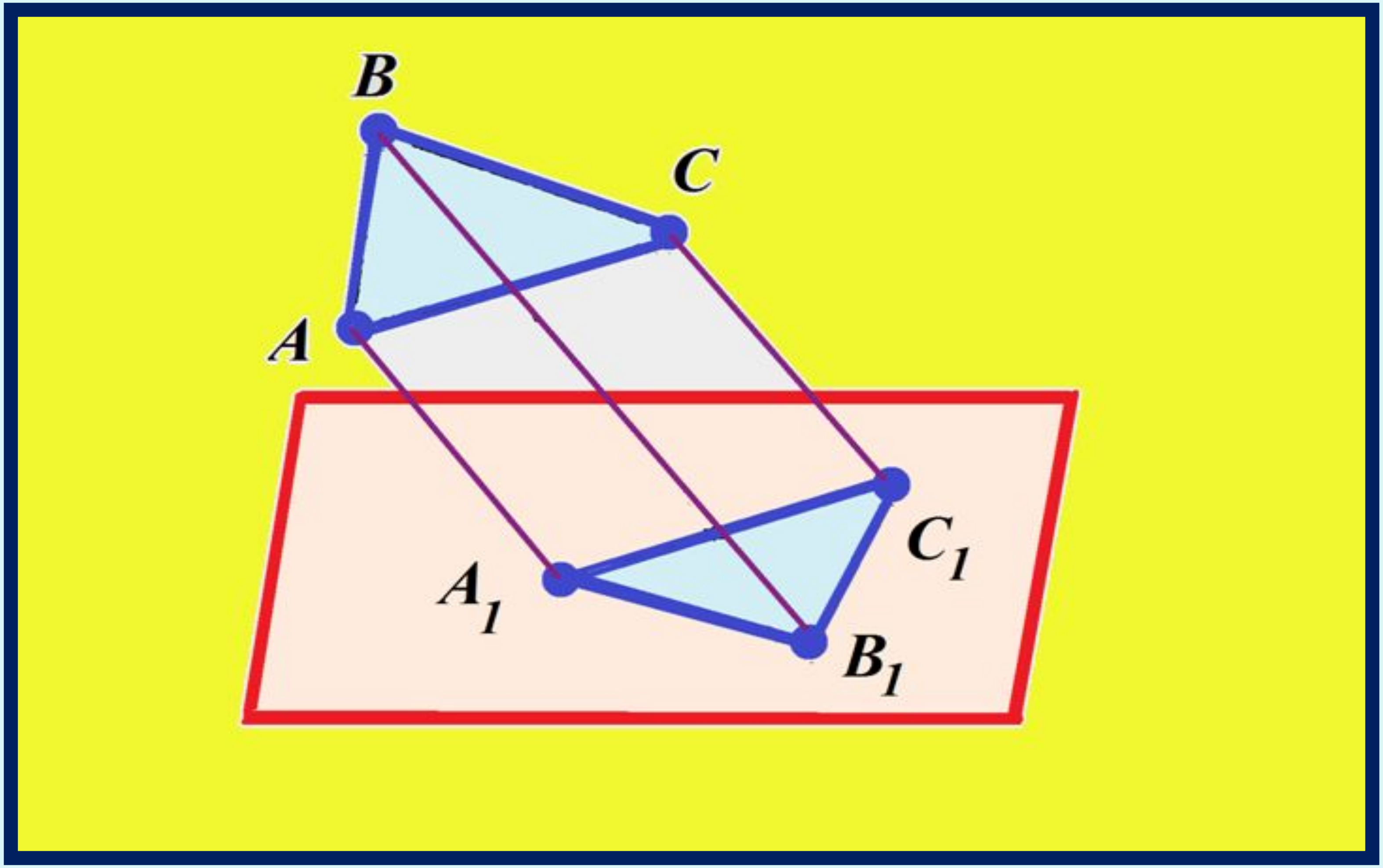
Методы проецирования

Аппарат проецирования включает в себя проецирующие лучи, проецирумый объект и плоскость, на которой получается изображение оригинала.
Изображение точки **A** на плоскости **П'** - точка **A'** получается в пересечении проецирующего луча, проходящего через точку **A**, с плоскостью **П'**. Все лучи проецирующие геометрическую фигуру, исходят из одной точки **S**, называемой центром проекций. Если эта точка находится на определенном расстоянии от плоскости проекций, то такое проецирование называется центральным.

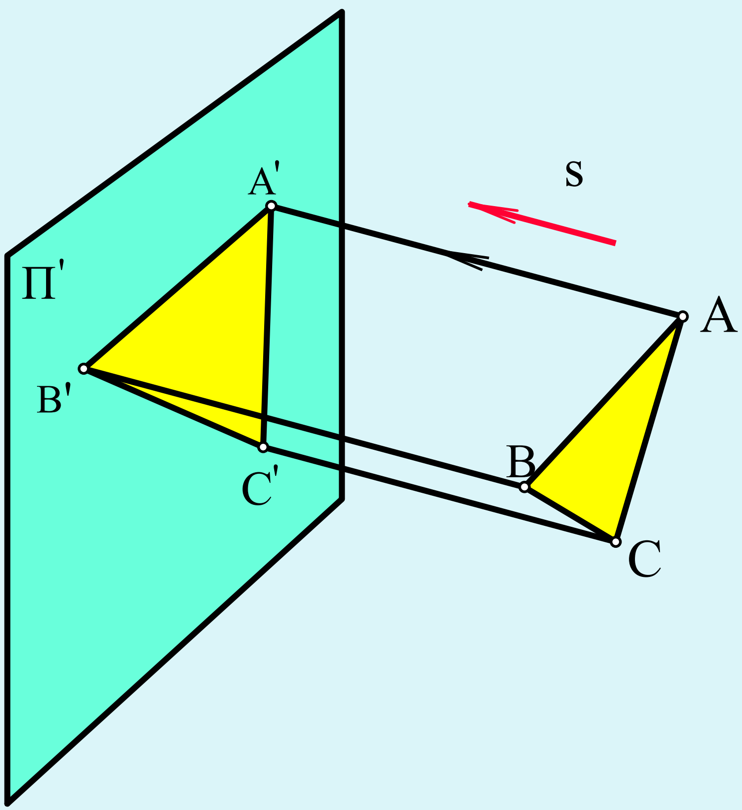




Параллельное проецирование



Если центр проекций удален в бесконечность, то все проецирующие лучи становятся параллельными и проецирование называется параллельным. В этом случае задается направление проецирования S.
Ортогональное (прямоугольное) проецирование есть частный случай параллельного проецирования, когда все проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций П'.



Ортогональная проекция получила наибольшее распространение в технических чертежах. Чертежи, полученные рассмотренными методами проецирования, не обладают свойством обратимости, т.е. по данному чертежу воспроизвести оригинал не решается однозначно

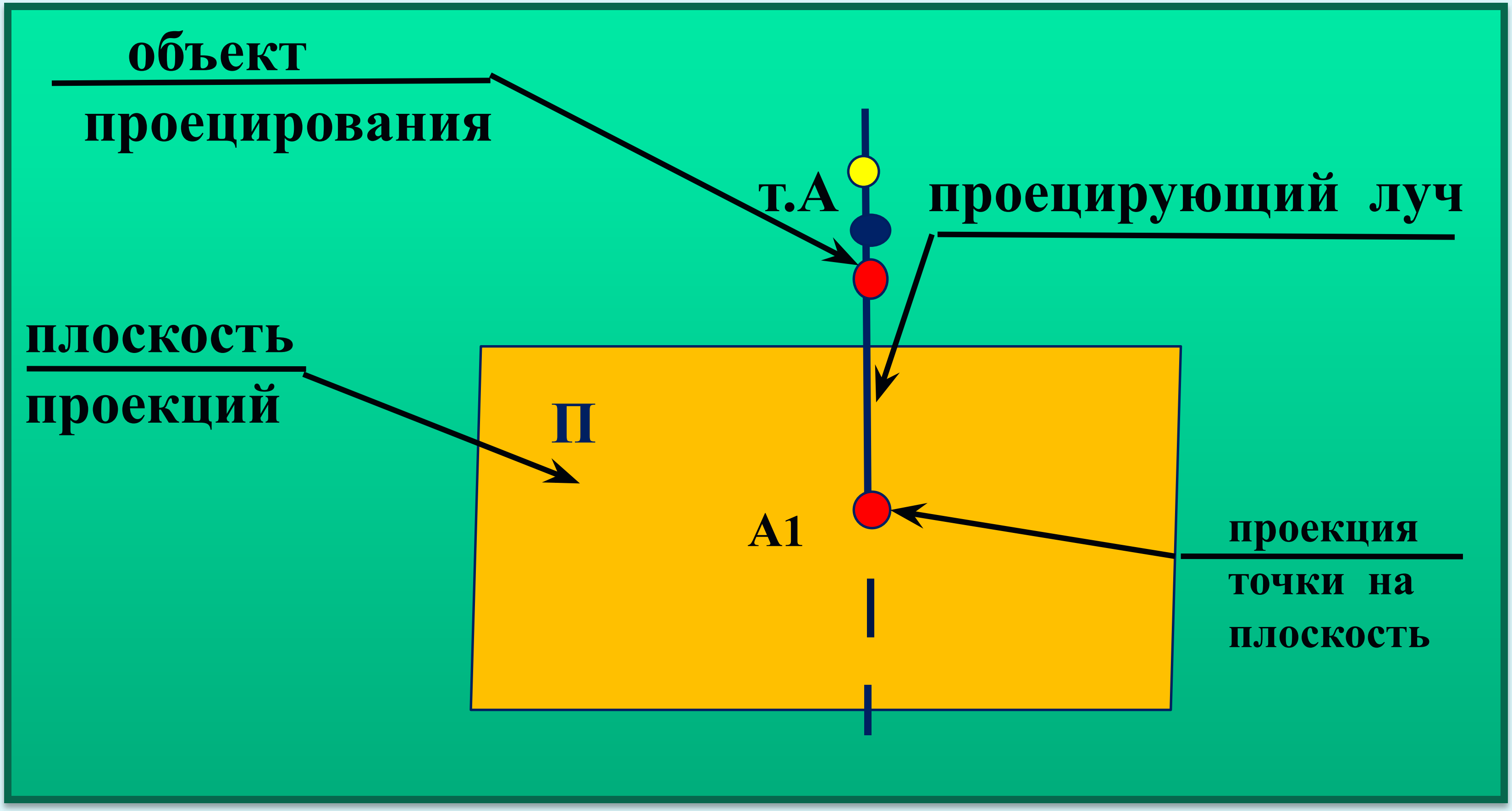
Основные свойства параллельного проецирования

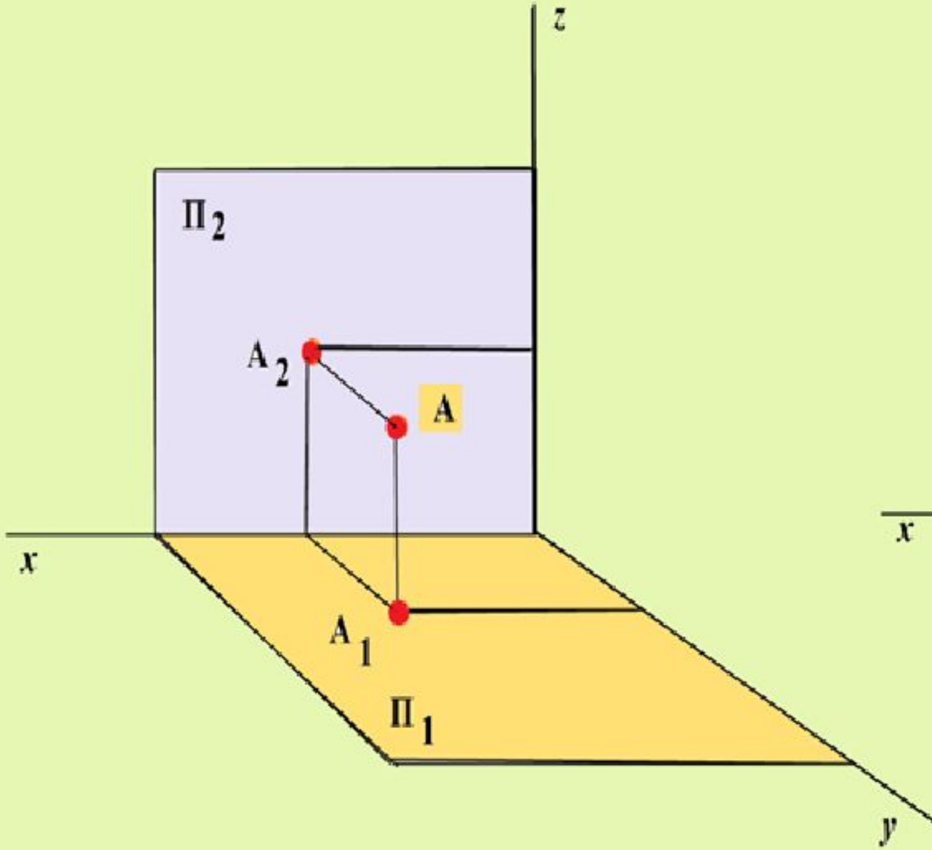
1. Свойство *однозначности*. Проекцией точки на плоскость есть точка.
2. Свойство *прямолинейности*. Проекцией прямой линии на плоскость есть прямая.
3. Свойство *принадлежности*. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии.
4. Свойство сохранения *параллельности*. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.
5. Свойство *деления отрезка в отношении*. Если отрезок прямой линии делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении.
6. Свойство *параллельного переноса*. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.

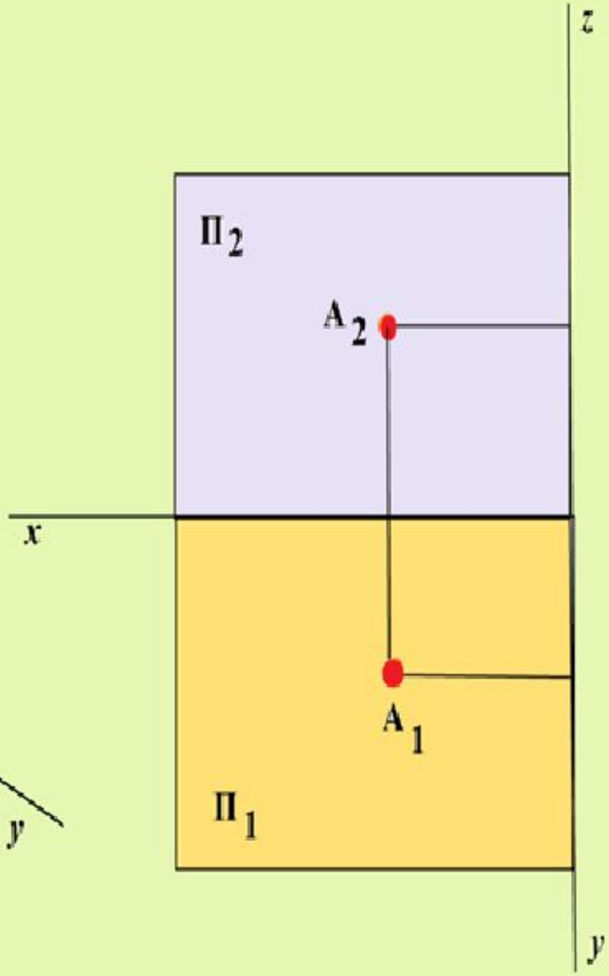
Три последние свойства обеспечивают более простое построение изображения и меньше искажают форму и размеры оригинала по сравнению с центральной проекцией.

- ***Точка* - основной геометрический элемент линий, плоскостей, поверхностей и тел, следовательно, правила построения чертежа справедливы для всех объектов.**

Проекция точки на плоскость







$П_1$ - горизонтальная плоскость

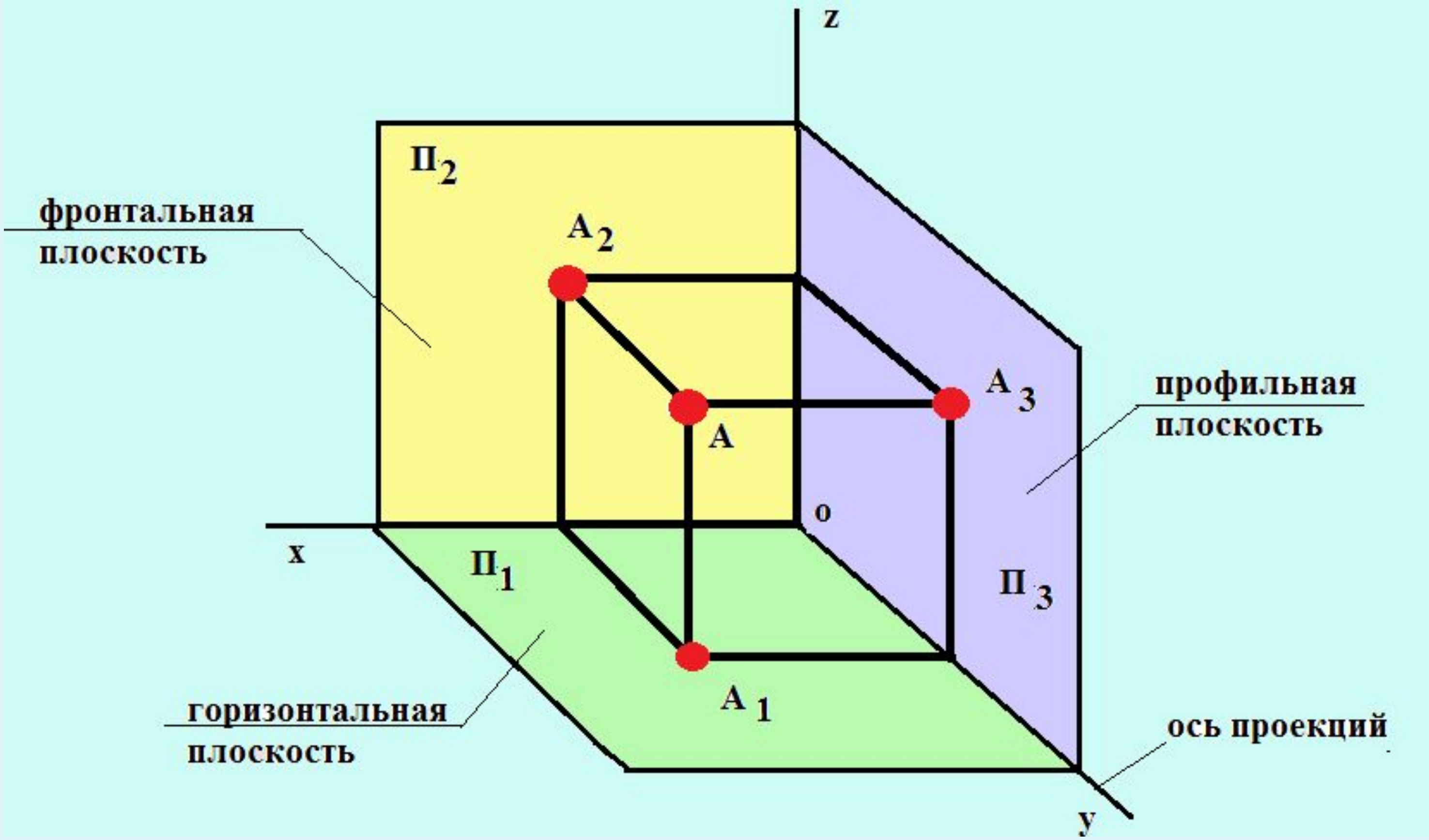
$П_2$ - фронтальная плоскость

A_1 - горизонтальная проекция т. А

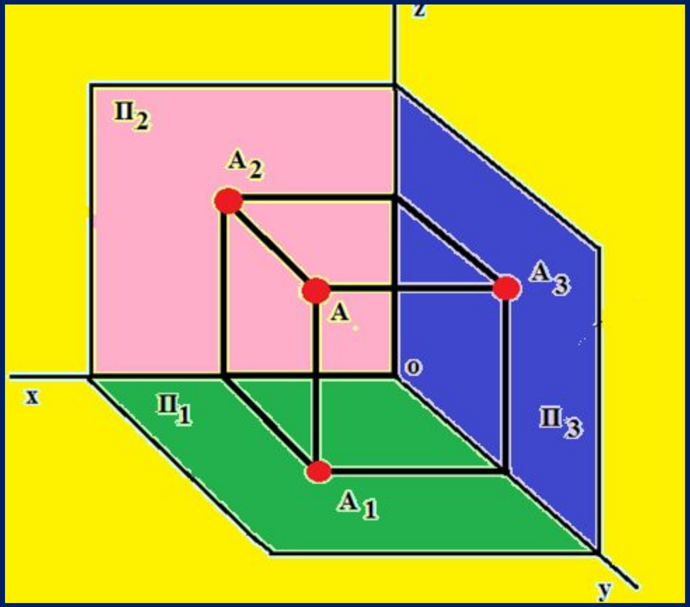
A_2 - фронтальная проекция т. А

Комплексный чертеж точки

Объёмное (аксонометрическое) изображение чертежа точки.



- **Комплексным чертежом точки** – называется чертеж, состоящий из нескольких связанных между собой прямоугольных проекций точки.

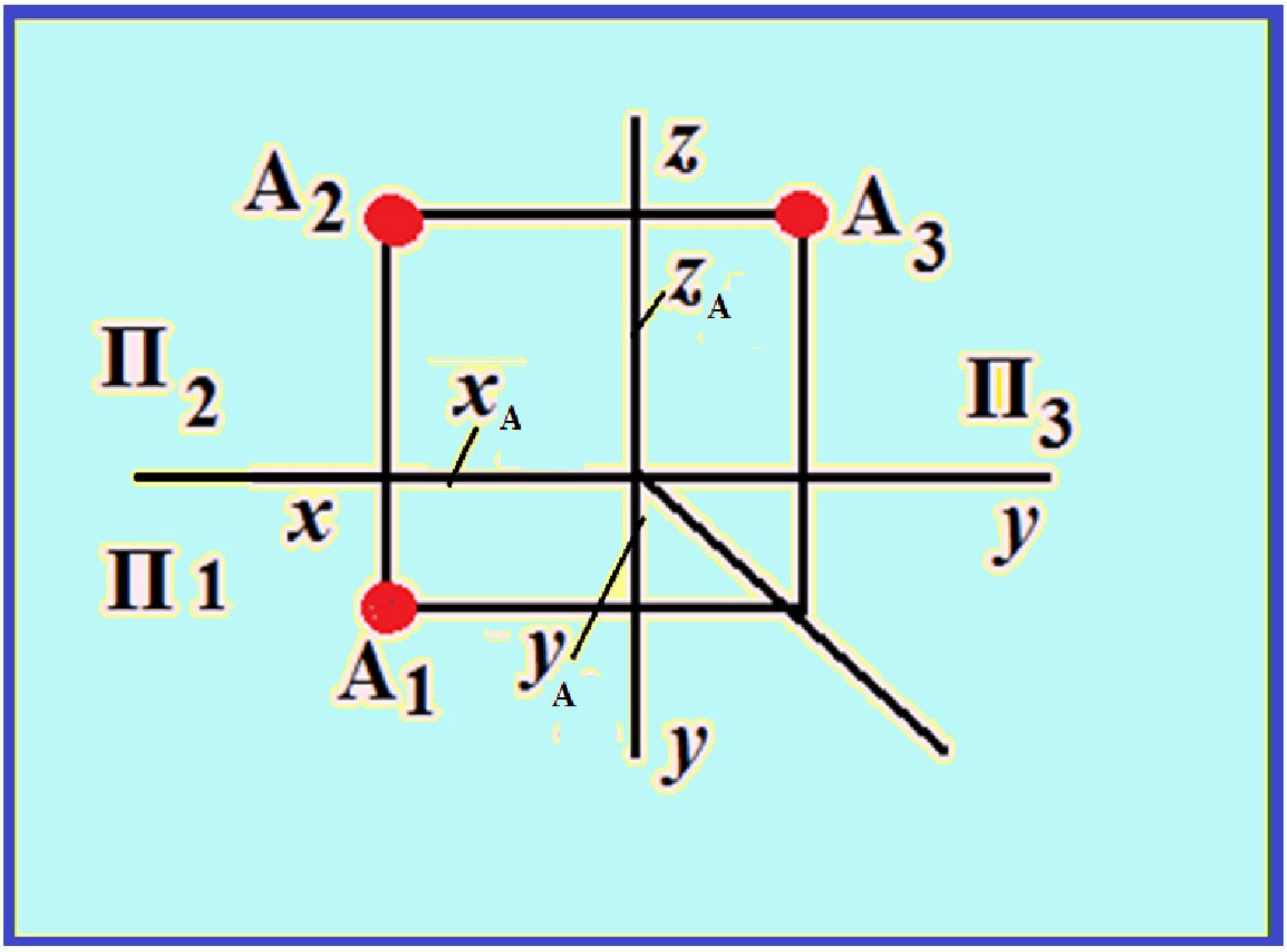


КОМПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЕЖ ТОЧКИ (ЭПЮР ТОЧКИ)

Комплексный чертеж (эпюр) точки состоит из двух или трех ортогональных проекций. Эти проекции получают на взаимно перпендикулярных плоскостях проекций. Одна из плоскостей проекций $П_1$ называется *горизонтальной* плоскостью проекций, вторая $П_2$ - *фронтальной*, а третья $П_3$ - *профильной*.

Линии пересечения плоскостей проекций называются ***осями координат x, y, z.***

Комплексный чертеж точки на плоскости
(обратимый чертеж)

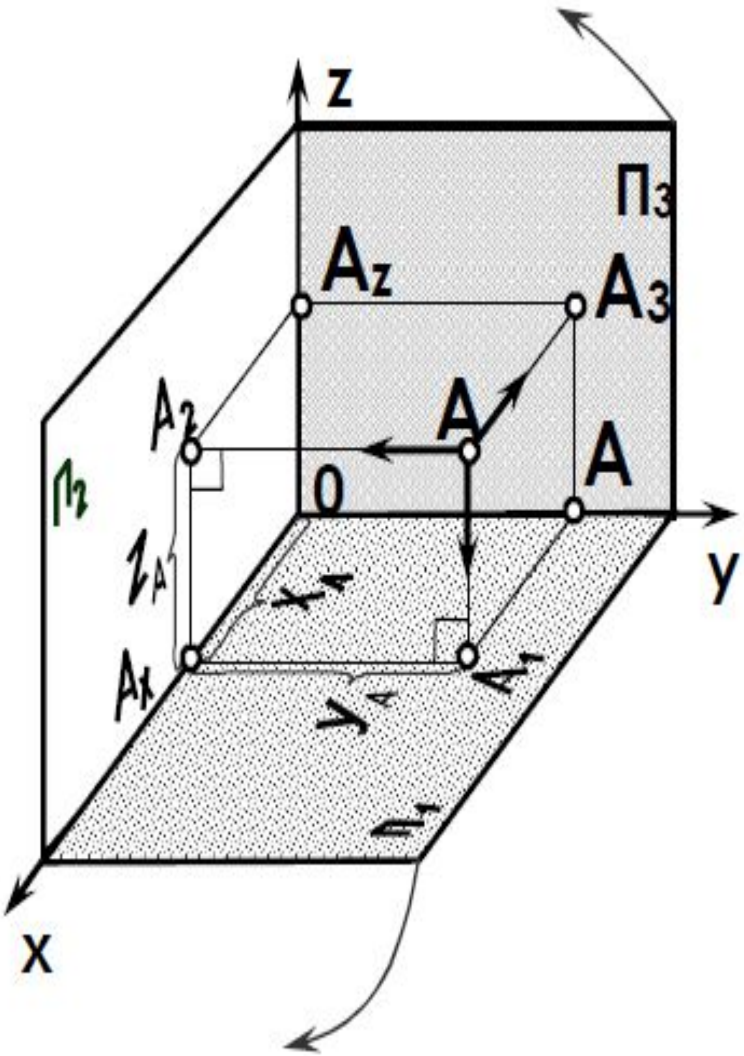


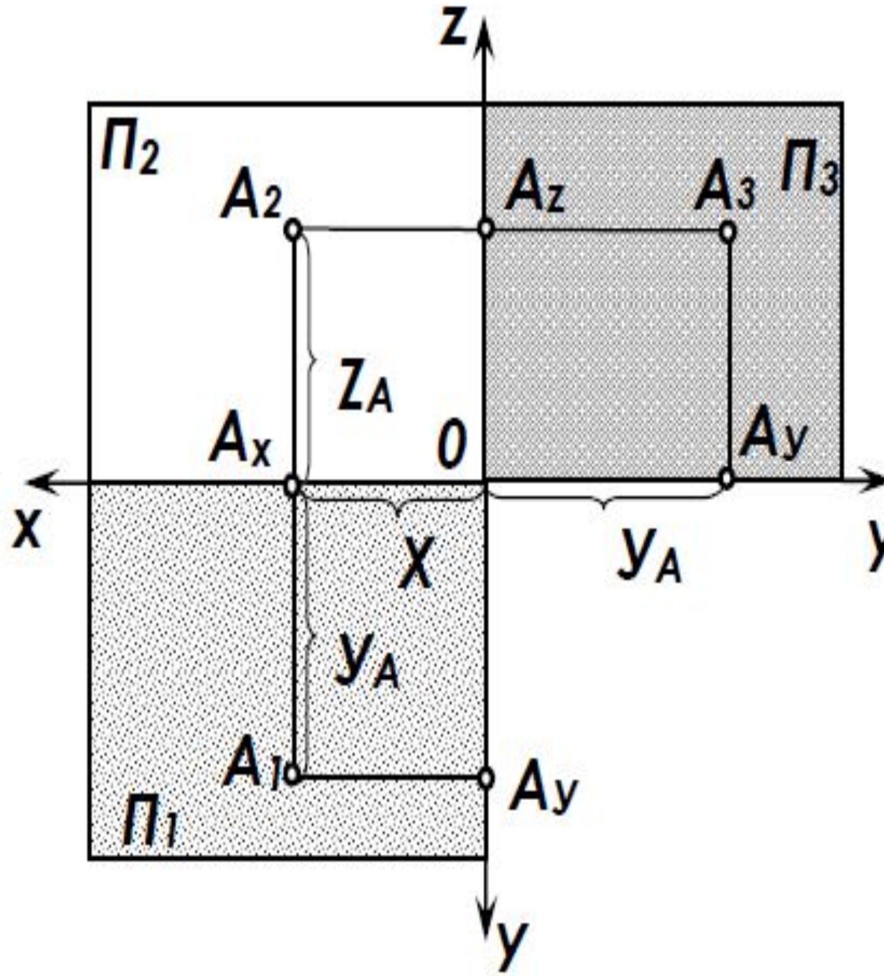
Условия связи

на комплексном чертеже :

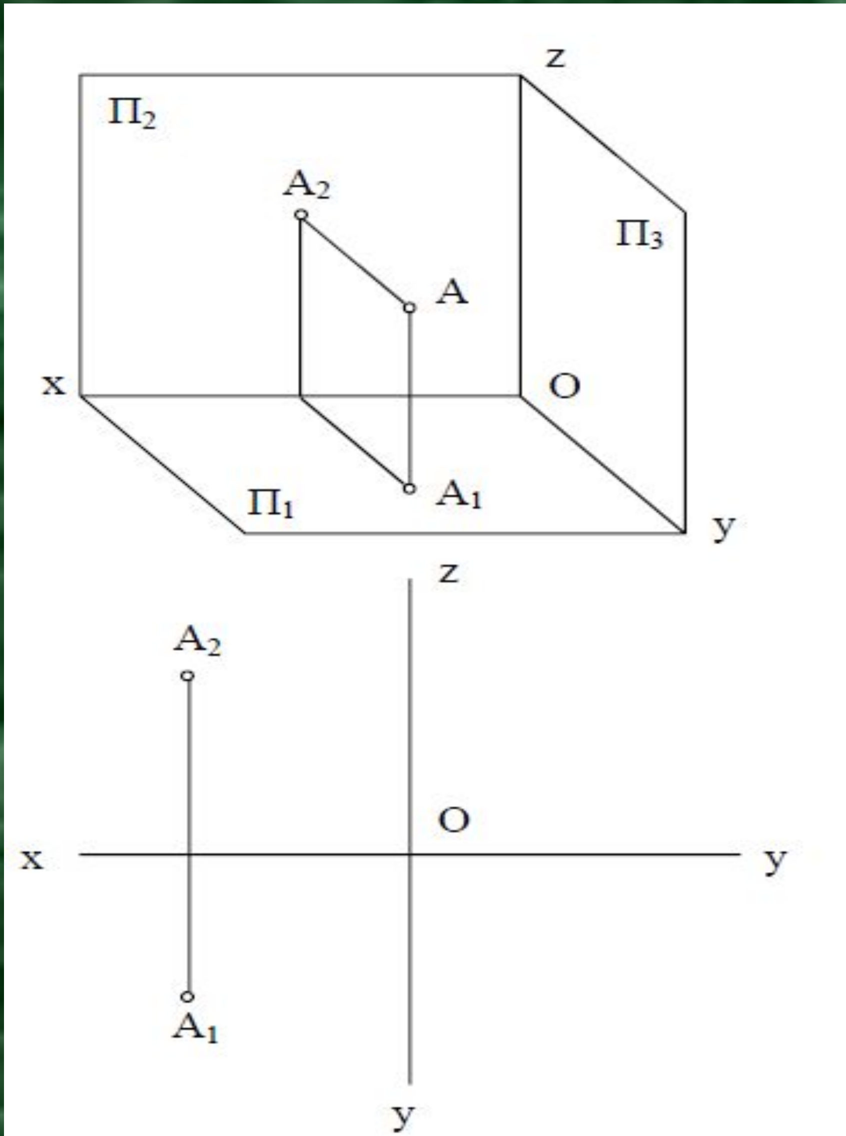
- A_2 и A_3 – на одной горизонтальной линии связи;
- A_2 и A_1 – на одной вертикальной линии связи;
- A_1 и A_3 – на ломаной линии связи.

- **Определитель точки пространства** – две её проекции, а также три прямоугольные координаты. Принимается, что плоскости проекций совмещены с плоскостями координат.
- Условная запись определителя точки *A* (A_1, A_2) *или* $A(x, y, z)$. **Каждую проекцию точки определяют две её координаты**:
- $A_1 (X; Y); A_2 (X; Z); A_3 (Y; Z)$.
- **Ширина точки** – расстояние точки от профильной плоскости проекций – определяется координатой *X (абсцисса)*
- $(AA_3 = A_1A_Y = A_2A_Z = X)$.
- **Глубина точки** – расстояние точки от фронтальной плоскости проекций – определяется координатой *Y (ордината)*
- $(AA_2 = A_1A_X = A_3A_Z = Y)$.
- **Высота точки** – её расстояние от горизонтальной плоскости проекций – определяется координатой *Z (аппликата)*
- $(AA_1 = A_2A_X = A_3A_Y = Z)$.


z
П3
Az
A3
A2
A
A
0
П2
ZA
XA
Ax
A1
YA
y
П1
x

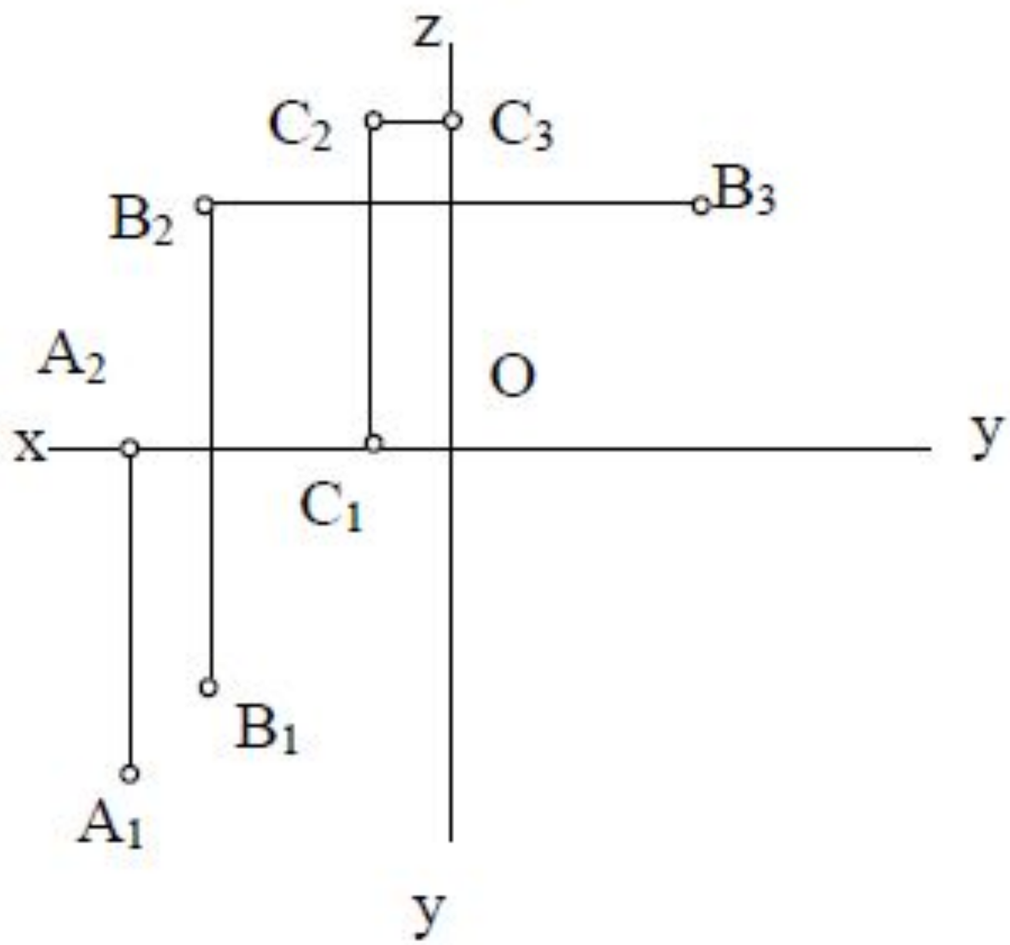

z
П2
A2
Az
A3
П3
ZA
Ax
0
Ay
x
X
yA
y
yA
A1
Ay
П1
y

1. На наглядном и комплексном чертежах построить профильную проекцию A_3 точки A. Написать названия элементов чертежей в таблице.

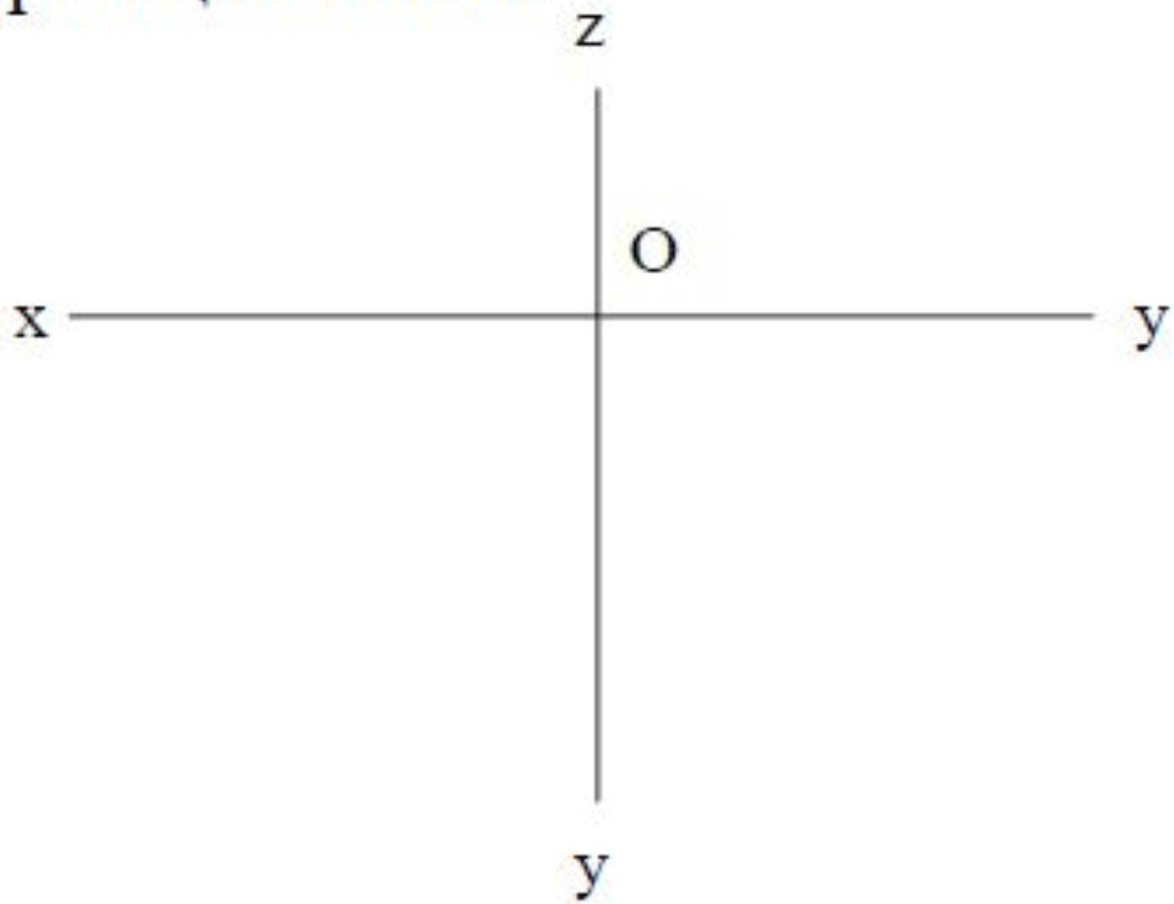


Обозначения	Название элементов чертежей
$П_1$	
$П_2$	
$П_3$	
x, y, z	
A_1	
A_2	
AA_1	
A_1A_2	

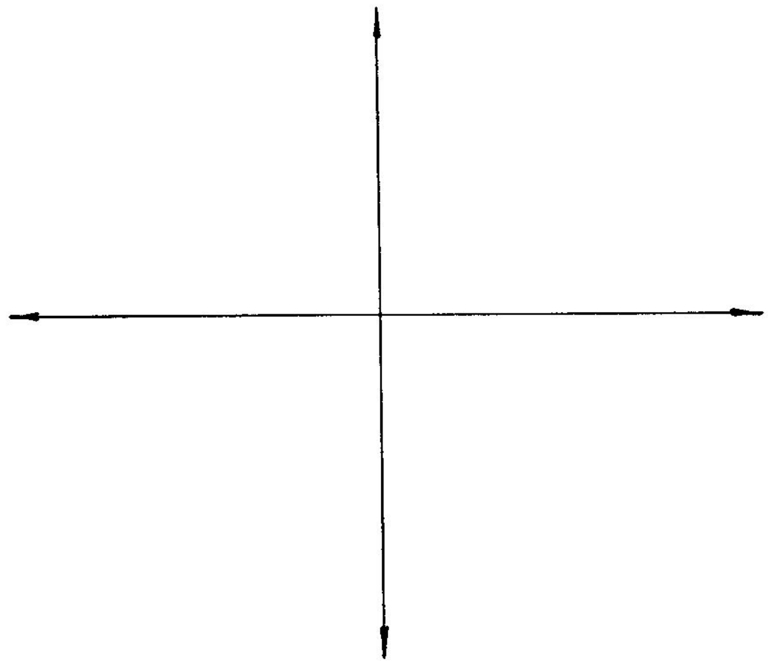
2. Какая из заданных на чертеже точек принадлежит плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$? Записать её координаты.



3. Какой из плоскостей проекций принадлежит точка *A*, координаты которой 20; 30; 0? Построить проекции точки.

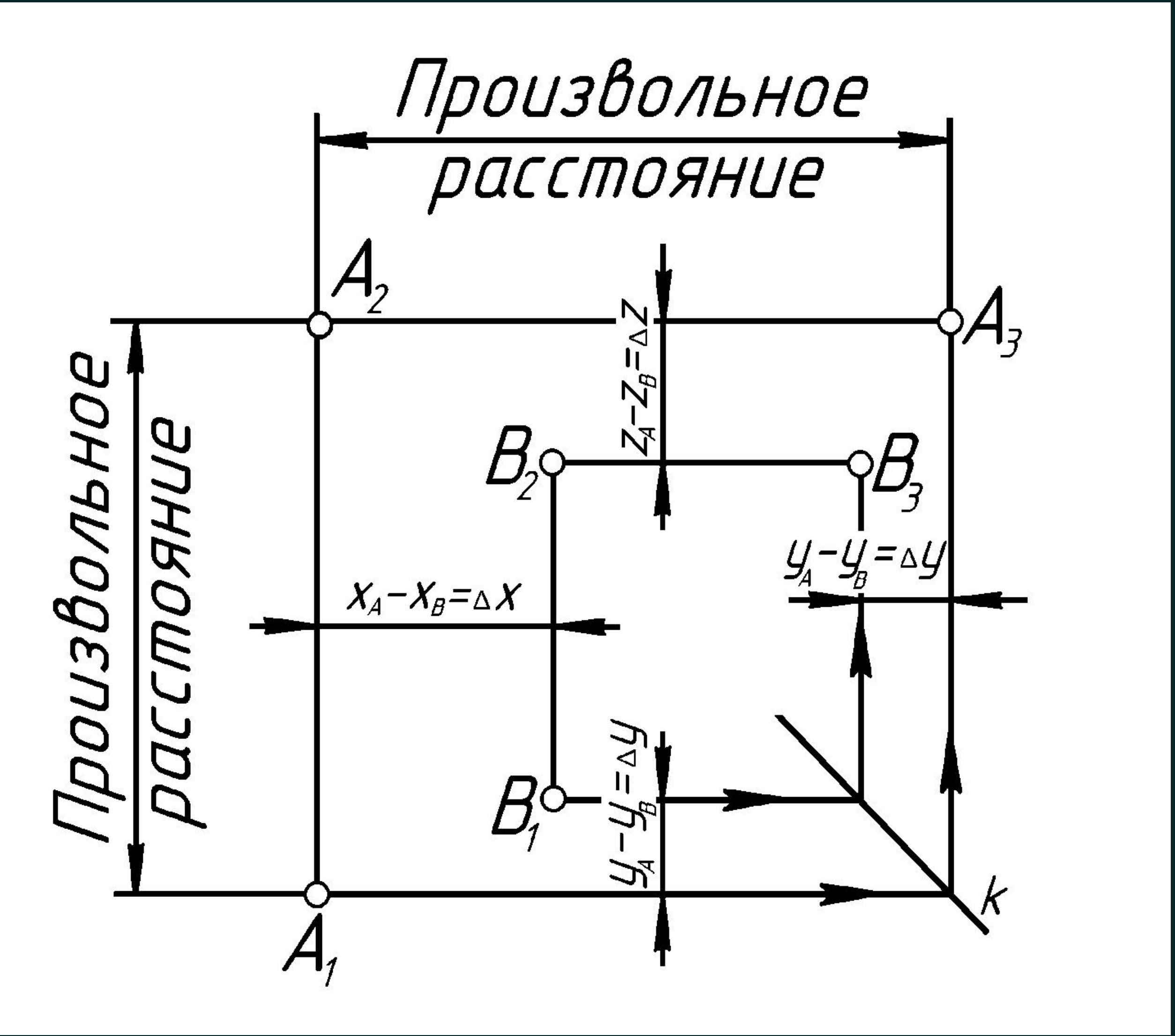


Задача 3.3. Построить комплексный чертеж точки А (20; 25; 30) и точки В (25; 30; 35). Записать координаты проекций точек А и В:

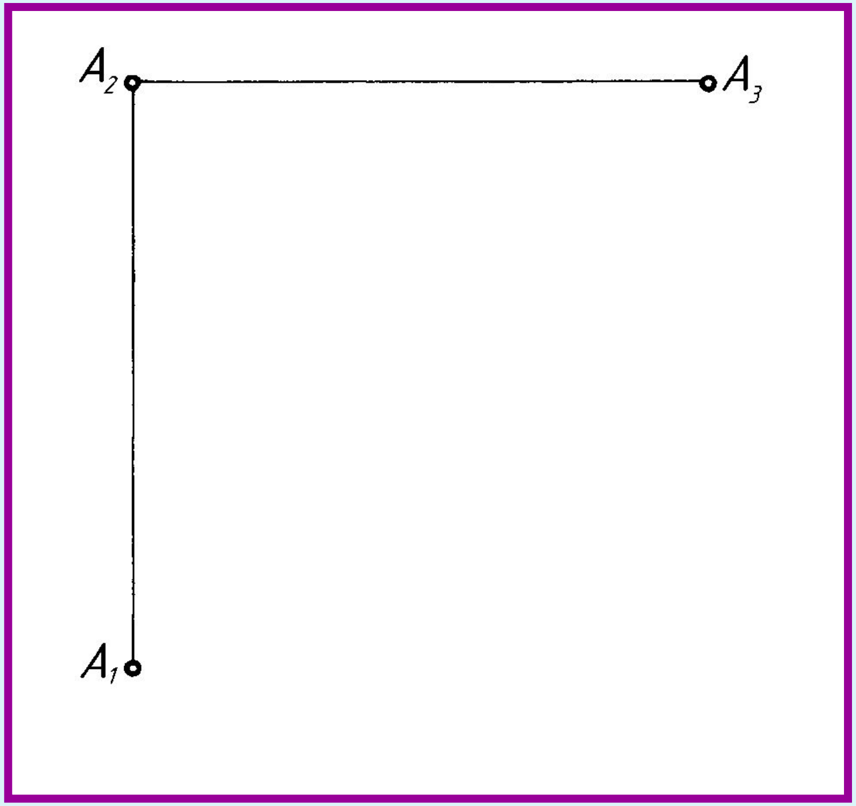


- **Безосный чертеж**

- ***Изображение должно обеспечить наглядность, точность формы и размеров предмета, а не его расположение относительно осей или плоскостей проекций. В связи с этим нет необходимости в наличии осей на комплексном чертеже, но условие связи между проекциями точки на безосном комплексном чертеже сохраняются. Изображение координат точки становится неопределенным. В этом случае для построения комплексного чертежа отрезка АВ можно воспользоваться разностями координат точек А и В (Δx, Δy, Δz) (рис. 3.8), при этом проекции одной из них, например, точки А, задаются произвольно. Точка А называется базовой. Разность координат нечто иное, как длина, ширина и высота***


Произвольное расстояние
Произвольное расстояние
A2
A3
B2
B3
B1
A1
k
zA–zB=ΔZ
xA–xB=ΔX
yA–yB=ΔY
yA–yB=ΔY

Задача . ***Построить три проекции отрезка АВ по заданной разности координат: $\Delta x=X_A-X_B=30$; $\Delta y=У_A-У_B=20$; $\Delta z=Z_A-Z_B=25$ (проекции одной из точек, например, А взять произвольно).***

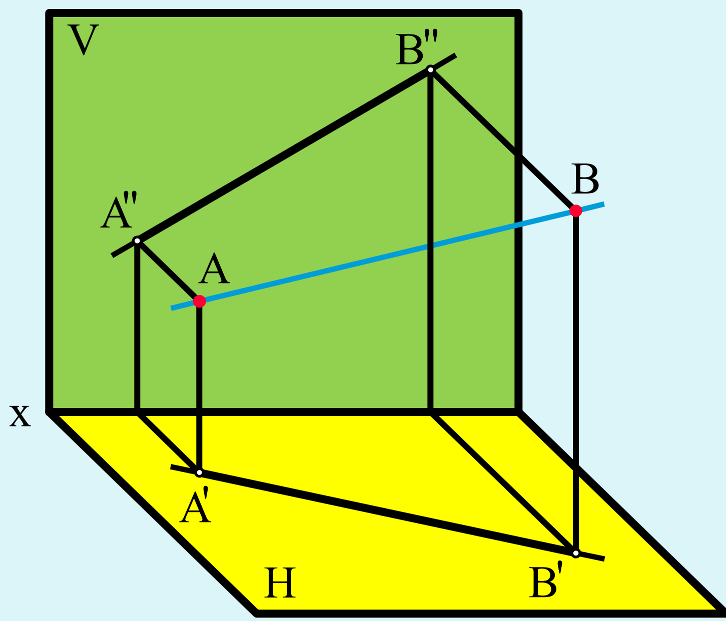


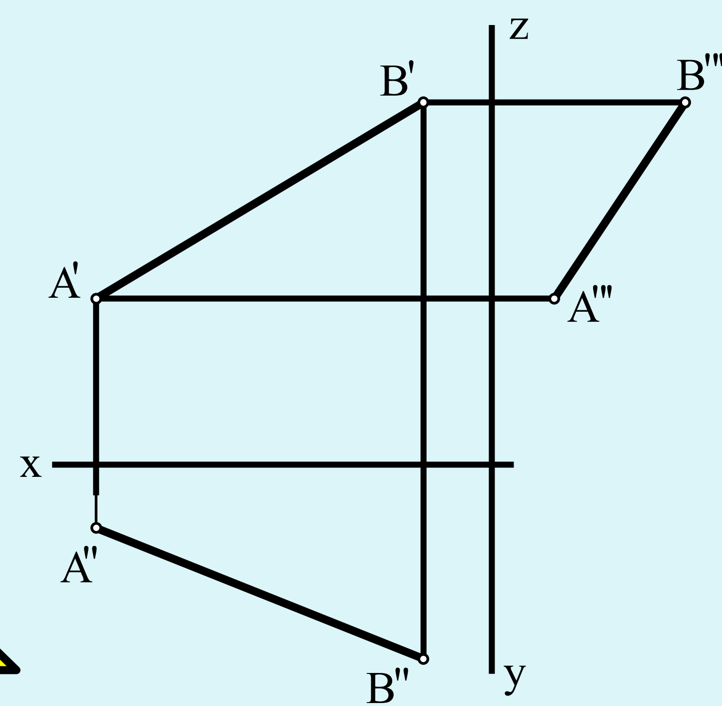
Прямая линия

Задание и изображение на чертеже

Прямая линия в пространстве определяется положением двух ее точек, например **A** и **B**. Значит, достаточно выполнить комплексный чертеж этих точек, а затем соединить одноименные проекции точек прямыми линиями, получим соответственно горизонтальную и фронтальную проекции прямой.

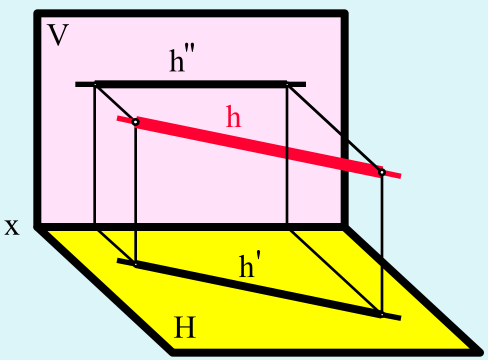
Прямая ***общего положения*** называется прямая не параллельная ни одной из плоскостей проекций. Прямая, параллельная или перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется прямой ***частного положения.***

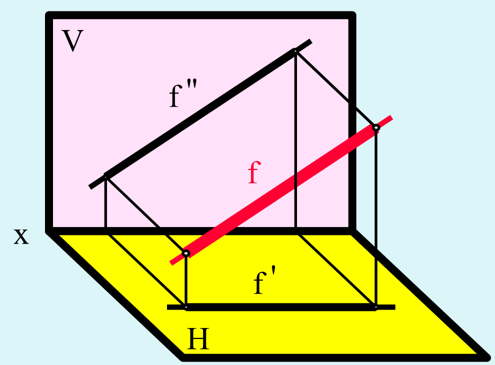


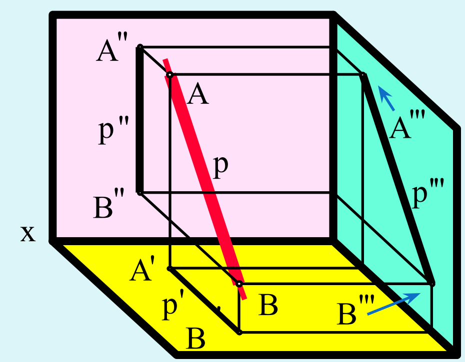


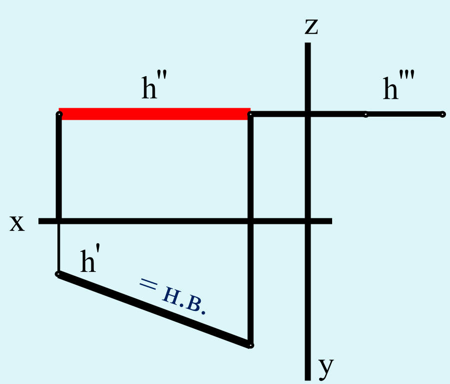
Прямая уровня

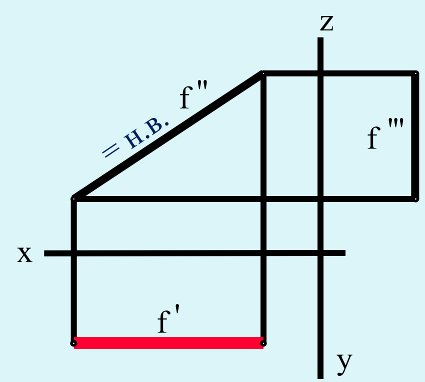
Прямая, параллельная одной из плоскостей проекций, называется прямой ***уровня***.
Название зависит от того, какой плоскости она параллельна.
Различают: ***горизонтальную*** прямую уровня (***горизонталь***) ***h***, ***фронтальную*** **п**рямую уровня (***фронталь***) *f*, ***профильную*** прямую уровня (***профиль***) ***p***.
Все точки прямых уровня имеют равные или высоты (горизонталь), или глубины (фронталь), или широты (профиль). Поэтому соответствующие проекции прямых параллельны проекциям определенных осей координат

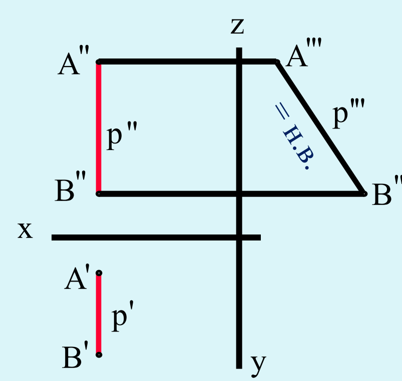








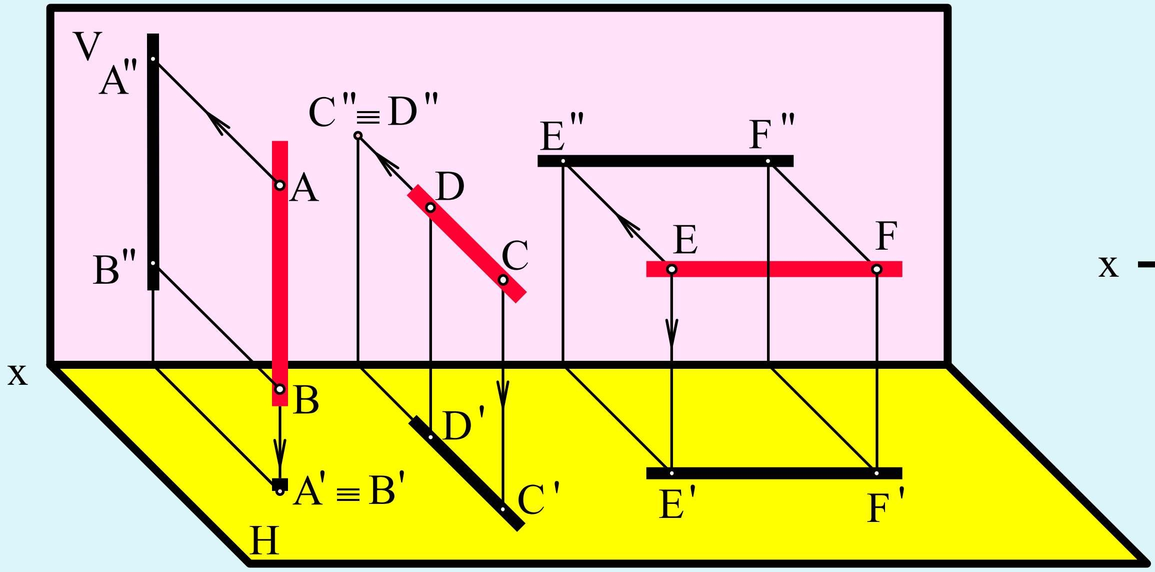


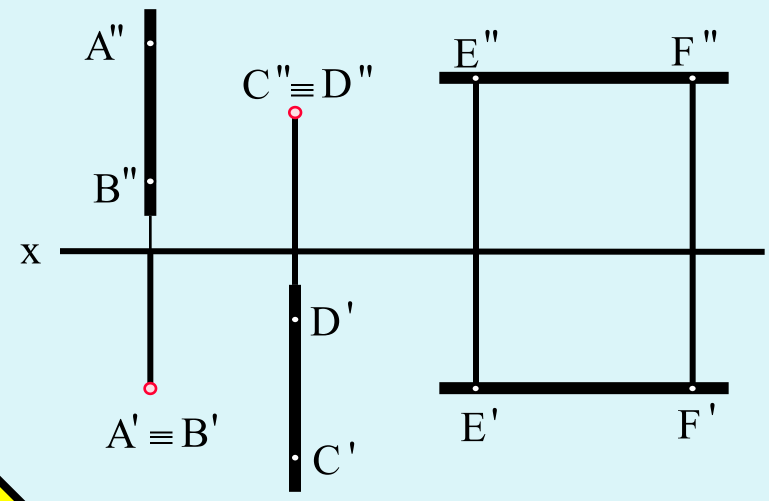


Примечание: н.в. - натуральная величина прямой

Проецирующая прямая

Прямая, перпендикулярная какой- либо плоскости проекции, называется ***проецирующей.***
Различают: ***горизонтально*** проецирующую (**AB**), ***фронтально*** проецирующую (**CD**) и ***профильно*** проецирующую (**EF**).
У ***проецирующей прямой одна проекция вырождается в точку, а две другие проекции параллельны самой прямой и совпадают с направлением линии связи.***



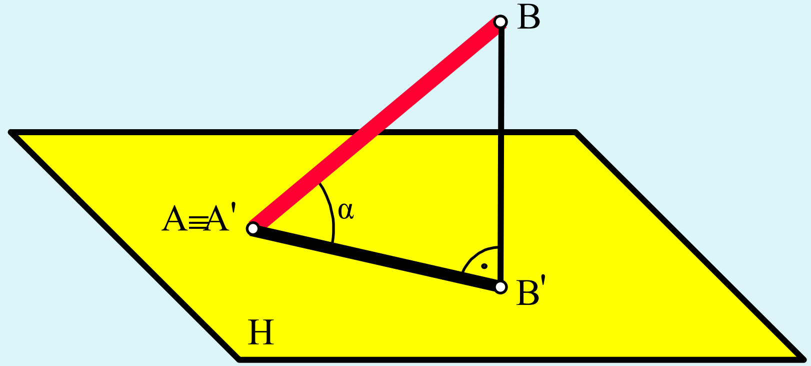


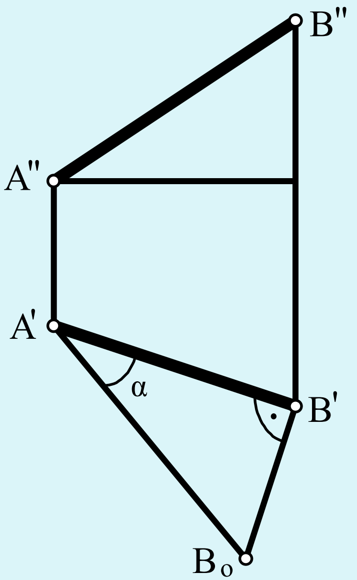
Определение натуральной величины отрезка и углов его наклона к плоскостям проекций способом прямоугольного треугольника

Возьмем отрезок **AB** и построим его ортогональнаю проекцию на горизонтальной плоскости проекций **H**. В пространстве при этом образуется прямоугольный треугольник **A'BB'**, в котором одним катетом является горизонтальная проекция этого отрезка, вторым катетом разность высот точек **A** и **B** отрезка, а гипотенузой является сам отрезок.

На чертеже прямоугольный треугольник построен на горизонтальной проекции отрезка **AB**, второй катет треугольника **B'B$_o$** равен разности высот точек **AB**, замеренную на плоскости **V**, гипотенуза его и будет натуральной величиной отрезка **AB**. Угол между горизонтальной проекцией **A'B'** и гипотенузой **A'B$_o$** треугольника **A'B'B$_o$** это угол наклона данного отрезка **AB** к плоскости **H**.

Аналогичное построение можно сделать на фронтальной проекции отрезка , только в качестве второго катета надо взять разность глубин его концов, замеренную на плоскости **H**.





Взаимное расположение двух прямых

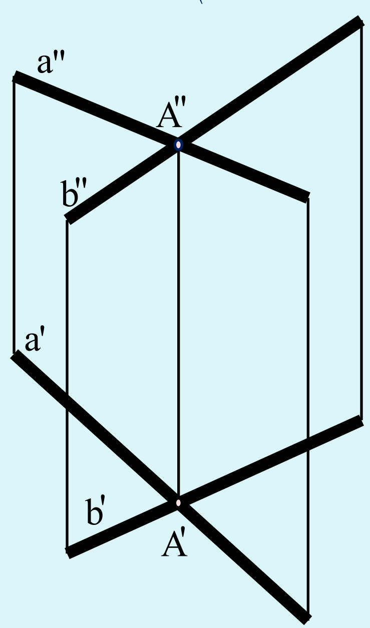
1. ***Пересекающиеся прямые***. В этом случае прямые **a** и **b** имеют одну общую точку, проекции которой **A'** и **A''** расположены на одной линии связи.

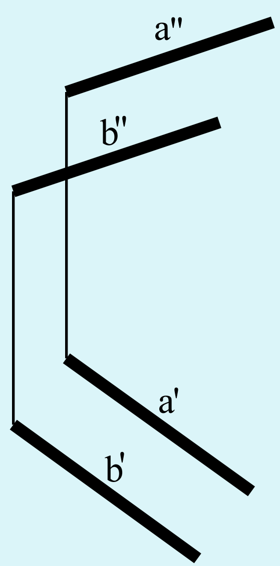
2. ***Параллельные прямые***. По свойству параллельного проецирования проекции параллельных прямых на юбую плоскость параллельны, т.е. если **a** // **b**, то **a'** // **b'**, **a''** // **b''**.

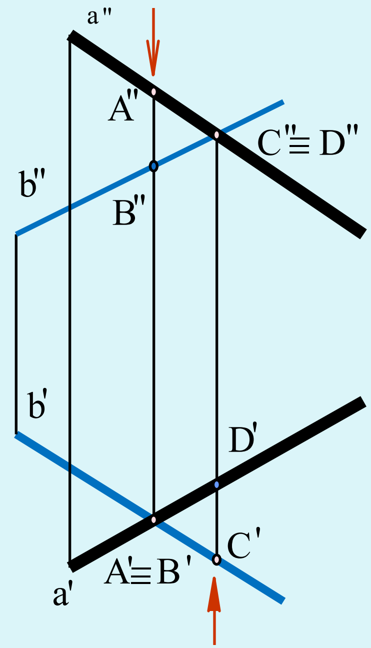
3**. *Скрещивающиеся прямые***. Если две прямые скрещиваются, то их одноименные прекции могут пересекаться в точках, не лежащих на одной линии связи: две точки **A** и **B** - ***горизонтально конкурирующие*** точки, две точки **C** и **D** - ***фронтально конкурирующие***. Как видно из чертежа , точка **A** расположена **над** точкой **B**; следовательно, прямая **a** проходит **над** прямой **b**. Точка **C** расположена **перед** (ближе к зрителю) точкой **D**, следовательно, прямая **b** проходит в этом месте впереди прямой **a.**

Правило определения видимости на комплексном чертеже:

*из двух горизонтально конкурирующих точек на поле **H** видна та точка, которая расположена выше, а из двух фронтально конкурирующих точек на поле **V** видна та точка, которая расположе на ближе (по отношению к наблюдателю).*



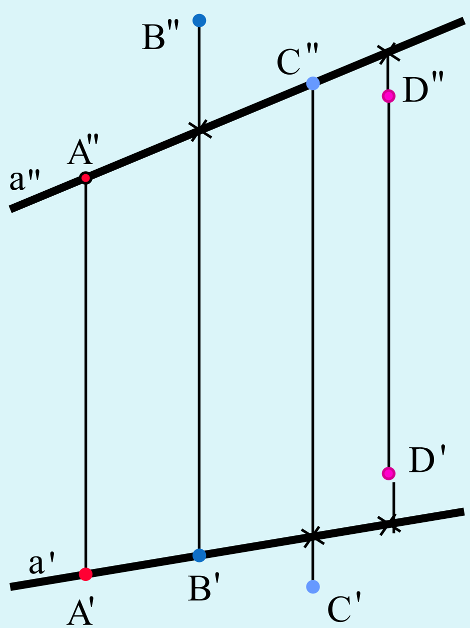


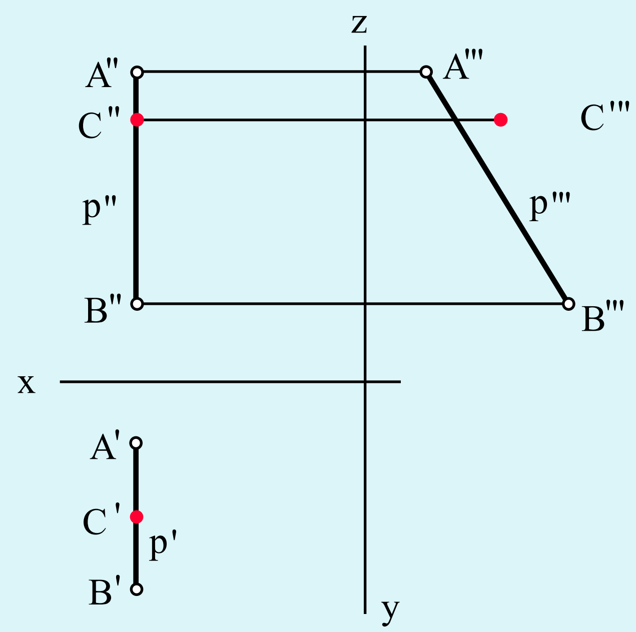


Взаимное расположение точки и прямой

Из свойств параллельного проецирования (свойство принадлежности) известно, что если точка лежит на прямой, то ее проекции должны лежать на одноименных проекциях этой прямой. Поэтому, из четырех точек **A**, **B**, **C** и **D**, приведенных на чертеже, лишь одна точка **A** лежит на прямой. Точка **B** находится **над** прямой, так как она расположена **выше**, чем горизонтально конкурирующая с ней точка прямой **a** (фронтальная проекция этой точки прямой **a** отмечена кстиком). Аналогично, точка **C** находится **перед** прямой **a**, точка **D** расположена **ниже** и **дальше** точки прямой **a**.

Определение взаимного положения точки и профильной прямой выполняется с помощью построения профильной проекции . На чертеже точка **C** расположена **над** и **перед** прямой **AB**.





Взаимно перпендикулярные прямые

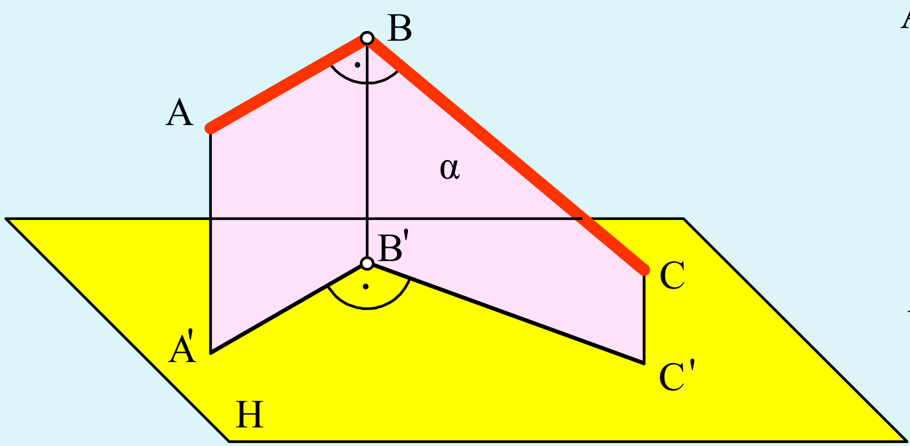
Для того, ***чтобы прямой угол проецировался без искажения, необходимо и достаточно, чтобы одна его сторона была параллельна, а другая не перпендикулярна к плоскости проекций***.

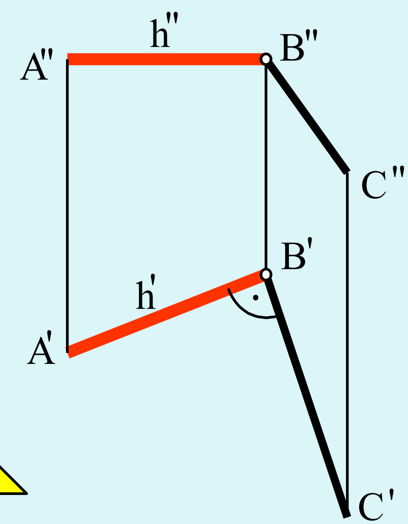
Пусть сторона **AB** прямого угла **ABC** параллельна плоскости **H**. Требуется доказать, что проекция его: угол **A'B'C'** равен 90.

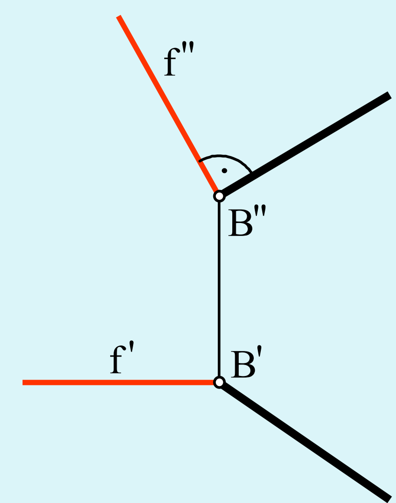
Прямая **AB** перпендикулярна плоскости , так как **AB** перпендикулярна двум прямым этой плоскости **BC** и **BB'**, проходящих через точку **B**. Прямая **AB** и ее прекция **A'B'** две параллельные прямые, поэтому **A'B'** также перпендикулярна плоскости . Следовательно, **A'B'** перпендикулярна **B'C'**.

Две взаимно перпендикулярные прямые (пересекающиюся или скрещивающиеся) тогда сохраняют свою перпендикулярность в горизонтальной проекции, если одна из этих прямых является ***горизонталью***.

Две взаимно перпендикулярные прямые сохраняют свою перпендикулярность во фронтальной проекции, если одна из них является ***фронталью***.







Плоскость

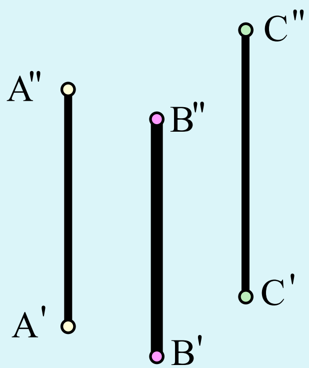
Задание и изображение на чертеже

Положение плоскости в пространстве и на чертеже можно определить:

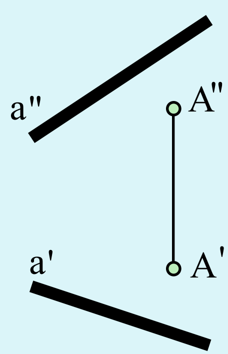
1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой вне ее;
3) двумя пересекающимися прямыми;
4) двумя параллельными прямыми;
5) любой плоской фигурой.

Плоскость, не перпендикулярная ни одной плоскости проекций, называется плоскостью общего положения. На комплексном чертеже проекции элементов, задающих плоскость, занимают общее положение.

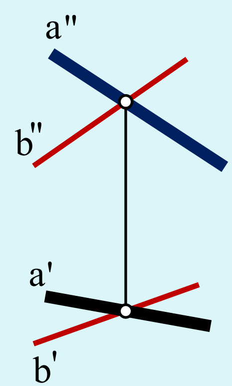
Плоскость, перпендикулярная или параллельная одной из плоскостей проекций, называется плоскостью частного положения.



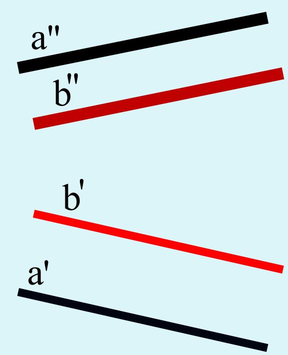
1)



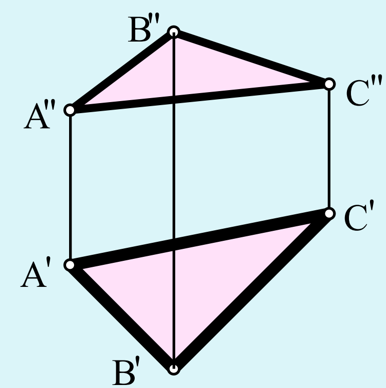
2)



3)



4)



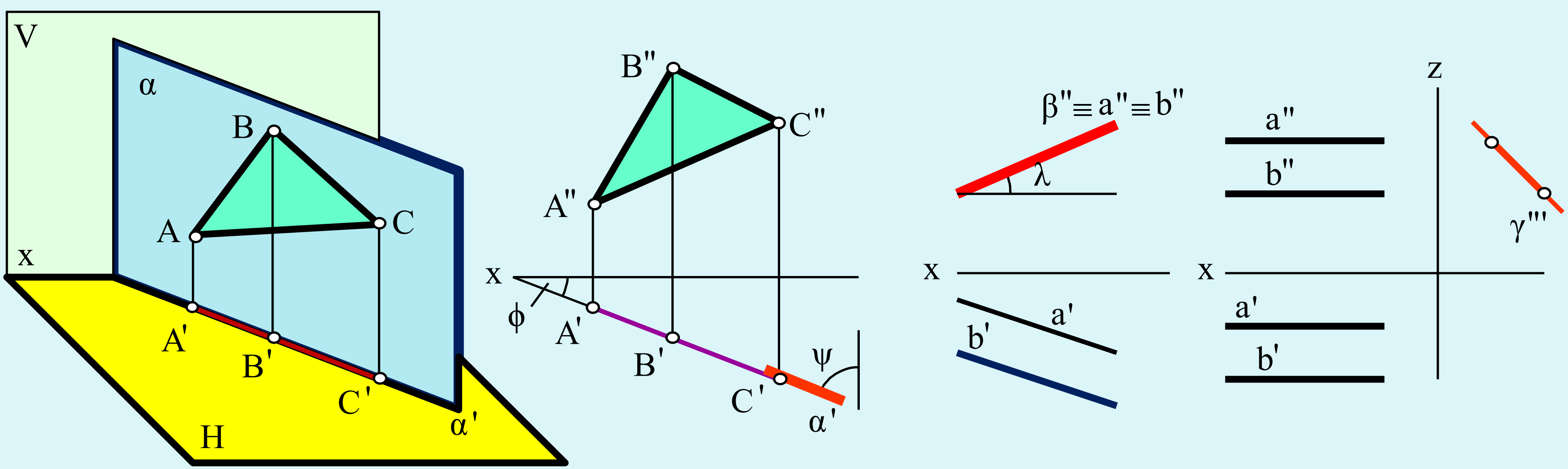
5)

Различные положения плоскостей относительно плоскостей проекций

Проецирующая плоскость

Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется проецирующей. Различают: а) горизонтально проецирующая плоскость (**$\alpha \perp H$**); б) фронтально проецирующая плоскость (**$\beta \perp V$**); в) профильно проецирующая плоскость (**$\gamma \perp W$**).

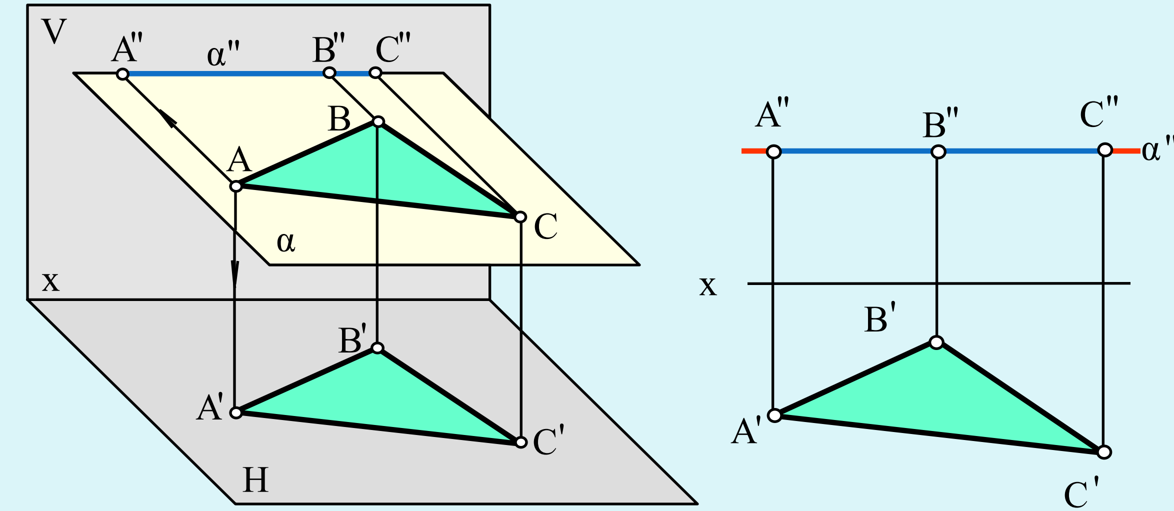
У проецирующих плоскостей одна проекция вырождается в прямую. Поэтому проекция фигуры, принадлежащей такой плоскости (треугольнок **ABC**), вырождается в прямую (**A'B'C'**). Прецирующая плоскость однозначно задается на чертеже своей линейной проекцией (**α', β'', γ'''**).



а) б) в)

Плоскость уровня

Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, называется плоскостью уровня. Различают:



а)

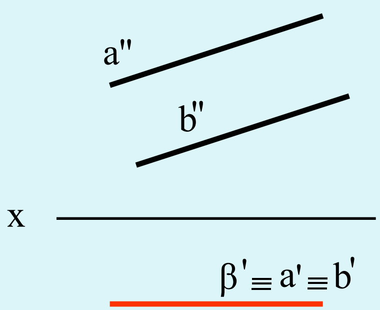
а) горизонтальная плоскость уровня (**α // H**);

б) фронтальная плоскость уровня (**β // V**);

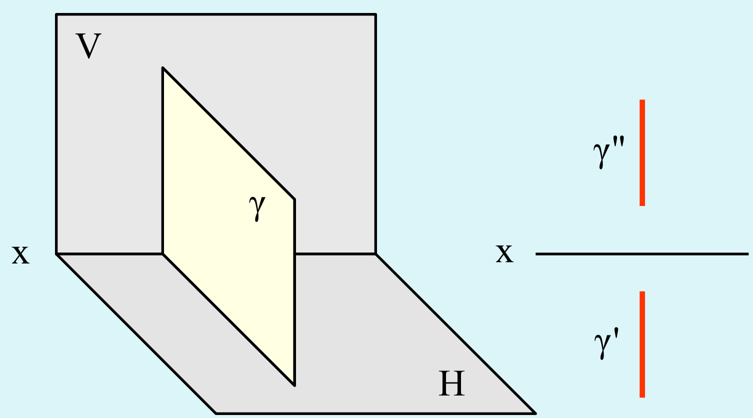
в) профильная плоскость уровня (**γ // W**).

Плоскость уровня является частным случаем проецирующей плоскости, поэтому на чертеже задается своей линейной проекцией (**α'', β', γ '', γ '**).

Фигура, принадлежащая плоскости уровня, проецируется на соответствующую плоскость проекций в натуральную велмчину.



б)

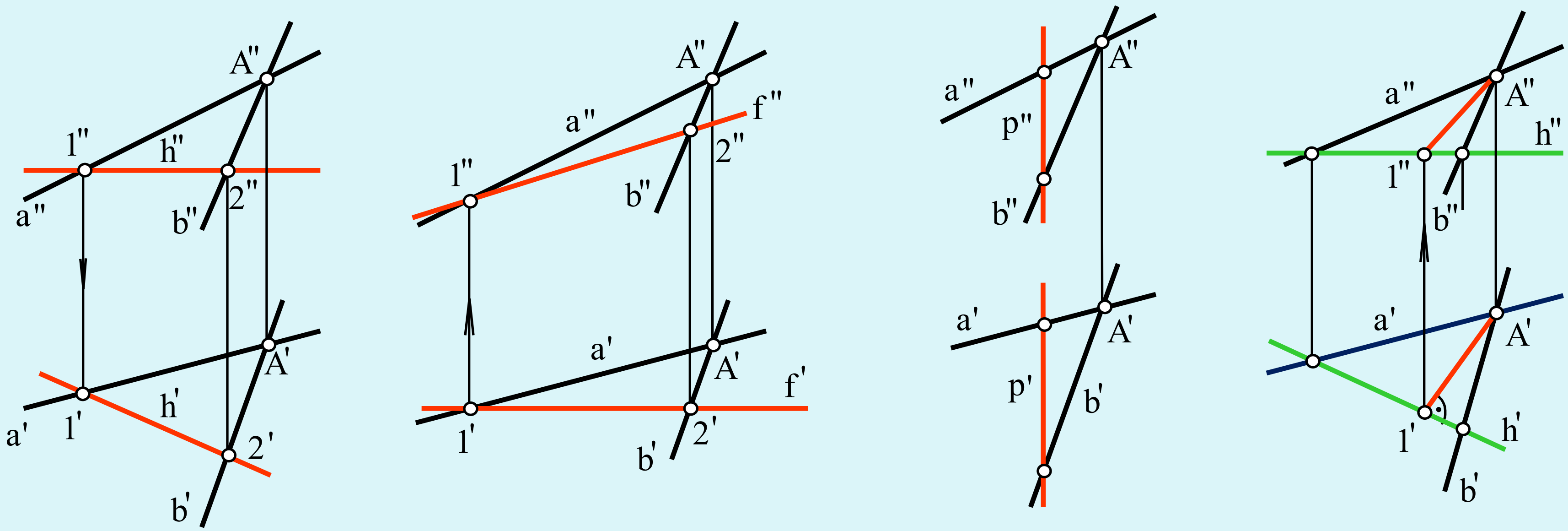


в)

3.3. Главные линии плоскости

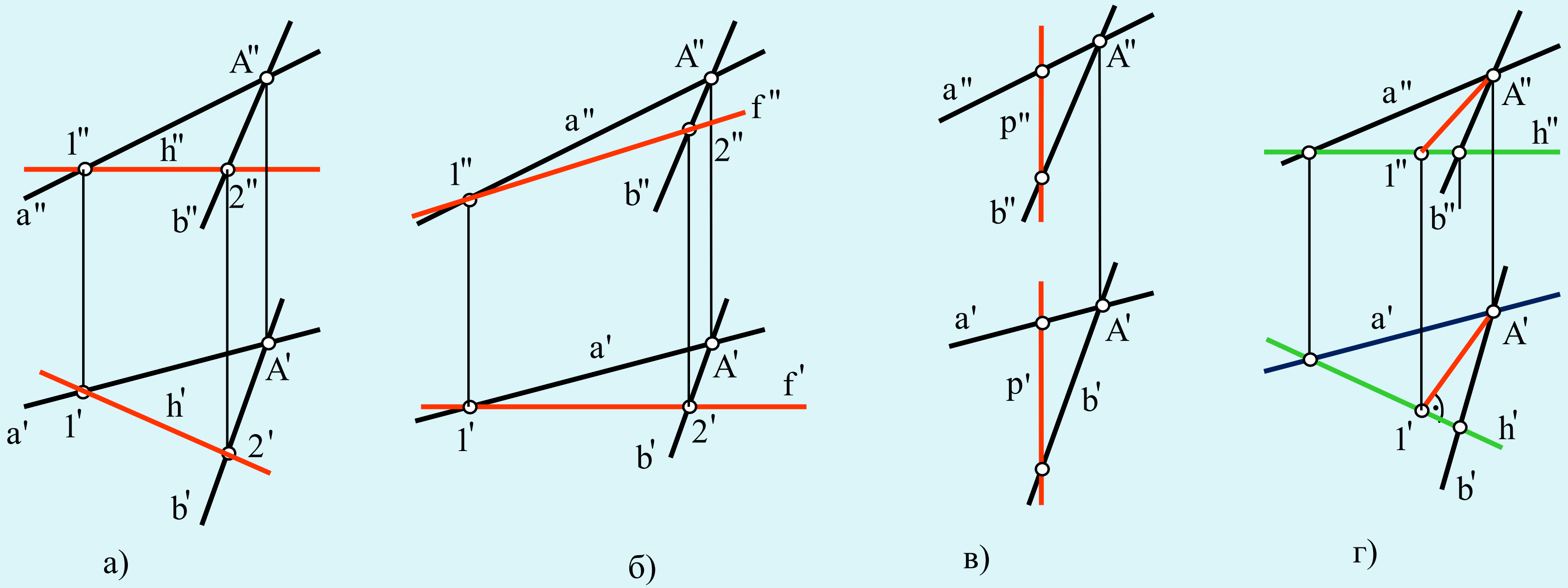
В любой плоскости можно провести бесчисленное множество главных линий: а) *горизонтали;* *б) фронтали;* в) *профильные* прямые; г) линии *наибольшего ската*. Линии наибольшего ската - прямые, проведенные в плоскости *перпендикулярно к горизонталям* этой плоскости.
Построение горизонтали начинают с ее фронатльной проекции **h''**; построение фронтали плоскости начинают с ее горизонтальной проекции **f '**; линию ската начинают с ее горизонтальной проекции **A' 1'**, которая перпендикулярна **h'**.

Поэтапное построение горизонтали, фронтали и линии наибольшего ската показано на следующем слайде.



а) б) в) г)

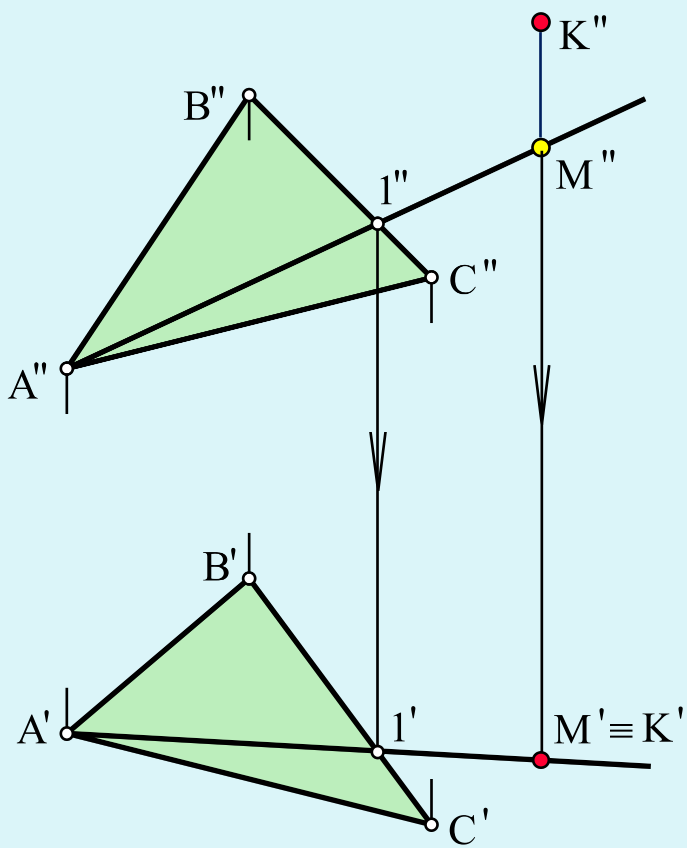
Поэтапное построение главных линий плоскости



3.4. Взаимное расположение точки и плоскости

Точка лежит в плоскости, если ее проекции находятся на одноименных проекциях какой-либо прямой, принадлежащей данной плоскости.

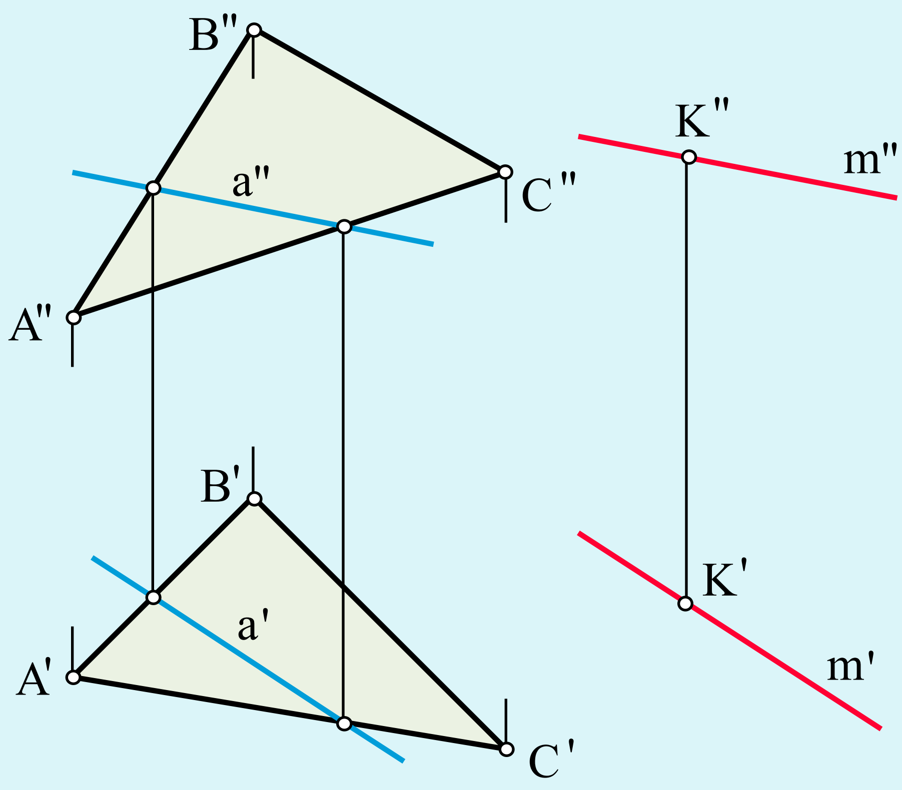
Прозвольно выбирают одну проекцию точки **M**, например, фронтальную ее проекцию **M''** . Искомую горизонтальную проекцию **M'** точки **M** находят по линиям связи на горизонтальной проекции (**A'1'**) прямой **A1** плоскости. Таких вспомогательных прямых в плоскости можно провести через точку **M** бесчисленное множество. Одна из них и представлена на эпюре.



Если взять точку **K** горизонтально конкурирующую с точкой **M** и расположенную *над* ней, то точка **K** будет расположена и *над* плоскостью.

3.5. Взаимное расположение прямой линии и плоскости

Возможны следующие три случая относительного расположения прямой и плоскости: прямая принадлежит плоскости, прямая параллельна плоскости, прямая пересекает плоскость.
На основании свойства плоскости: если прямая линия соединяет две точки данной плоскости, то такая прямая всеми своими точками лежит в этой плоскости. Построение прямых, принадлежащих плоскости рассмотрены на слайде (главные линии плоскости).
Из стереометрии известно: если прямая параллельна плоскости, то она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости. На эпюре параллельность прямой **m** и плоскости **ABC** доказывается тем, что **m''** // **a''**, **m'** // **a'** ; прямая принадлежит плоскости **ABC**.



3.5.1. Прямая линия, пересекающая плоскость

Поставлена задача:

Определить точку К пересечения данной прямой а с плоскостью α.
Определить видимость прямой.

Решение задачи выполняется в три этапа.

Алгоритм решения задачи

1. Заключить данную прямую во вспомогательную плоскость-посредник (проецирующую или уровня)
2. Построить линию пересечения вспомогательной плоскости-посредника с заданной
3. Найти точку пересечения полученной линии пересечения с заданной прямой

Символическая запись алгоритма

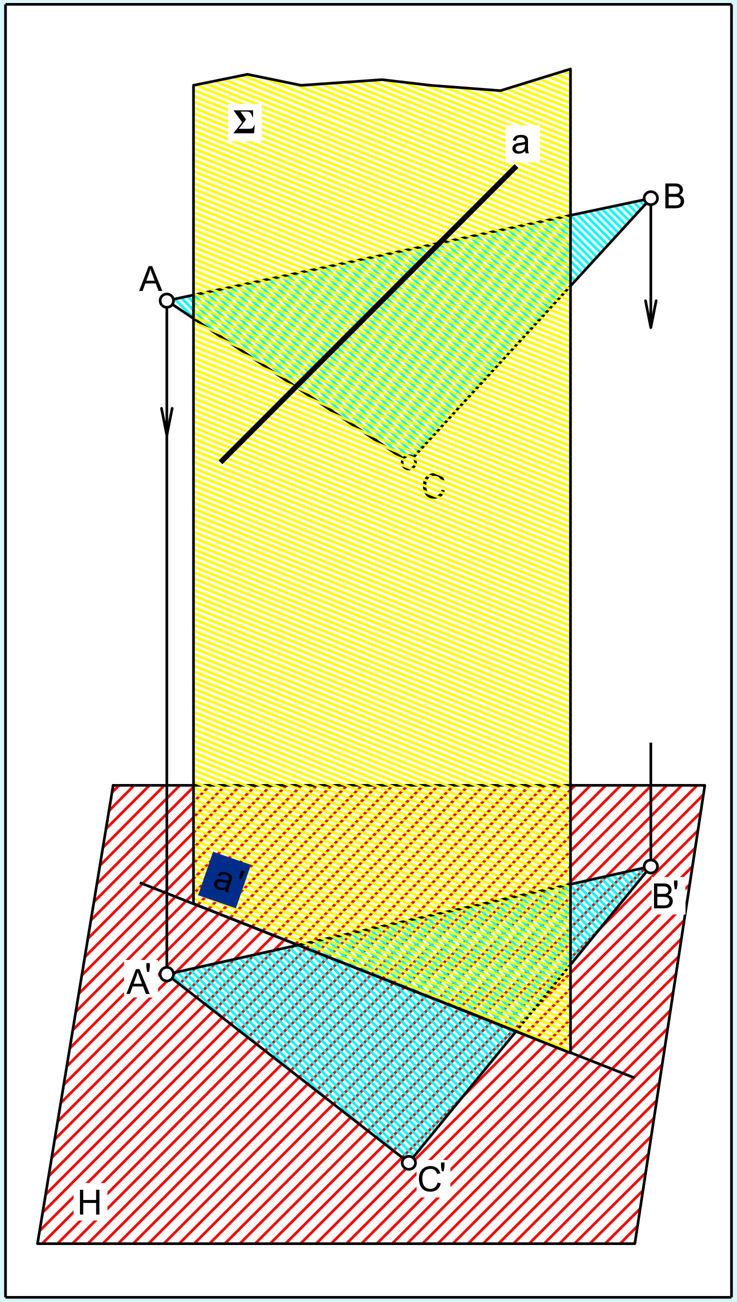
$a \subset \Sigma(\Sigma')$

$m = \Sigma \cap \alpha(ABC)$

$K = m \cap a$

Определить видимость прямой **а** по правилу конкурирующих точек

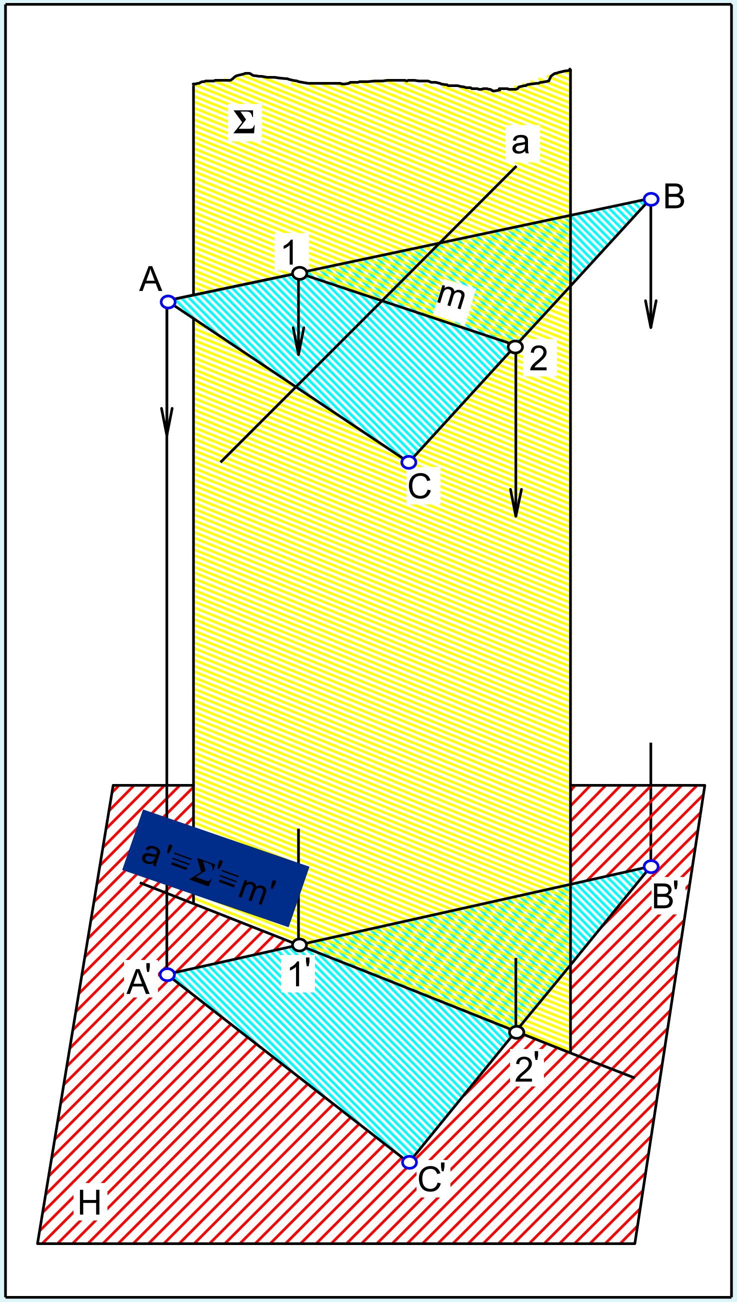
Геометрические образы (пл. ABC, прямая a) спроецированы на плоскость H.



А теперь посмотрите как выполняются эти этапы алгоритма на пространственном рисунке и при проецировании всех элементов задачи на плоскости H.

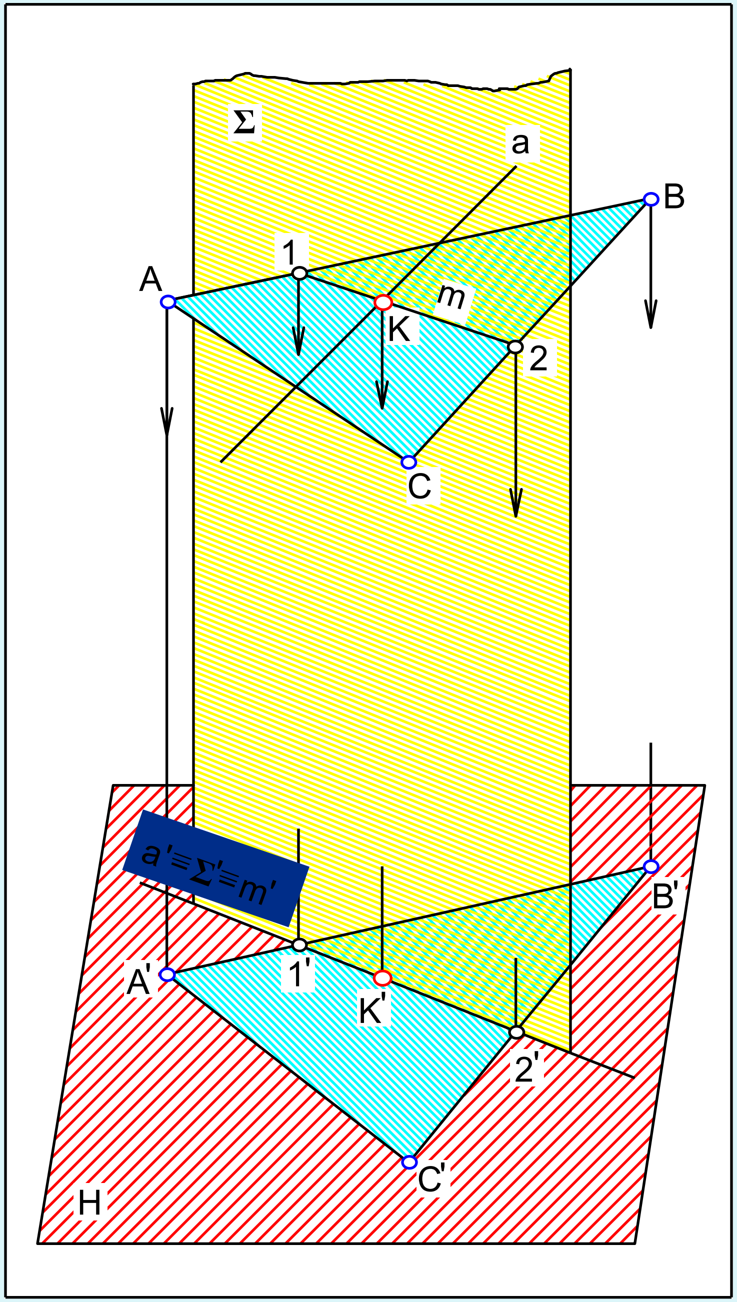
Выполняем 1-й этап алгоритма

$a \subset \Sigma(\Sigma')$



Выполняем 2-й этап алгоритма

$m=\Sigma\cap\alpha(ABC)$



Выполняем 3-й этап алгоритма

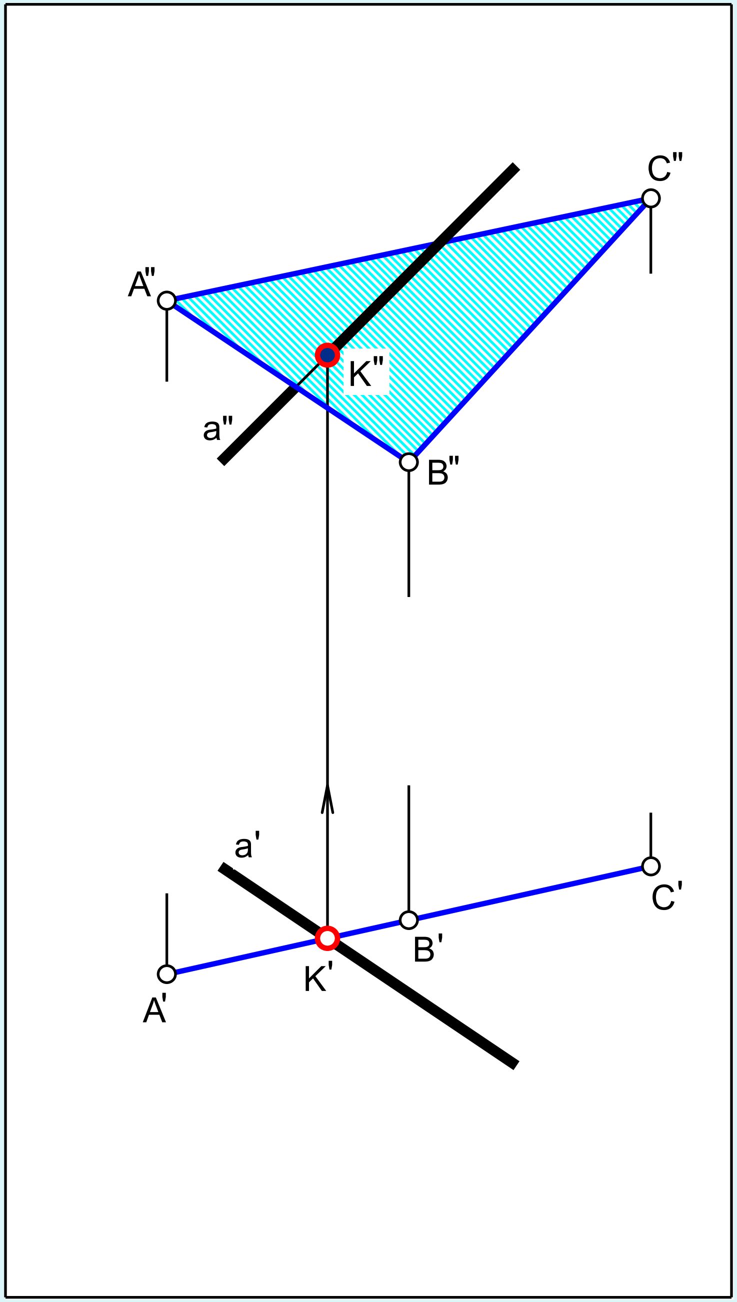
$K = m \cap a$

Точка К - искомая точка пересечения данной прямой а с плоскостью ABC.

Рассмотрим применение данного алгоритма при решении задачи на построение точки К пересечения прямой а с плоскостью α. Возможны три варианта условия данной задачи:

- прямая а - общего положения, плоскость α - проецирующая (или уровня);
- прямая а - проецирующая, плоскость α - общего положения;
- прямая а - общего положения, плоскость α - общего положения.

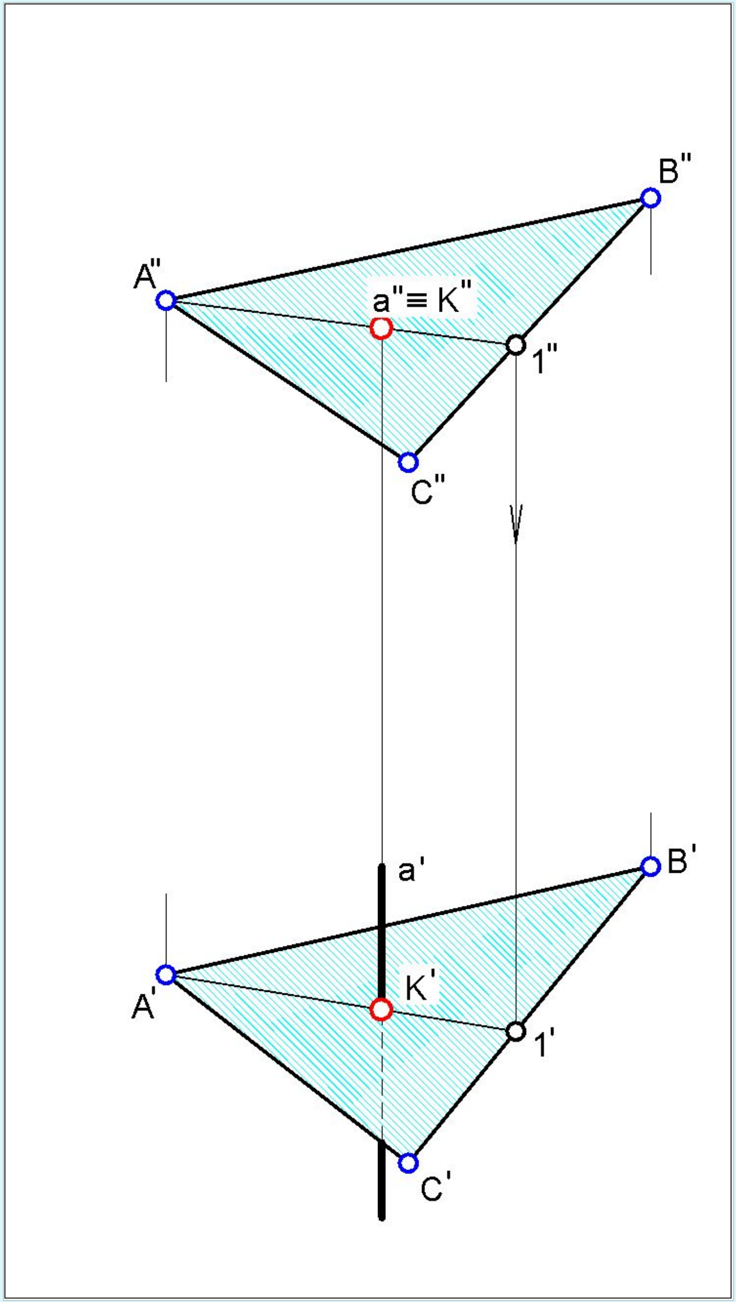
Решение первых двух задач можно выполнить, не применяя алгоритма, так как один из заданных образов частного положения.



В первом случае плоскость α (АВС) - ***горизонтально проецирующая***.

Поэтому горизонтальная проекция К' искомой точки К определяется как точка пересечения линейной проекции А'В'С' плоскости α с горионтальной проекцией a' данной прямой a.

Фронтальная проекция К" точки К строится из условия принадлежности точки К прямой a.

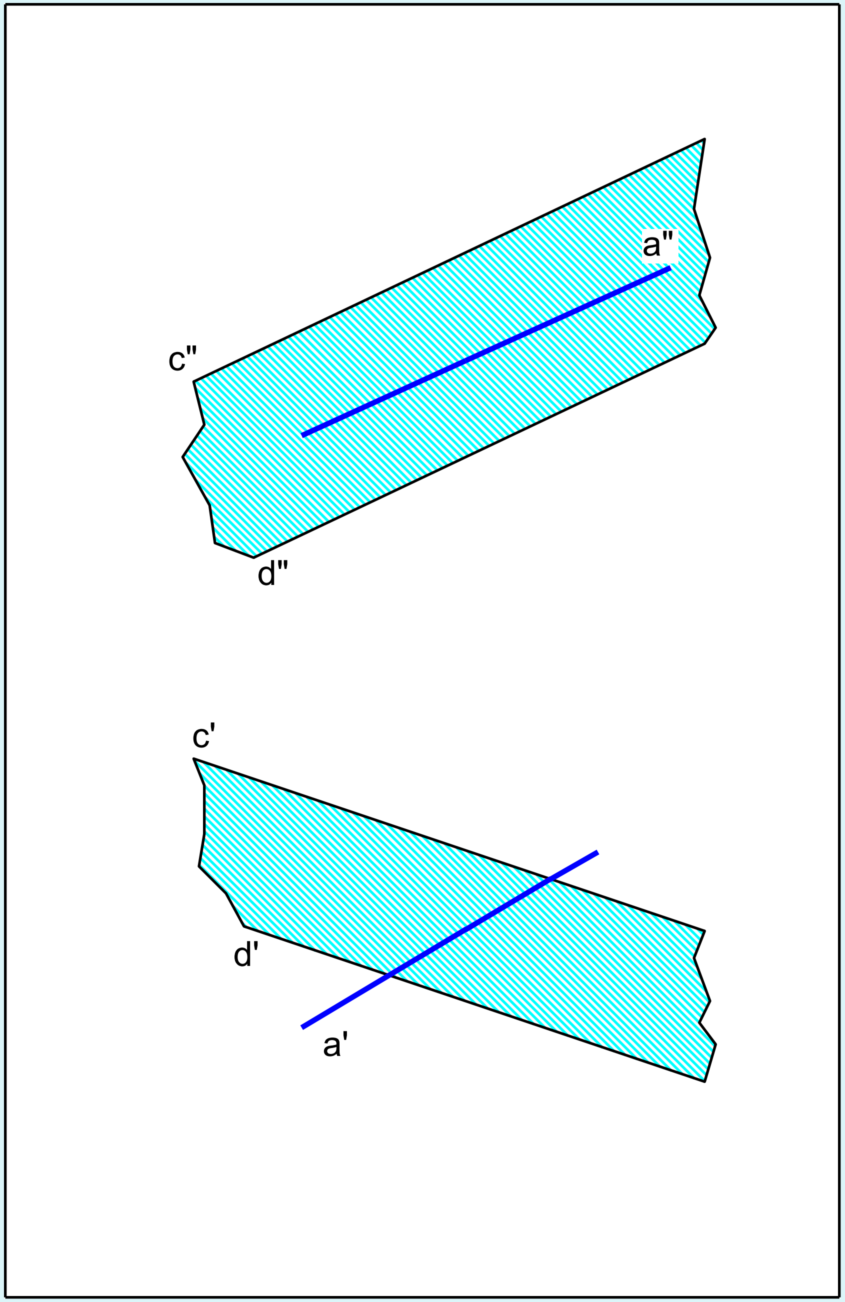


Во втором случае прямая а - ***фронтально-проецирующая***.

Поэтому фронтальные проекции любой ее точки, а также и искомой К пересечения а с плоскостью α (ABC), совпадает с ее вырож-денной проекцией а" ≡ К".

Построение горизонтальной проекции К' точки К выполняется из условия принад-лежности точки К плоскости α: точка К принадлежит плоскости α, так как она принадлежит ее прямой А1 (К' находится как точка пересечения прямой А' 1' с прямой а').

Видимость прямой а в этих задачах решает-ся просто - с помощью реконструкции данных образов (по наглядности).

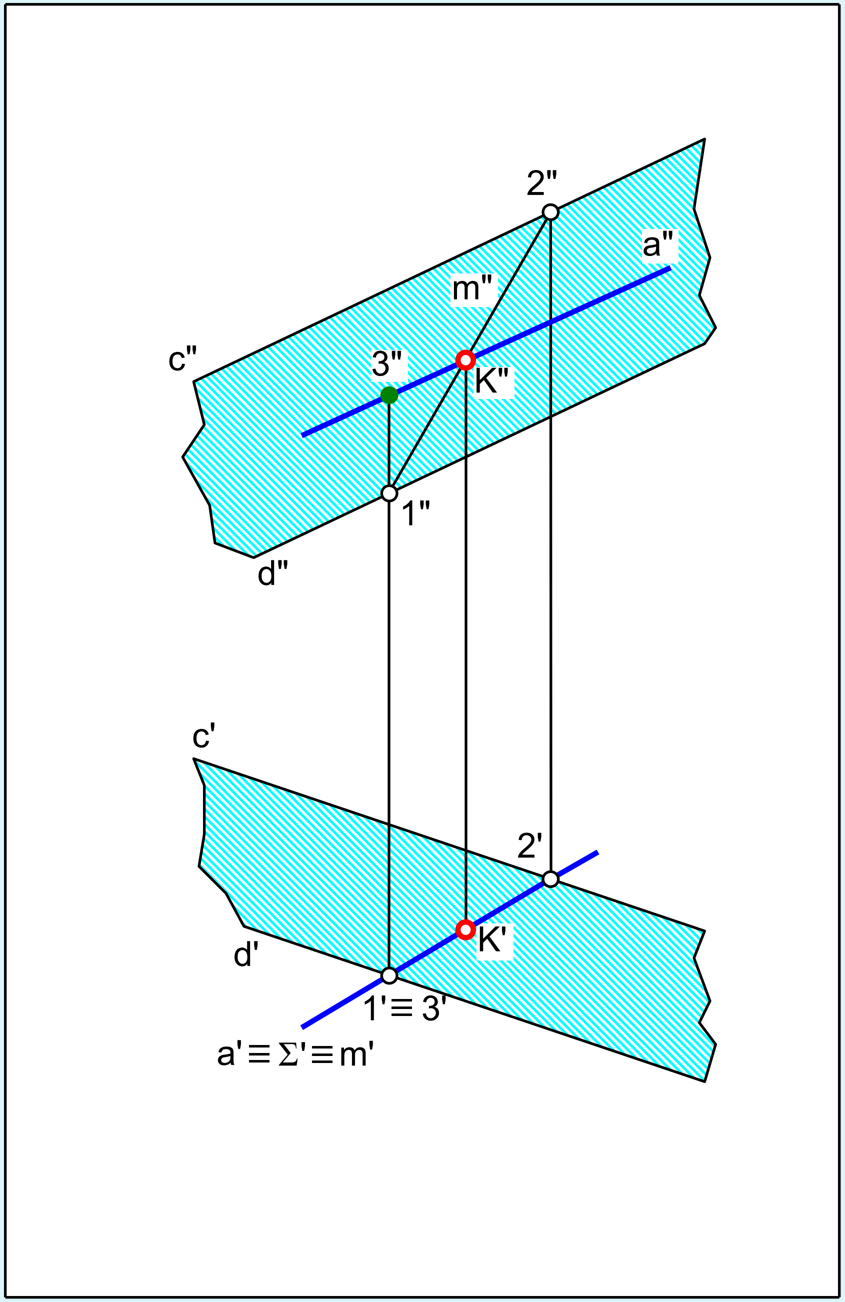


В третьем, общем, случае построение искомой точки К пересечения прямой a с плоскостью α (c//d) выполнено по описанному алгоритму.

1) прямую a заключают во вспомогательную горизонтально проецирующую плоскость-посредник Σ(Σ');

2) строят прямую m пересечения плоскостей α (c//d) и Σ(Σ'). На чертеже это отразится записью (a'≡ Σ'≡ m'). Фронтальную проекцию m" строят из условия ее принадлежности данной плоскости α(m и α имеют общие точки 1 и 2);

3) находят точку K" , как результат пересечения a" с m", а K' строят по принадлежности прямой m'. Точка K(K", K') - искомая точка пересечения прямой a с плоскостью α (c//d).



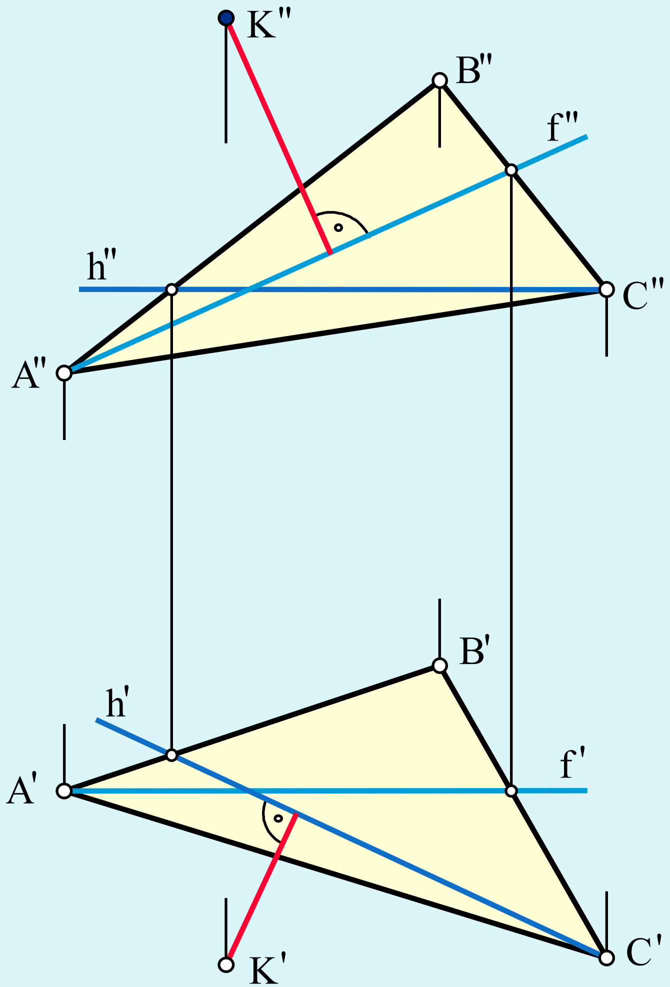
Задачу заканчивают определением видимости прямой по правилу конкурирующих точек. Так, на плоскости **H** видимость определена с помощью горизонтально конкурирующих точек **1** и 3(1'≡3'), где точка 1 принадлежит плоскости α а точка 3 - прямой а. Точка 3 расположена над точкой 1, поэтому точка 3 и прямая а в этом участке на плоскости H будет видима.

На фронтальной плоскости видимость может быть определена или с помощью пары фронтально-конкурирующих точек, или по реконструкции данных образов (при восходящей плоскости видимость одинаковая на плоскостях H и V).

Данная задача после определения видимости прямой а имеет вид данного рисунка.

Если прямая линия пересекает плоскость под прямым углом, то на комплексном чертеже проекции этой прямой располагаются перпендикулярно проекциям соответствующих линий уровня лоскости.

Если, например, на плоскость, заданную треугольником **ABC**, необходимо опустить перпендикуляр из точки К, то построение выполняют следующим образом.



На плоскости проводят горизонталь **h** (**h''**, **h'**) и фронталь **f** (**f '**, **f ''**).

Затем из заданных проекций **К'** и **К''** точки **К** опускают перпендикуляры соответственно на **h'** и **f ''**.

Прямая, проведенная таким образом из точки **К**, будет перпендикулярна плоскости треугольника **АВС** (так как прямая, перпендикулярная плоскости должна быть перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости).

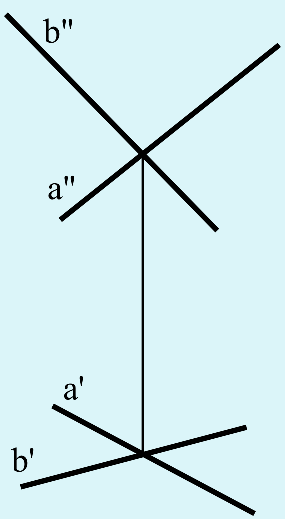
3.6. Взаимное расположение двух плоскостей

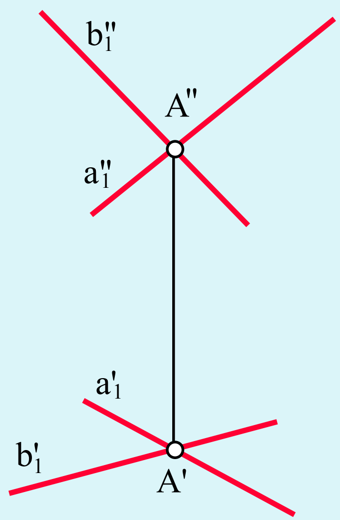
Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельными, либо пересекающимися. *Плоскости параллельны*, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

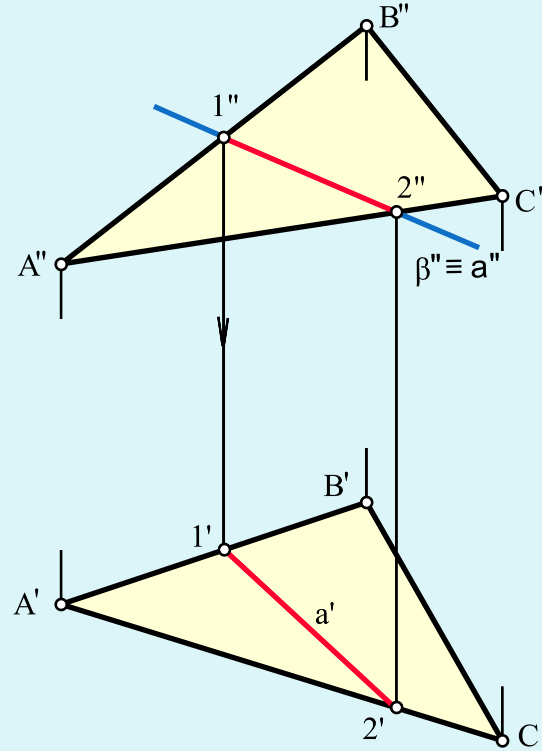
Искомая плоскость **β**, параллельная заданной плоскости **α**, определена прямыми $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{b_1}$ соответственно параллельными **a** и **b** заданной плоскости и проходящими через произвольную точку пространства **A**.

Пересекающиеся плоскости. Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям.

Если одна из пересекающихся плоскостей занимает частное положение, то ее вырожденная проекция **β''** включает в себя и проекцию **a''** линии **a** пересечения плоскостей. Горизонтальную проекцию **a'** прямой **a** строят по двум общим с плоскостью точкам **1** и **2**.





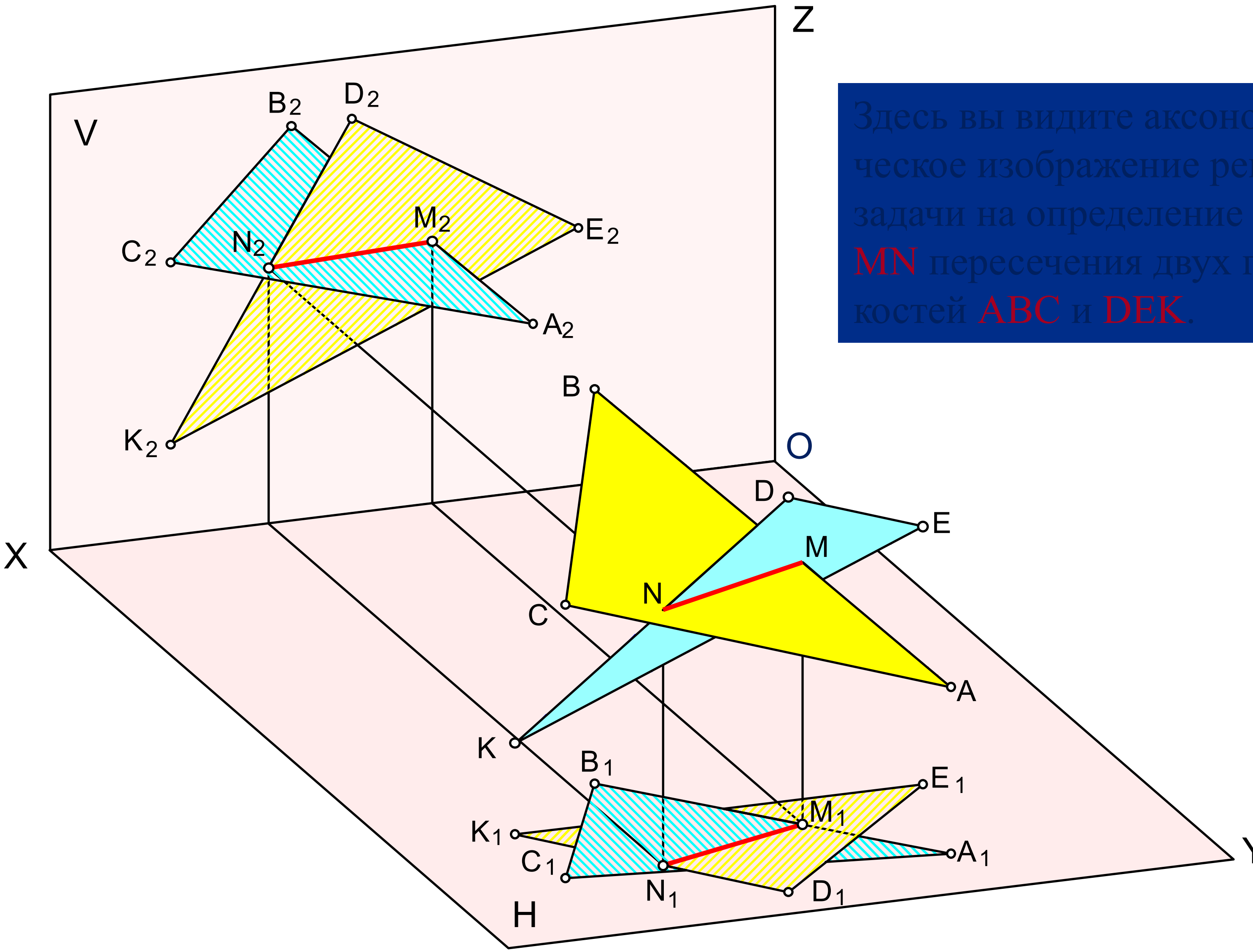


Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения

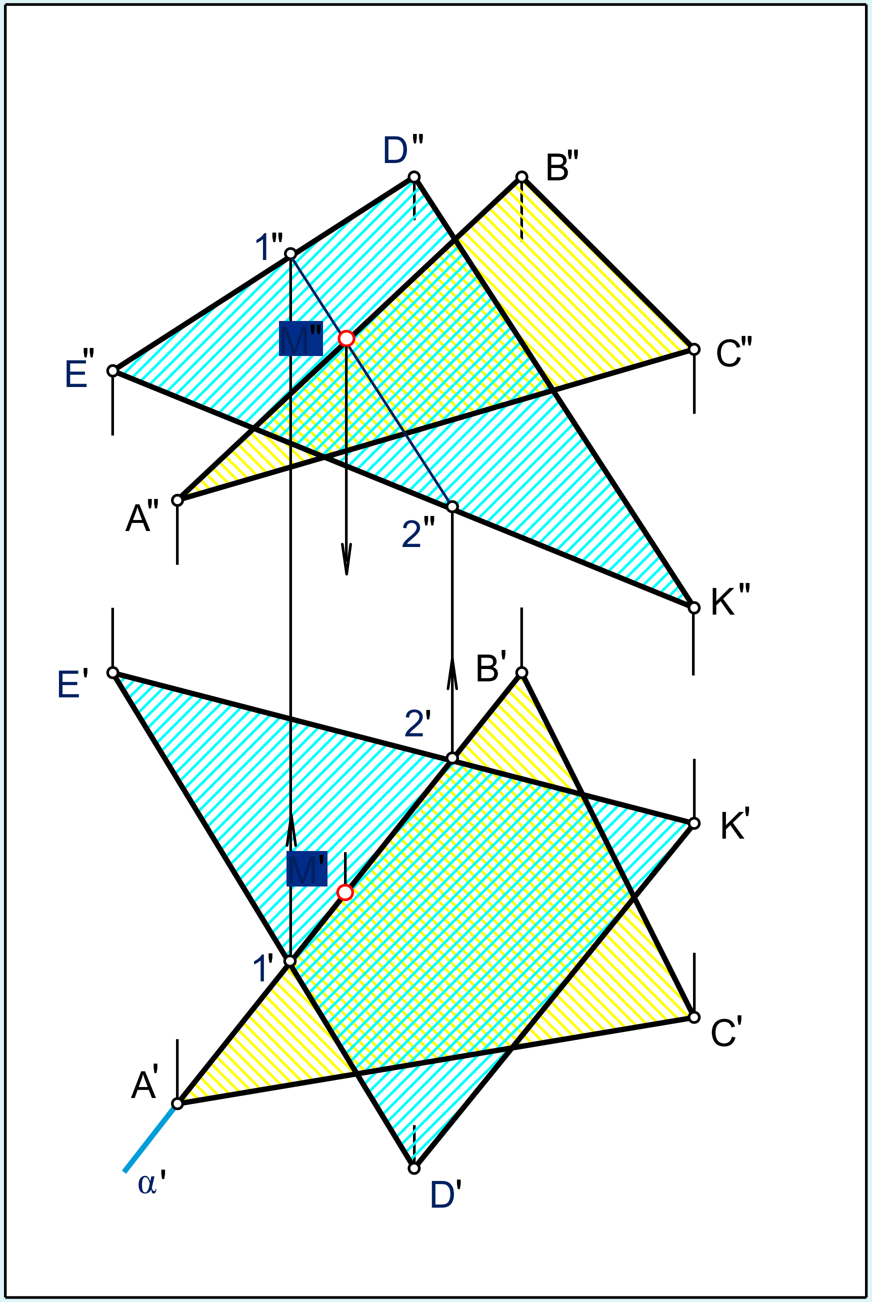
Для определения точек линии пересечения обе заданные плоскости **α** и **β** пересекают двумя вспомогательными (параллельными между собой) плоскостями-посредник. Некоторое упрощение можно достичь, если вспомогательные плоскости проводить через прямые, задающие плоскость.

Рассмотрим пример. Плоскость **α** задана (**ABC**), плоскость **β** задана (**DEK**). Точки **M** и **N**, определяющие искомую линию пересечения двух данных плоскостей найдем как точки пересечения каких-либо двух сторон (как две прямые) треугольника **ABC** с плоскостью другого треугольника **DEK**, т.е. дважды решим позиционную задачу на определение точки пересечения прямой с плоскостью по рассмотренному алгоритму.

Выбор сторон треугольников произволен, так как только построением можно точно определить, какая действительно сторона и какого треугольника пересечет плоскость другого. Выбор плоскости-посредник также произволен, так как прямую общего положения, какими являются все стороны треугольников **ABC** и **DEK**, можно заключить в горизонтально проецирующую или во фронтально проецирующую плоскости.



Здесь вы видите аксонометрическое изображение решения задачи на определение линии MN пересечения двух плоскостей ABC и DEK.



1-й этап решения

Для построения точки M использована горизонтально проецирующая плоскость - посредник α (α'), в которую заключена сторона AB треугольника ABC (AB ⊂ α).

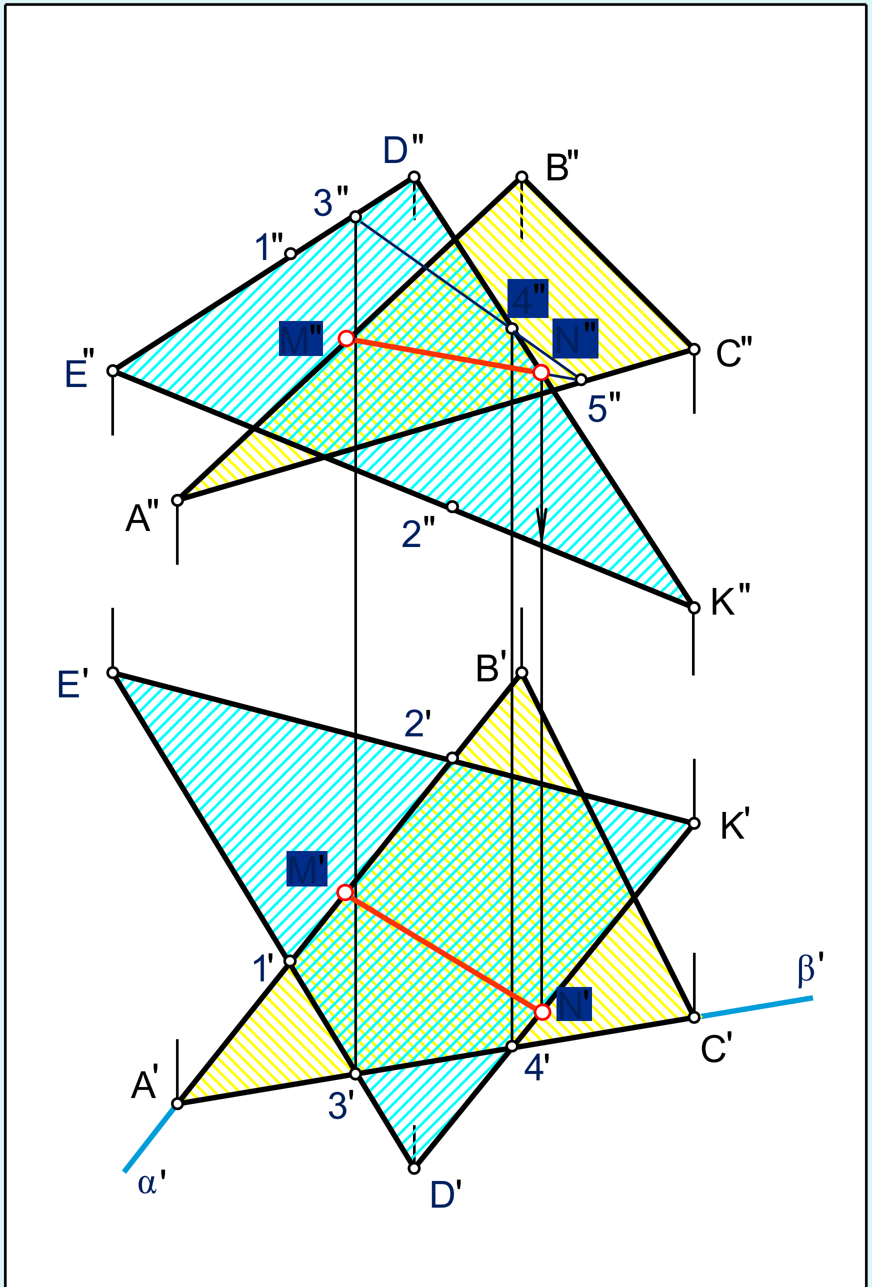
2-й этап решения

Строим линию пересечения (на чертеже она задана точками 1 и 2) плоскости-посредника α (α') и плоскости DEK.

3-й этап решения

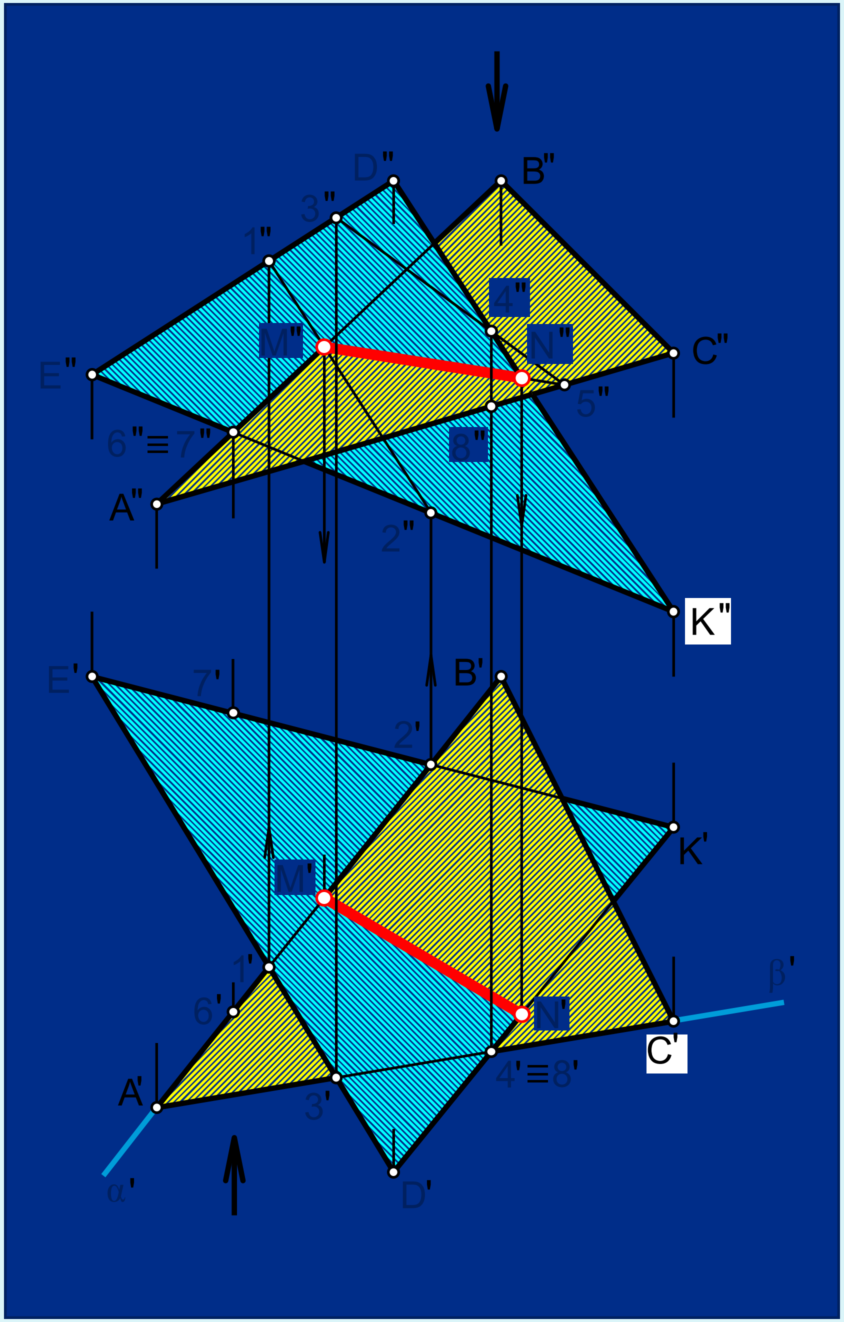
Находим точку M пересечения прямой 1 - 2 с прямой AB.

Найдена одна точка M искомой линии пересечения.



Для построения точки N использована горизонтально проецирующая плоскость β (β'), в которую заключена сторона AC треугольника ABC.

Построение аналогичны предыдущим. одна точка M искомой линии пересечения.

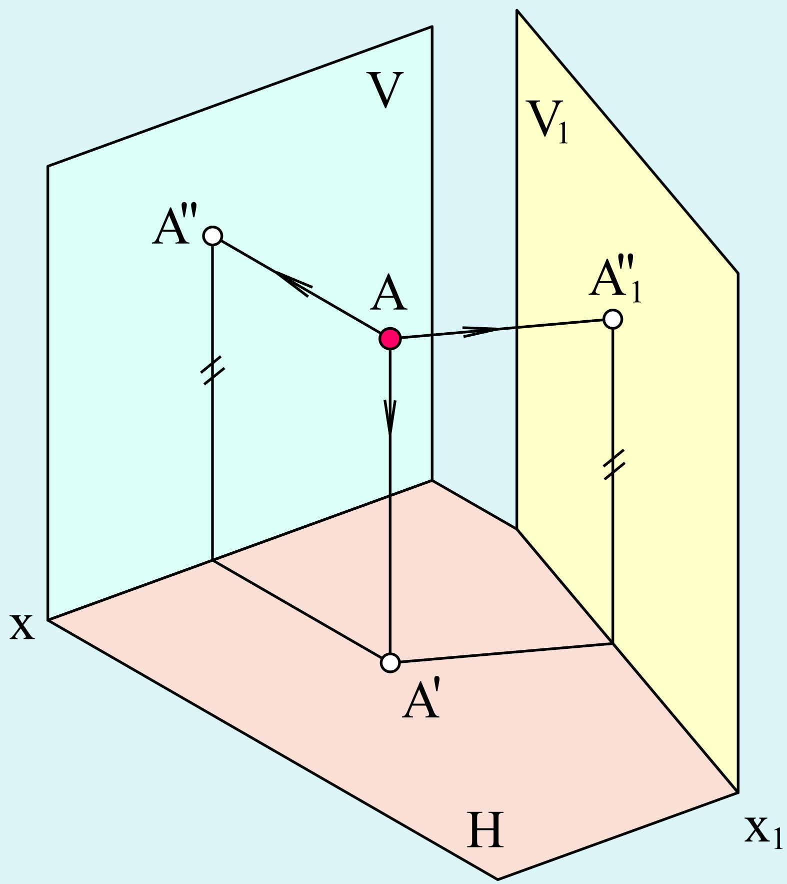


Определение видимости на плоскости H выполнено с помощью горизонтально конкурирующих точек 4 и 8 (4' ≡8').

Точка 4 расположена над точкой 8 (4" и 8"), поэтому на плоскости H часть треугольника DEK, расположенная в сторону точки 4, закрывает собой часть треугольника ABC, расположенную от линии пересечения в сторону точки 8.

С помощью пары фронтально конкурирующих точек 6 и 7 (6"≡7") определена видимость на плоскости V.

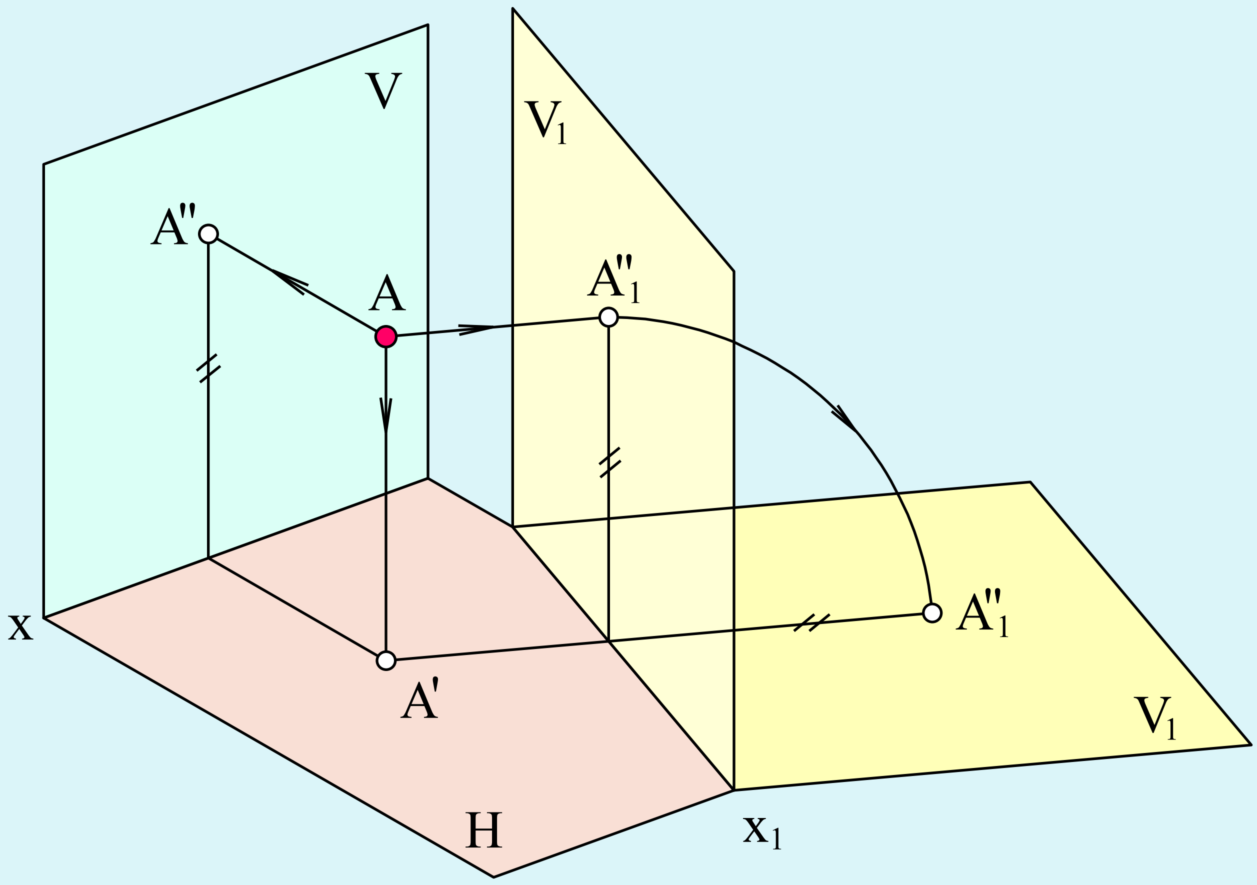
4.1. Способ замены плоскостей проекций



Этот способ состоит в том, что заданная фигура неподвижна, а одна из основных плоскостей V или H заменяется новой дополнительной плоскостью V_1 или H_1, расположенной параллельно или перпендикулярно заданной геометрической фигуре. Точка A задана в системе V/H. Плоскость V замерена новой плоскостью V_1 перепендикулярной H. Плоскость H является общей в системе V/H и H/V_1, то координата z_A остается неизменной. Следовательно, расстояние от новой фронтальной проекции до новой оси x_1 равно расстоянию от заменяемой проекции до оси x.

Для получения плоского чертежа точки A плоскость V_1 вращают вокруг оси x_1 до совмещения с плоскостью H.

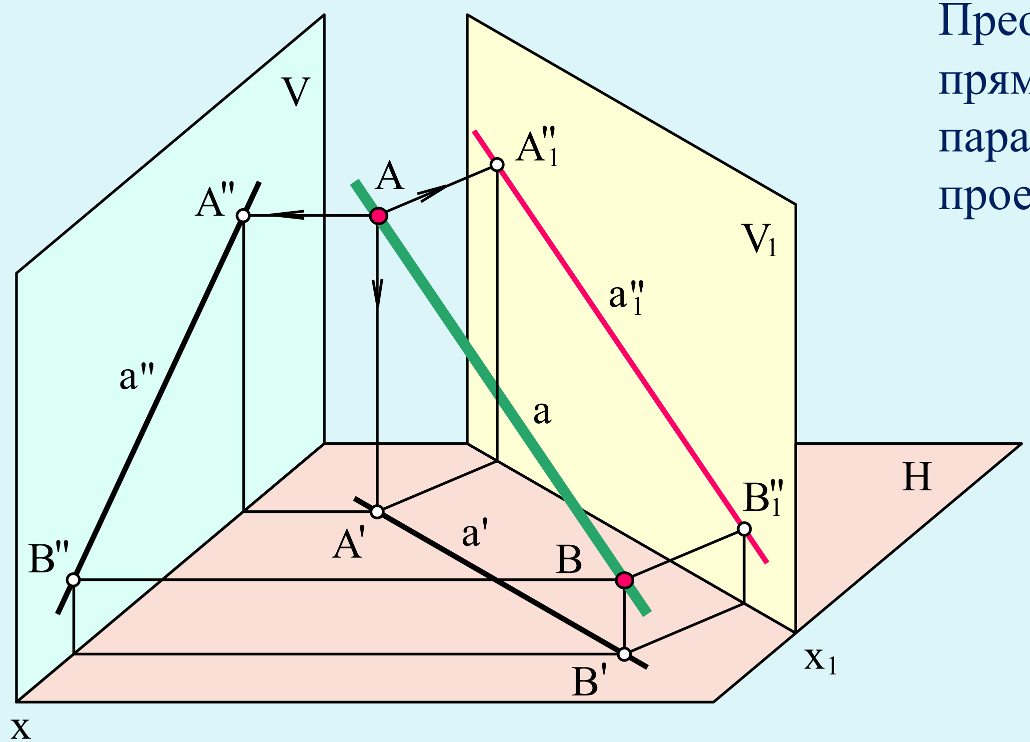
Новая фронтальная проекция A_1'' точки A окажется на общем перпендикуляре к новой оси x_1 с оставшейся без изменения ее проекции A'.



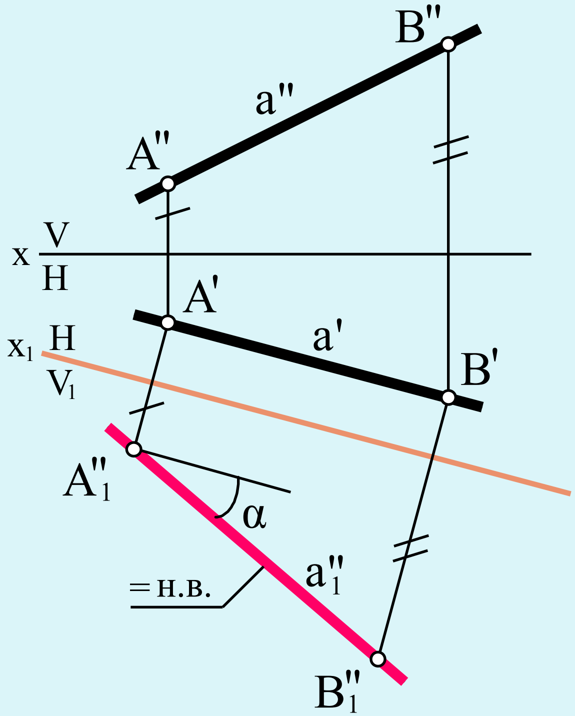
Решение четырех основных задач способом замены плоскостей проекций

Задача 1.

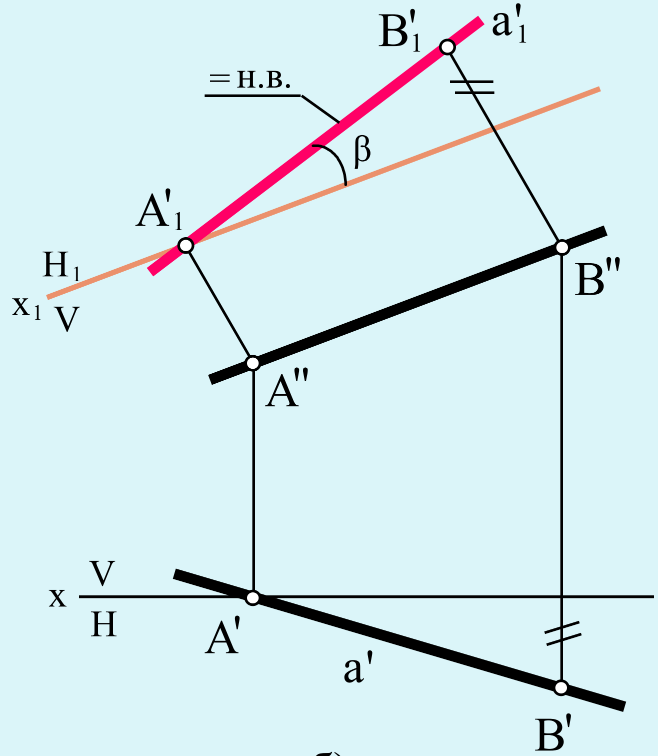
Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций



Новую проекцию прямой, отвечающую поставленной задачи, можно построить на новой плоскости проекций $\mathbf{V_1}$, расположив ее параллельно самой прямой и перпендикулярно плоскости **H**, т.е. от системы плоскостей **V/H** с осью проекций **x** следует перейти к системе $\mathbf{H/V_1}$ с новой осью $\mathbf{x_1}$.



а)



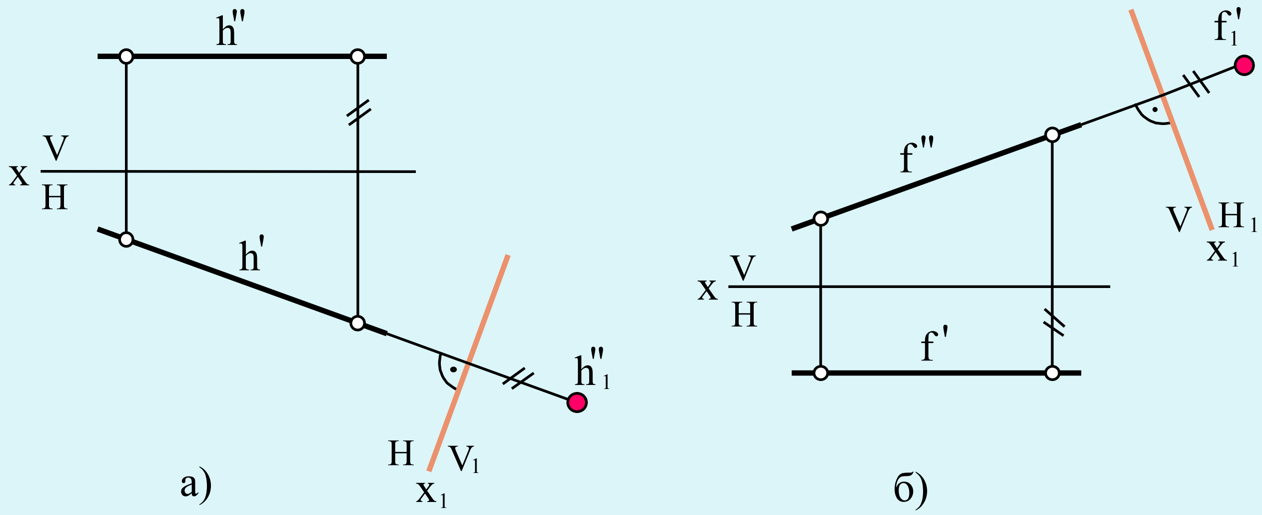
б)

На плоском чертеже новая ось $\mathbf{x_1}$ проведена параллельно a', новые линии связи $A'A_1''$ и $B'B_1''$ проведены перпендикулярно оси x_1. Новые фронтальные проекции A_1'' и B_1'' точек A и B получают, измерив от оси x на поле V координаты высот z_A и z_B, отложив их от оси x_1 на новое поле V_1.

Новая проекция a_1'' дает натуральную величину отрезка AB и угол α наклона его к плоскости H.

Угол наклона прямой a к плоскости V можно определить, построив изображение прямой на другой дополнительной плоскости $H_1 \perp V$, где $H_1 // a$.

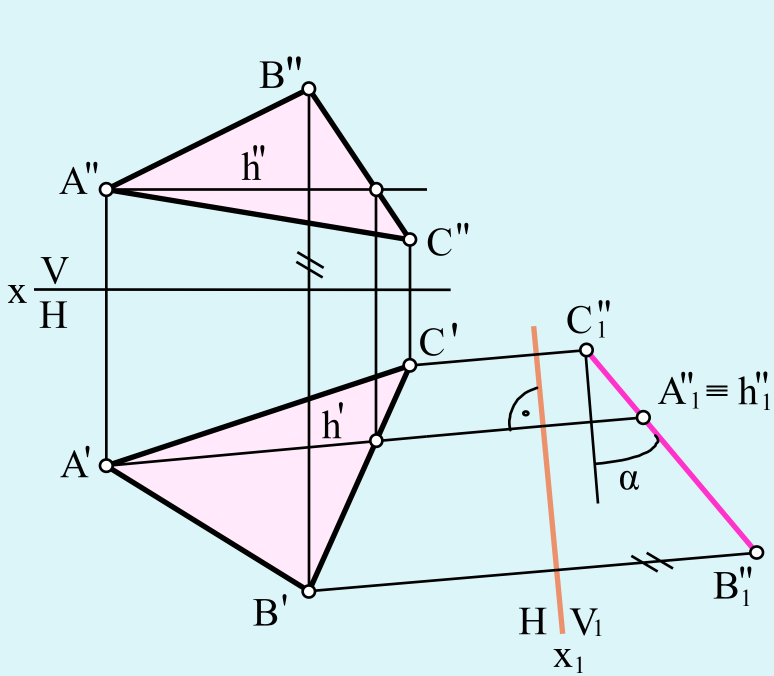
Задача 2. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая уровня оказалась перпендикулярной одной из плоскостей проекций.



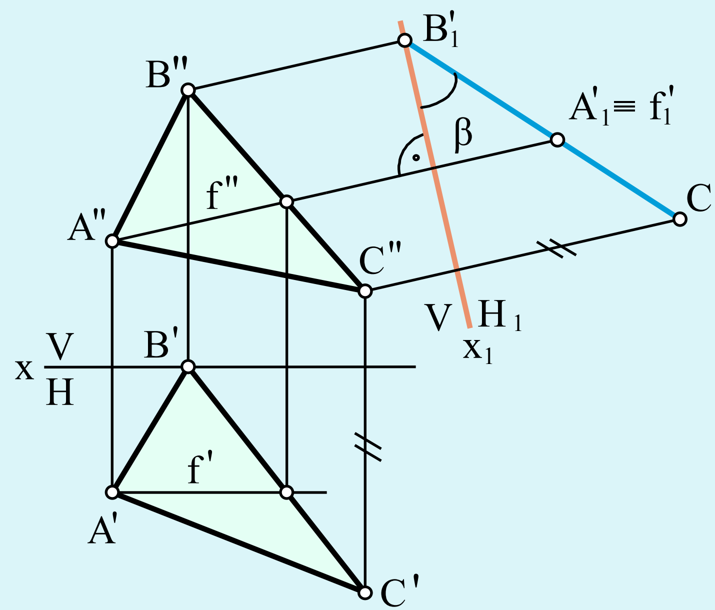
Другими словами, в новой системе прямая уровня должна стать проецирующей и изобразится на новую плоскость в точку. Поэтому новую плоскость $\mathbf{V_1}$ или $\mathbf{H_1}$ располагают перпендикулярно соответственно **h** или **f**. Горизонталь **h** будет иметь своей проекцией точку на плоскости $\mathbf{V_1}$ в системе $\mathbf{H/V_1}$ (рис. а), а фронталь **f** – на плоскости $\mathbf{H_1}$ в системе $\mathbf{V/H_1}$ (рис. б). Новую ось $\mathbf{x_1}$ проводят перпендикулярно **h** и **f**.

Для преобразования прямой общего положения в проецирующую необходимо произвести две последовательные замены плоскостей проекций.

Задача 3. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей.



а)

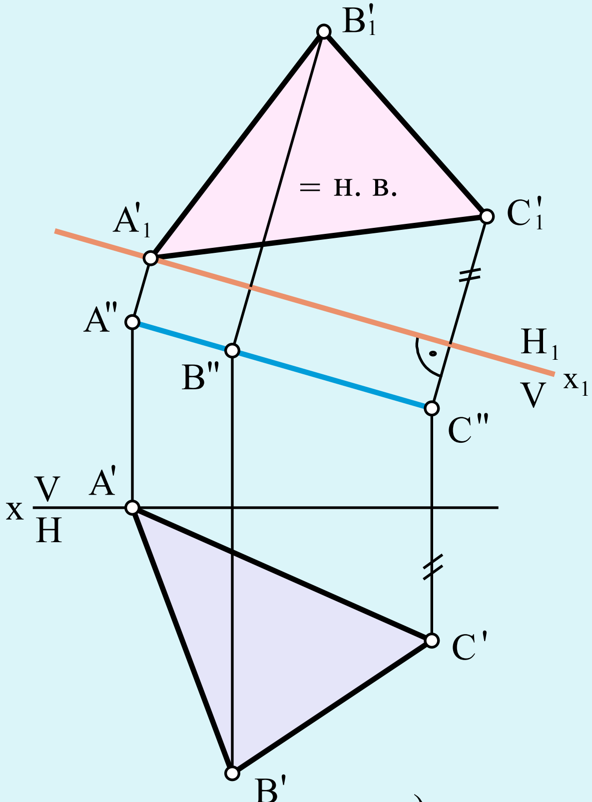


б)

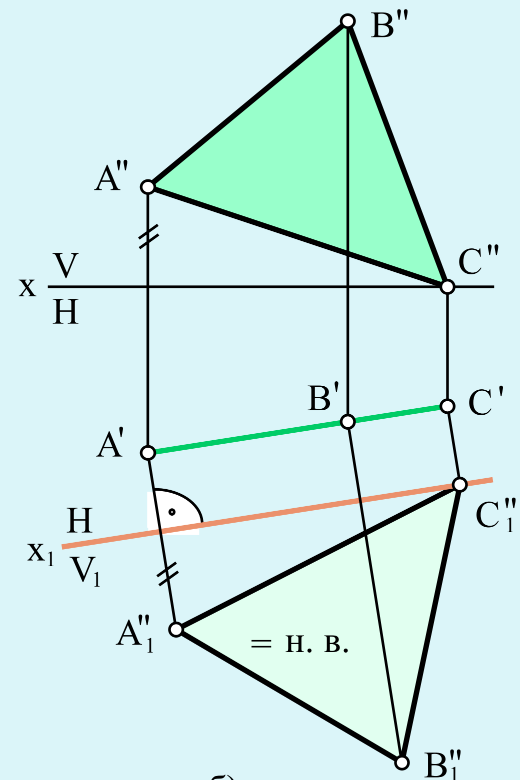
Для этого в плоскости ABC проведена горизонталь h. Новая плоскость проекций V_1 расположена перпендикулярно H. Горизонталь на поле V_1 изобразится точкой, а вся плоскость прямой линией C_1"A_1" B_1" с углом α, который определяет угол наклона плоскости ABC к плоскости H (рис.а).

Построив изображение плоскости в системе V/H_1, где H_1 расположена перпендикулярно фронтали f (рис. б) плоскости, можно определить угол β наклона ABC к плоскости V.

Задача 4. Преобразовать чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в новой системе плоскостей проекций заняла положение плоскости уровня.



а)



б)

Решение этой задачи позволяет определять натуральные величины плоских фигур и углов.

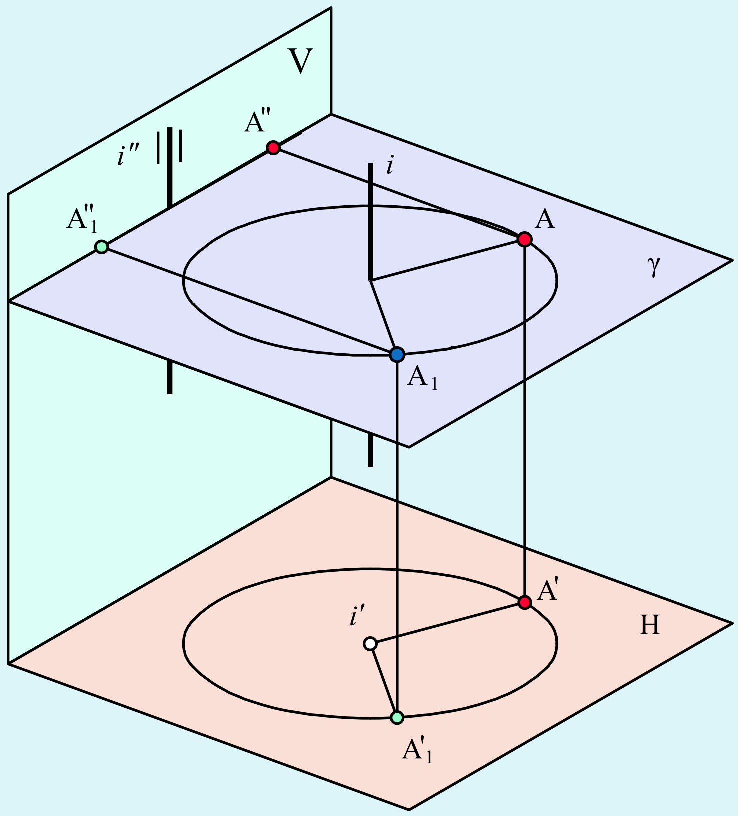
Новую плоскость проекций нужно расположить параллельно заданной плоскости.

Если исходное положение плоскости было фронтально проецирующим (рис. а), то новое изображение строят в системе V/H_1, а если горизонтально проецирующем (рис. б), то в системе H/V_1.

Новая ось проекций x_1 будет параллельна линейной проекции заданной плоскости.

4.2. Способ вращения вокруг проецирующей оси

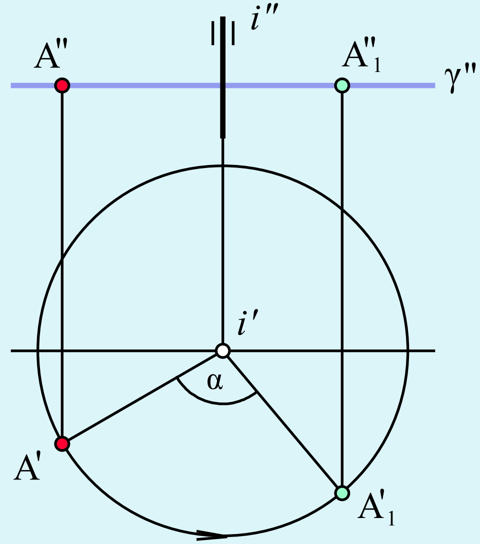
Сущность этого способа заключается в том, что система плоскостей проекций **V/H** остается неподвижной, а положение геометрических элементов меняется путем вращения вокруг одной или двух выбранных осей до нужного положения в данной системе. Этим способом решаются задачи на определение: натуральной величины отрезков и углов их наклона к плоскостям проекций **V**, **H** или **W**; для проведения прямой и плоскости под заданными углами; для совмещения оригиналов.



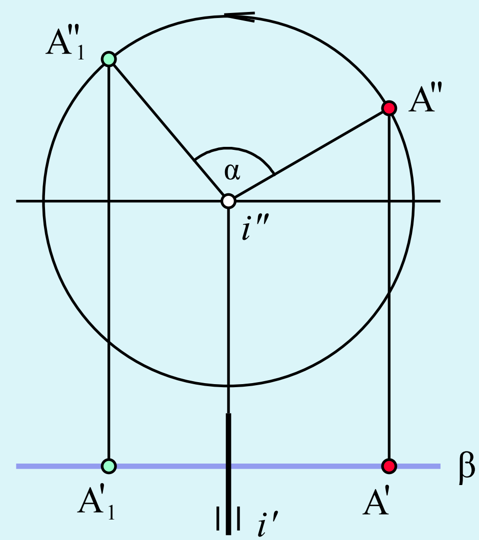
Вращение точки

Точка **A**, вращаясь вокруг горизонтально проецирующей оси ***i***, опишет окружность, плоскость которой **γ** перпендикулярна ***i*** и параллельна **H**. На плоскость **H** эта окружность проецируется без искажения, а на плоскость **V** - в виде отрезка прямой, параллельной оси **x**. Центр окружности расположен в точке пересечения оси вращения ***i*** с плоскостью **γ**, а величина радиуса определится как расстояние от точки **A** до оси ***i***.

Если ось вращения горизонтально проецирующая прямая, то точка **A** вращается в горизонтальной плоскости уровня **γ**. Ее горизонтальная проекция **A'** будет перемещаться по окружности, а фронтальная **A"** - по прямой, перпендикулярной линиям связи (рис. а).



а)

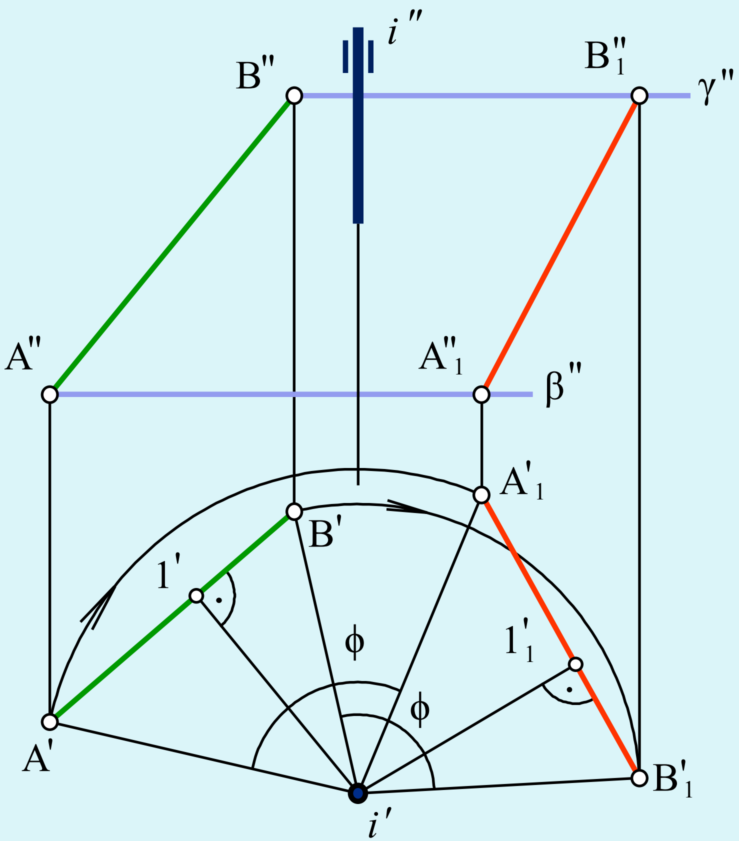


б)

Наоборот, если ось вращения фронтально проецирующая прямая, то точка **A** вращается во фронтальной плоскости уровня **β**. На чертеже горизонтальная проекция **A'** перемещается по прямой, перпендикулярной линиям связи, а фронтальная **A"** - по окружности (рис. б). Через **A_1** обозначено новое положение точки **A**, которое она занимает после поворота на угол **α**.

Вращение прямой линии

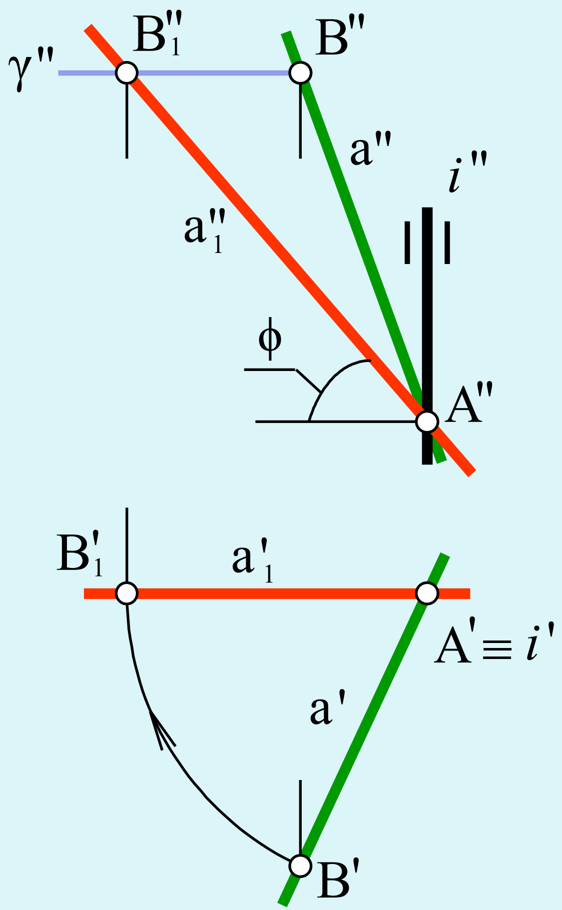
Чтобы построить проекции отрезка **AB**, повернутого вокруг оси ***i*** на угол **ϕ**, необходимо повернуть две его точки на заданный угол. При построении новых горизонтальных проекций **A'$_1$** и **B'$_1$** необходимо выполнить условие, что угол **A' *i* ' A'$_1$** равен углу **B' *i* ' B'$_1$** и расстояние между горизонтальными проекциями точек **A** и **B** при их повороте остается неизменным.



Фронтальные проекции **A"$_1$** и **B"$_1$** точек **A** и **B** перемещаются по прямым, перпендикулярным линиям связи, которые являются фронтальными проекциями плоскостей вращения **γ** и **β**.
При вращении вокруг горизонтально проецирующей оси треугольник **A'*i* ' B'** конгруэнтен треугольнику **A'$_1$ *i* ' B'$_1$**, следовательно конгруэнтны их высоты ***i* ' C '** и ***i* ' C '$_1$**.

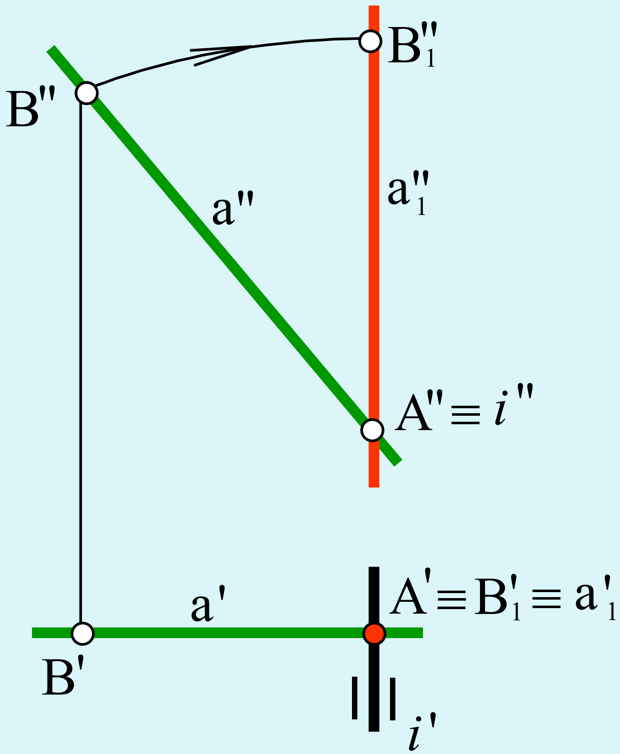
Решение четырех основных задач способом вращения вокруг проецирующей прямой

Задача 1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций.



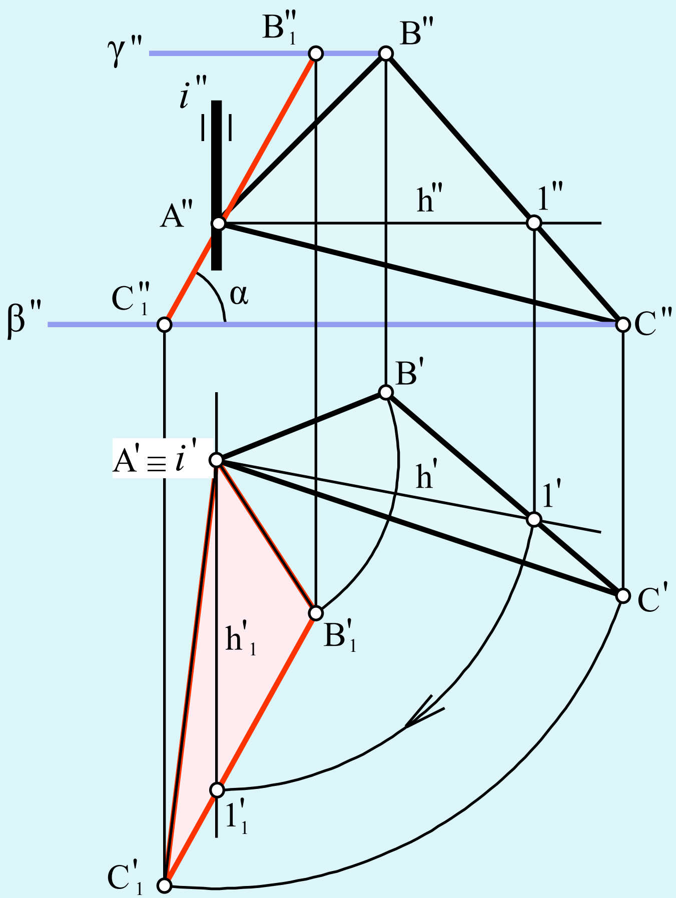
Если прямая параллельна плоскости проекций **V** или **H**, то одна из ее проекций должна быть параллельна оси **x** или перпендикулярна линиям связи. На рисунке за ось вращения ***i*** взята горизонтально проецирующая прямая, проходящая через точку **A**. Точка **A** при вращении прямой **a** остается неподвижной, а другая ее точка **B** вращается в горизонтальной плоскости уровня **γ**. Ее горизонтальная проекция **B'** опишет дугу окружности, а угол поворота точки **B** определяется условием перпендикулярности новой проекции **a'_1** прямой **a** к линиям связи.
В результате такого поворота на плоскость **V** в натуральную величину проецируется отрезок **AB** и угол **ϕ**, который прямая **a** составляет с плоскостью **H**. Итак, одним поворотом вокруг проецирующей оси прямую общего положения можно расположить параллельно одной из плоскостей проекций.

Задача 2. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая уровня оказалась перпендикулярной одной из плоскостей проекций.



На рисинке прямая **a** задана фронталью, т.е. пераллельной плоскости **V**, поэтому за ось вращения необходимо взять фронтально проецирующую прямую ***i***, проходящую через точку **A**. Вращается точка **B** прямой **a**. Ее фронтальная проекция **B"** описывает дугу окружности, а горизонтальная **B'** перемещается по прямой. В итоге фронтальная проекция $\mathbf{a_1}$**"** оказалась вертикальной, а горизонтальная $\mathbf{a_1}$**'** - точкой. Сама же прямая $\mathbf{a_1}$ заняла положение горизонтально проецирующей прямой (перпендикулярной плоскости **H**).

Задача 3. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положенияя после поворота стала проецирующей.

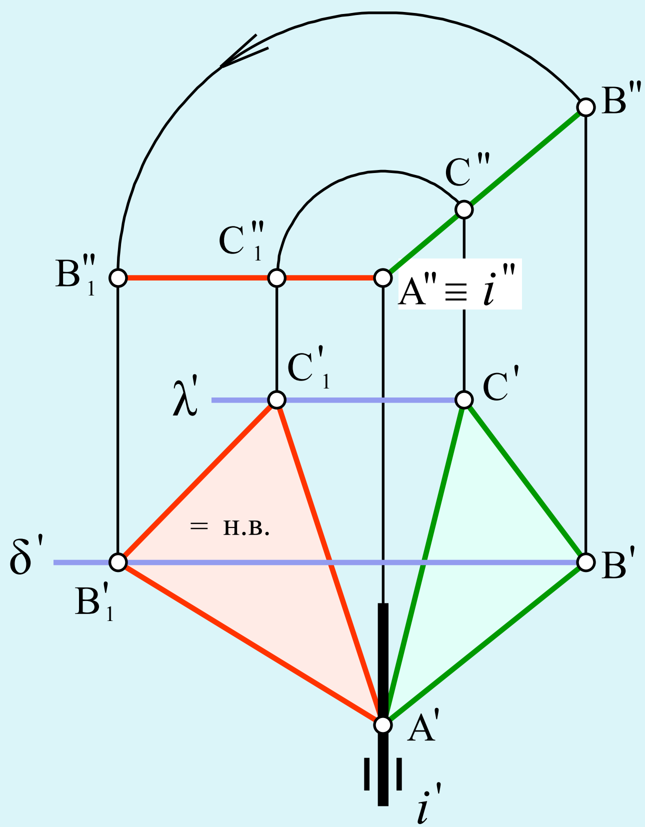


Для решения этой задачи в плоскости **ABC** нужно провести горизонталь или фронталь которую одним поворотом сделать проецирующей прямой.

В плоскости **ABC** проведена ее горизонталь **A1**, которая вращением вокруг горизонтально проецирующей прямой ***i*** приведена в положение **A1**$_1$ перпендикулярное плоскости проекций **V**.

Вслед за ней на тот же угол следует повернуть вершины **B** и **C** данной плоскости **ABC**. Новая фронтальная проекция **A"C**$_1$**" B**$_1$**"** треугольника представляет собой прямую линию, угол наклона которой **α** равен углу наклона плоскости **ABC** к плоскости **H**.

Задача 4. Преобразовать чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в результате вращения заняла положение плоскости уровня.



Известно, что отличительным признаком такой плоскости на эпюре является то, что ее линейная проекция параллельная оси **x** на плоскость, к которой она перпендикулярна. Это и определяет угол поворота точек плоскости **ABC**. Чтобы заданную фронтально проецирующую плоскость **ABC** повернуть до плоскости уровня, необходимо за ось вращения выбрать фронтально проецирующую прямую ***i*** и проходящую, например, через вершину **A**. Фронтальные проекции точек **B** и **C** будут перемещаться по концентрическим дугам окружностей с центром в точке ***i*** ", а горизонтальные их проекции **C'** и **B'** - по прямым линиям, перпендикулярным линиям связи, которые являются прекциями плоскостей вращения точек: **λ (λ')** точки **C**, а **δ (δ ')** - точки **B**.

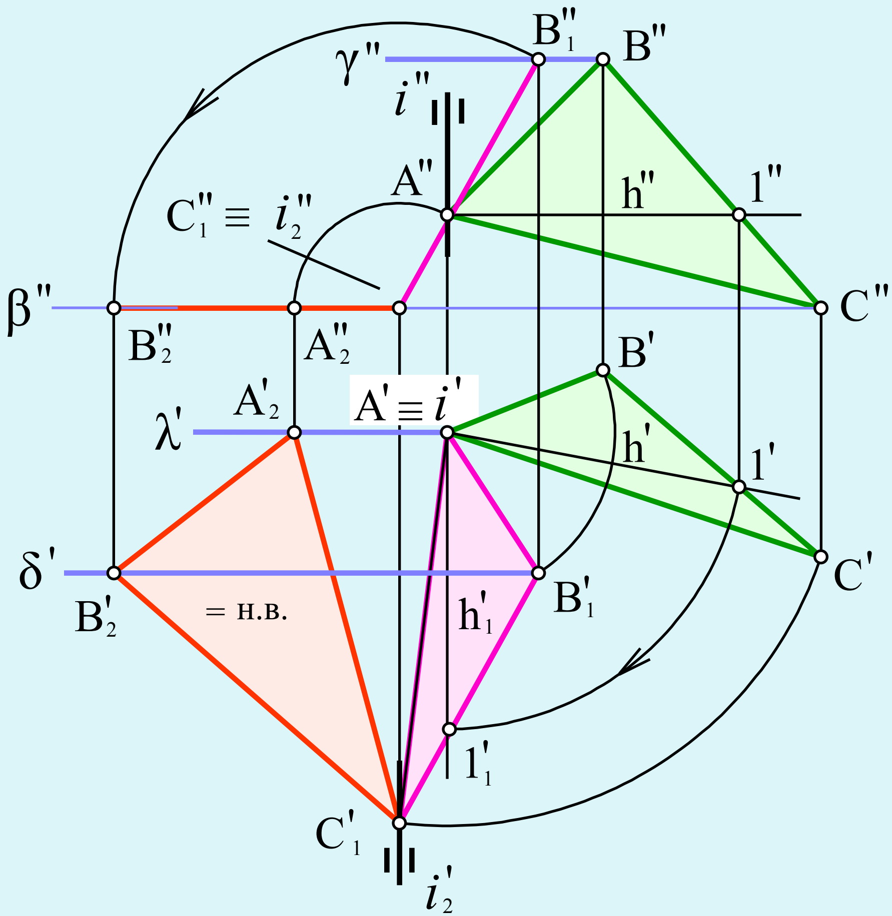
Горизонтальная проекция **A'B$_1$'C$_1$'** треугольника определяет его натуральную величину.

Решение задачи на определение натуральной величины плоскости общего положения.

Эта задача решается в два этапа:

1) вращением вокруг первой горизонтально проецирующей оси ***i*** плоскость **ABC** преобразуется во фронтально проецирующую **AB_1C_1**;

2) вращением вокруг второй фронтально проецирующей оси ***i_2*** проецирующая плоскость преобразуется в горизонтальную плоскость уровня **$C_1A_2B_2$**.



Можно сделать вывод, что при вращении плоской фигуры вокруг проецирующей оси, проекция ее на плоскость, к которой ось вращения перпендикулярна, не изменяется по величине, так как не изменяется наклон плоской фигуры к этой плоскости проекций, а меняется только положение этой проекции относительно линий связи. Вторая же проекция на плоскости, параллельной оси вращения, изменяется и по форме и по величине.