Лекция 11.

Преобразования на плоскости.

<u>План лекции:</u>

1. Системы координат и векторы.

2. Уравнения прямой и плоскости.

3. Аналитическое представление кривых и поверхностей.

4. Пересечение луча с плоскостью и сферой.

. *5. Интерполяция функций одной и двух переменных.*

1. Системы координат и векторы.

- Как найти расстояние между двумя точками?

(x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)

- Что такое вектор?

  Какие вектора называются коллиниарными?

- Что является суммой двух векторов?

- Что является линейной комбинацией векторов?

- Какие вектора называются компланарными?

- *Какие вектора называются линейно независимыми?*
  Линейно зависимыми?

- Что является скалярным произведением двух векторов?

- Что является векторным произведением двух векторов?

2. Уравнения прямой и плоскости.

Уравнение прямой на плоскости в декартовой системе координат можно задать уравнением вида $y = kx + b$ для случая, когда прямая не параллельна оси OY, и уравнением $x = c$ для вертикальной прямой.

Задать прямую можно с использованием вектора направления этой прямой $\vec{l} = (l_x, l_y)$ и точки, лежащей на этой прямой $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$

Параметрическое уравнение прямой: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{l}$,

в котором параметр t пробегает все значения числовой прямой.

Координаты точки, соответствующей некоторому значению этого параметра, определяются соотношениями:

$$x = x_0 + tl_x, \quad y = y_0 + tl_y.$$

Прямая в пространстве задается аналогично:

$$\overrightarrow{l} = (l_x, l_y, l_z),\ \overrightarrow{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$x = x_0 + tl_x, \quad y = y_0 + tl_y, \quad z = z_0 + tl_z, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Через каждую точку плоскости можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости. Все эти прямые будут параллельны друг другу, значит, они имеют общий вектор направления. Этот вектор - ***нормаль к плоскости****. Если длина вектора равна единице, это* ***единичная нормаль****.*

Плоскость в пространстве можно задать, указав вектор нормали к ней и какую-либо точку, принадлежащую данной плоскости.

$\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ - *вектор единичной нормали,*

$\overrightarrow{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - *некоторая точка на плоскости.*

Тогда для любой точки $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ *лежащей на плоскости, вектор* $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0$ *будет ортогонален вектору нормали, а следовательно, выполняется равенство* $((\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_0) \cdot \overrightarrow{n}) = 0.$

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z - n_1 x_0 - n_2 y_0 - n_3 z_0 = 0.$$

Каноническое уравнение плоскости: $n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0,$

Если каноническое уравнение плоскости умножить на какой-либо отличный от нуля множитель, то оно будет описывать ту же самую плоскость, но если вектор $\vec{n}$ имеет единичную длину, то $|d|$ задает расстояние от начала координат до данной плоскости.

Пусть три точки $\vec{r}_1$ $\vec{r}_2$ $\vec{r}_3$, не лежащие на одной прямой, имеют координаты:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \quad (x_3, y_3, z_3)$$

Для получения канонического уравнения необходимо построить нормаль к плоскости, используем для этого операцию векторного произведения.

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1$$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$$

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{r}_3 - \overrightarrow{r}_1$$

$$\overrightarrow{N} = (N_x, N_y, N_z)$$

В каких плоскостях лежат эти вектора?

Каноническое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$N_x x + N_y y + N_z z + D = 0.$$

Определим значение D*. Так как точка* $\overrightarrow{r}_1$ *принадлежит этой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять полученному уравнению. Подставим их в уравнение и получим:*

$$N_x x_1 + N_y y_1 + N_z z_1 + D = 0,$$

$$D = -N_x x_1 - N_y y_1 - N_z z_1,$$

Окончательно каноническое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$N_x(x - x_1) + N_y(y - y_1) + N_z(z - z_1) = 0$$

3. Аналитическое представление кривых и поверхностей.

Кривая на плоскости - *это геометрическое место точек* (x, y) *удовлетворяющих уравнению* $F(x, y) = 0$

где F - *функция двух переменных.*

Задают ли следующие уравнения линии?

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

Для аналитического представления кривой во многих случаях удобнее задавать кривую параметрическими уравнениями, используя вспомогательную переменную (параметр) t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), t \in [a, b],$$

где φ и ψ - непрерывные функции на заданном интервале изменения параметра.

Если функция $\varphi(t)$ такова, что можно выразить t через $x(t = \varphi^{-1}(x))$, то от параметрического представления кривой легко перейти к уравнению:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(t)) = 0.$$

В векторном виде:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{f}(t), \quad \overrightarrow{r} = (x, y), \quad \overrightarrow{f}(t) = (\varphi(t), \psi(t)).$$

Отрезок прямой представляет собой частный случай кривой, его параметрическое представление:

$$x = t, \quad y = at + b, \quad t \in [t_1, t_2]$$

или

$$x = at + b, y = t, t \in [t_1, t_2]$$

Окружность радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) может быть представлена параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + r \cdot \cos t, \quad y = y_0 + r \cdot \sin t, t \in [0, 2\pi].$$

Поверхность в пространстве *- это геометрическое место точек* (x, y, z)*, удовлетворяющих уравнению вида*

$$F(x, y, z) = 0.$$

Задает ли следующее уравнение поверхность в пространстве?

$$X^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

Поверхность может быть задана в ***параметрическом виде****, для этого требуются две вспомогательные переменные (параметры):*

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \quad u \in [a, b], \quad v \in [c, d].$$

Сфера радиуса r *с центром в точке* (x_0, y_0, z_0) *может быть задана уравнением*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$$

или параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + r \cdot \cos u \cdot \cos v, \quad y = y_0 + r \cdot \sin u,$$

$$z = z_0 + r \cdot \cos u \cdot \sin v.$$

Кривую в пространстве можно описать как пересечение двух поверхностей, т.е. с помощью системы уравнений

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

или параметрическими уравнениями вида

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), z = \zeta(t), \quad t \in [a, b].$$

4. Пересечение луча с плоскостью и сферой.

Луч - это полупрямая, т.е. множество всех точек прямой, лежащих по одну сторону от заданной ее точки, называемой началом луча.

Пусть $\overrightarrow{l} = (l_x, l_y, l_z)$ - направляющий вектор прямой, а $\overrightarrow{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$- начальная точка. Тогда координаты точек луча будут определяться формулами

$$x = x_0 + tl_x, \quad y = y_0 + tl_y, \quad z = z_0 + tl_z.$$

Будем считать, что направляющий вектор единичный, т.е. $l_x^2 + l_y^2 + L_z^2 = 1$.

Рассмотрим **задачу** о нахождении точки **пересечения луча с плоскостью**, заданной канонически уравнением

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0.$$

Вектор нормали $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ тоже будем считать единичным. Сначала надо определить значение параметра t, при котором луч пересекает плоскость.

$$n_1(x_0 + tl_x) + n_2(y_0 + tl_y) + n_3(z_0 + tl_z) + d = 0,$$

откуда надо найти t

$$t = -\frac{(\overrightarrow{r}_0 \cdot \overrightarrow{n}) + d}{(\overrightarrow{l} \cdot \overrightarrow{n})}.$$

В каком случае может существовать такая точка?

Рассмотрим **задачу** о нахождении точки **пересечения луча со сферой** с центром в точке $\overrightarrow{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ и радиусом d. Уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = d^2.$$

Подставив сюда координаты луча, получим, что параметр, при котором луч пересекает сферу, должен удовлетворять квадратному уравнению

$$at_0^2 + bt_0 + c = 0,$$

где $a = |\overrightarrow{r}_c|^2,$

$$b = 2((\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}_c) \cdot \overrightarrow{l}),$$

$$c = |\overrightarrow{r}_0 - \overrightarrow{r}_c|^2 - d^2.$$

Если дискриминант $D = \frac{b^2}{4} - c \geq 0$*, то корни существуют. Их может быть либо два* $(D > 0)$*, либо один* $(D = 0)$*. В первом случае имеем две точки пересечения, во втором - одну (луч касается сферы).*

$$t_{1,2} = -\frac{b}{2} \mp \sqrt{D}$$

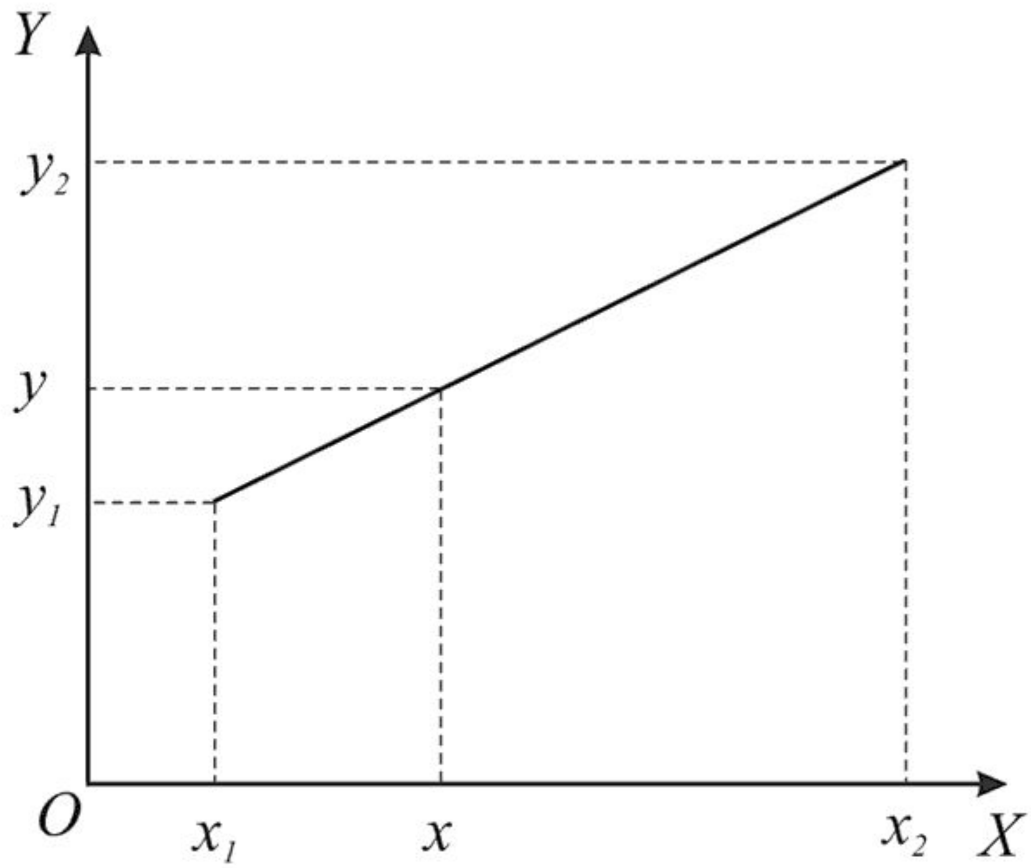
5. Интерполяция функций одной и двух переменных.

Если функция задается своими значениями на некотором дискретном множестве точек (узлов) из области определения и необходимо получить значение функции в какой-либо точке, не совпадающей с узлом, используют различные методы приближенного вычисления, которые основываются на некоторых априорных предположениях относительно этой функции.

Интерполяция *– точка, в которой ищется значение функции, принадлежит заданной области.*

Экстраполяция *– точка лежит вне области.*

Линейная интерполяция - *в промежутках между узлами она ведет себя в соответствии с линейным законом.*

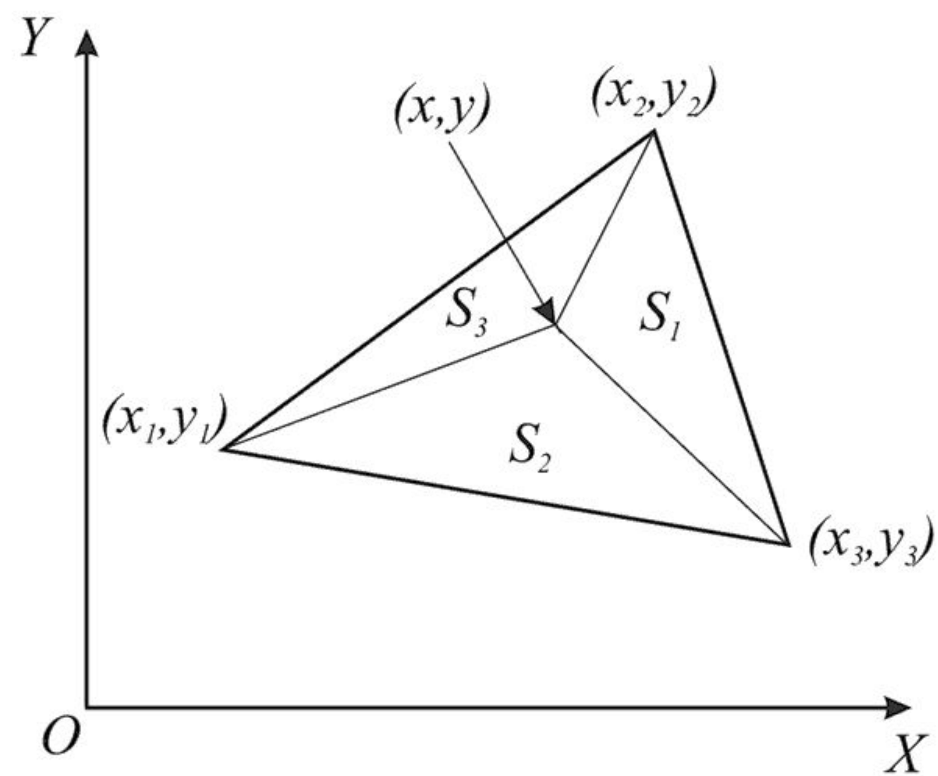


Пусть на плоскости задана система координат XOY *и отрезок* $[x_1, x_2]$ *на оси* OX, *на концах которого заданы значения* y_1, y_2 *некоторой линейной функции. Тогда для любой точки* x *внутри заданного отрезка соответствующее значение* y *вычисляется по формулам:*

$$y = ty_1 + (1 - t)y_2, \qquad t = (x_2 - x)/(x_2 - x_1).$$

Рассмотрим задачу интерполяции функций двух переменных (по трем заданным точкам с помощью кусочно-линейной функции).

Пусть на плоскости задан треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ и заданы значения функции в этих точках z_1, z_2, z_3. Тогда три точки (x_i, y_i, z_i) определяют в пространстве треугольник, который является плоской фигурой. Предполагается, что площадь треугольника больше нуля (треугольник невырожденный).



Для определения значения функции в произвольной точке (x, y), лежащей внутри треугольника, воспользуемся так называемыми ***барицентрическими координатами*** (α, β, γ) *этой точки. Геометрический смысл этих координат - отношение площадей треугольников, изображенных на рисунке.*

$$\alpha = \frac{S_1}{S}, \qquad \beta = \frac{S_2}{S}, \qquad \gamma = \frac{S_3}{S},$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Эти числа неотрицательны и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = x \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = y \end{array}\right\} .$$

Эти соотношения будем рассматривать как уравнения для нахождения чисел (α, β, γ)

Определитель этой системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1),$$

и он по модулю равен удвоенной площади треугольника, поэтому $\Delta \neq 0$*, следовательно, система имеет единственное решение при любой правой части.*

Воспользуемся формулами Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \gamma = 1 - \alpha - \beta,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix} = (x_3y_1 - x_1y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3).$$

После того как получены барицентрические координаты точки (x, y)*, значение функции в ней рассчитывается по формуле*

$$z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3.$$

Существуют хорошо разработанные методы гладкой интерполяции функций. Особенно часто при интерполяции кривых и поверхностей используются ***сплайн-функции****, которые гладко "склеиваются" из полиномов. Среди них следует выделить* ***кубические сплайны****, которые строятся из полиномов третьей степени. Они широко используются в инженерной геометрии благодаря простоте их вычисления и другим полезным свойствам.*