

Лекция 5

# **ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

Тема

**Сопротивление материалов**

# Основные понятия деформации среза

Деформация, при которой в поперечном сечении бруса действует один силовой фактор - поперечная сила, **называется срезом (сдвигом)**.

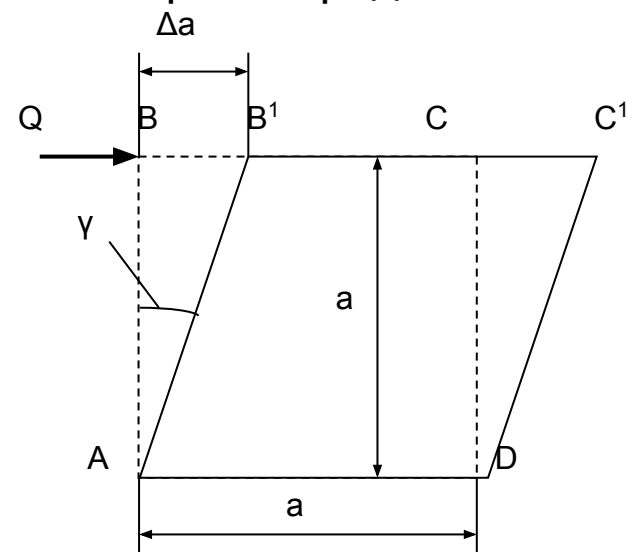
В поперечном сечении бруса действуют касательные напряжения,  $\tau_{ср}$ , которые определяются по формуле:

$$\tau_{ср} = \frac{Q}{A \cdot i},$$

Расстояние  $\Delta a$  (отрезок  $BB^1$ ), на которое одна из граней ( $BC$ ) прямоугольного параллелепипеда перемещается относительно противоположной грани ( $AD$ ), называется **абсолютным сдвигом**.

Малый угол,  $\gamma$ , на который изменяется первоначально прямой угол между любыми пересекающимися прямыми ( $AB$  и  $AD$ ) на поверхности бруса, вследствие приложения поперечной силы, называется **углом сдвига**.

Отношение абсолютного сдвига,  $\Delta a$  (отрезка  $BB^1$ ) к расстоянию между противоположными гранями параллелепипеда,  $a$  (отрезок  $BC$ ), называется **относительным сдвигом**.



# Закон Гука при срезе

**Закон Гука при сдвиге.** Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении бруса при чистом сдвиге прямо пропорциональны относительному сдвигу:

$$\tau = G\gamma,$$

где  $G$ - модуль сдвига, или модуль упругости второго рода;  $\gamma$  - относительный сдвиг.

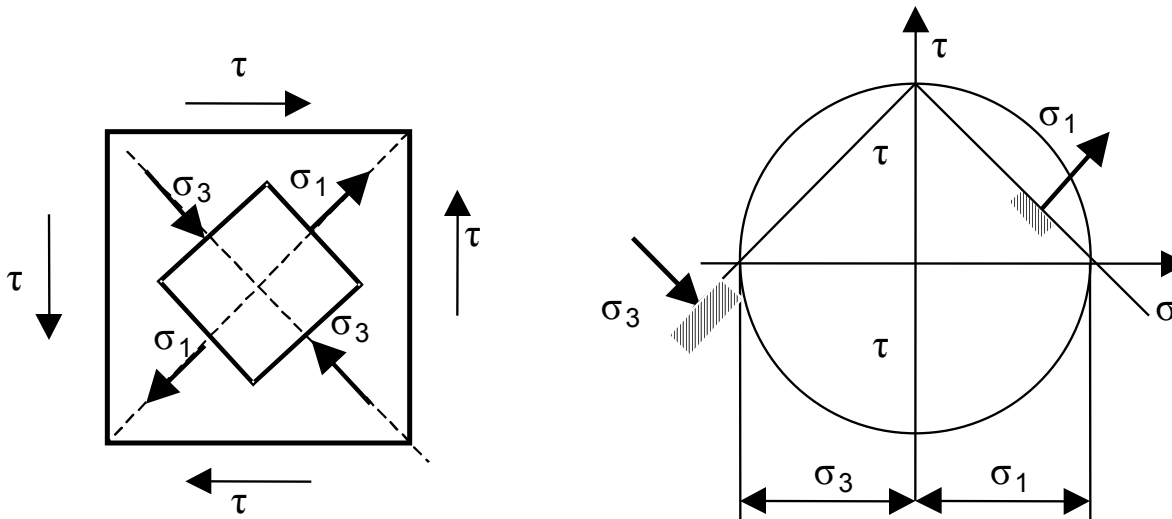
**Модулем сдвига или модулем упругости второго рода  $G$** , называется физическая постоянная материала характеризующая его способность сопротивляться упругим угловым деформациям, вызванными действием касательных напряжений. Практически для всех марок стали модуль сдвига одинаков и равен  $G=8,1 \cdot 10^4$  МПа.

Модуль сдвига  $G$ , модулем упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\mu$  взаимосвязаны между собой по следующей зависимости:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

# Напряженное состояние при срезе

Принято считать, что материал при срезе находится в плоском напряженном состоянии чистого сдвига.



Главные напряжения при чистом сдвиге, по абсолютной величине, равны наибольшему касательному напряжению  $\tau$ , соответственно

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$

# Условие прочности при срезе

Расчетные касательные напряжения, действующие в поперечном сечении бруса при срезе не должны превышать допускаемых значений, то есть:

$$\tau_{cp} \leq [\tau]_{cp}$$

Допускаемые напряжения среза принято определять расчетным путем на основании имеющихся значений допускаемых напряжения растяжения по третьей или четвертой теориям прочности. Для пластичных материалов предпочтительнее использовать четвертую теорию прочности

Согласно третьей теории прочности расчетные допускаемые напряжения среза равны:

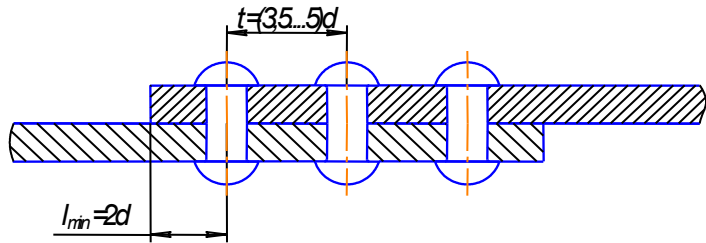
$$[\tau]_{cp} = \frac{[\sigma]_p}{2}$$

Согласно четвертой теории прочности расчетные допускаемые напряжения среза равны:

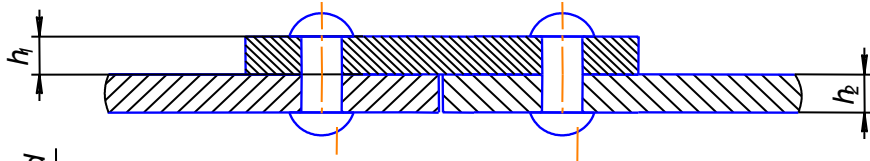
$$[\tau]_{cp} = \frac{[\sigma]_p}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma]_p$$

# Расчет болтовых и заклепочных соединений

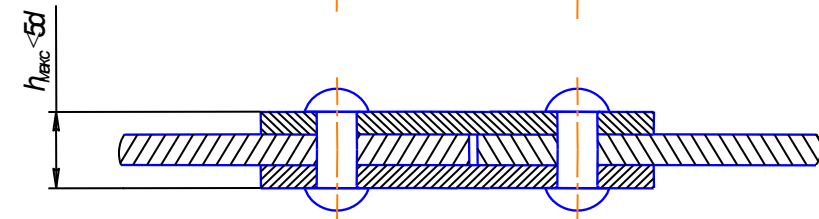
Болтовые и заклепочные соединения, выполненные внахлестку, рассчитывают на прочность по касательным напряжениям среза, а затем выполняют проверочный расчет соединения по нормальным напряжениям смятия.



Заклепочные соединения могут быть выполнены внахлест без накладки.



Заклепочные соединения могут быть выполнены внахлест с одной накладкой.



Заклепочные соединения могут быть выполнены внахлест с двумя накладками.

При расчете на срез болтовых и заклепочных соединений приняты допущения:

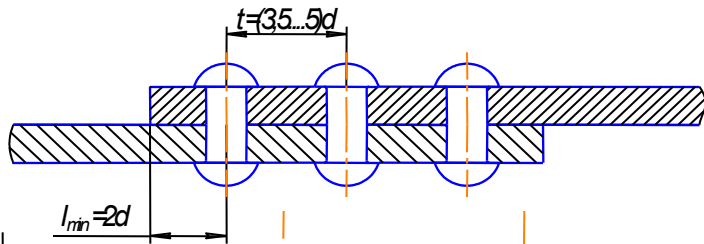
1. Нагрузка равномерно распределяется между рядами и между отдельными болтами или заклепками в ряду.
2. Силы трения между стягиваемыми или склепываемыми деталями отсутствуют.
3. Изгибающий момент, действующий в поперечном сечении болта или заклёпки незначителен, и его можно не учитывать.

# Расчет болтовых и заклепочных соединений на срез

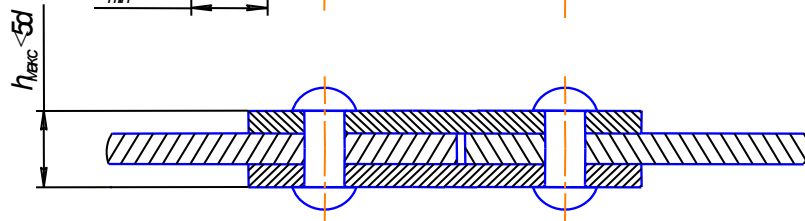
Проверочный расчет

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} = \frac{4Q}{\pi d_1^2 n m} \leq [\tau]_{cp},$$

где  $d_1$  – наименьший диаметр (для болтовых соединений внутренний диаметр резьбы);  $[\tau]_{cp}$  – допускаемое напряжение среза;  $n$  – общее количество установленных болтов или заклепок;  $m$  – число плоскостей среза.



Односрезное заклепочное соединение ( $m=1$ )



Двухсрезное заклепочное соединение ( $m=2$ )

Проектный расчет

$$n_{cp} \geq \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot i \cdot [\tau_{cp}]}$$

# Расчет болтовых и заклепочных соединений на смятие

1. При расчете на смятие болтовых и заклепочных соединений приняты допущения:
2. Нагрузка равномерно распределяется между рядами и между отдельными болтами или заклепками в ряду;
3. Силы трения между стягиваемыми или склепываемыми деталями отсутствуют;
4. Давления распределяются равномерно по площади проекции цилиндрической поверхности контакта на диаметральную плоскость;
5. Изгибающий момент, действующий в поперечном сечении болта или заклёпки незначителен, и его можно не учитывать.

Проверочный расчет

$$\sigma_{см} = \frac{Q}{ndh} \leq [\sigma]_{см},$$

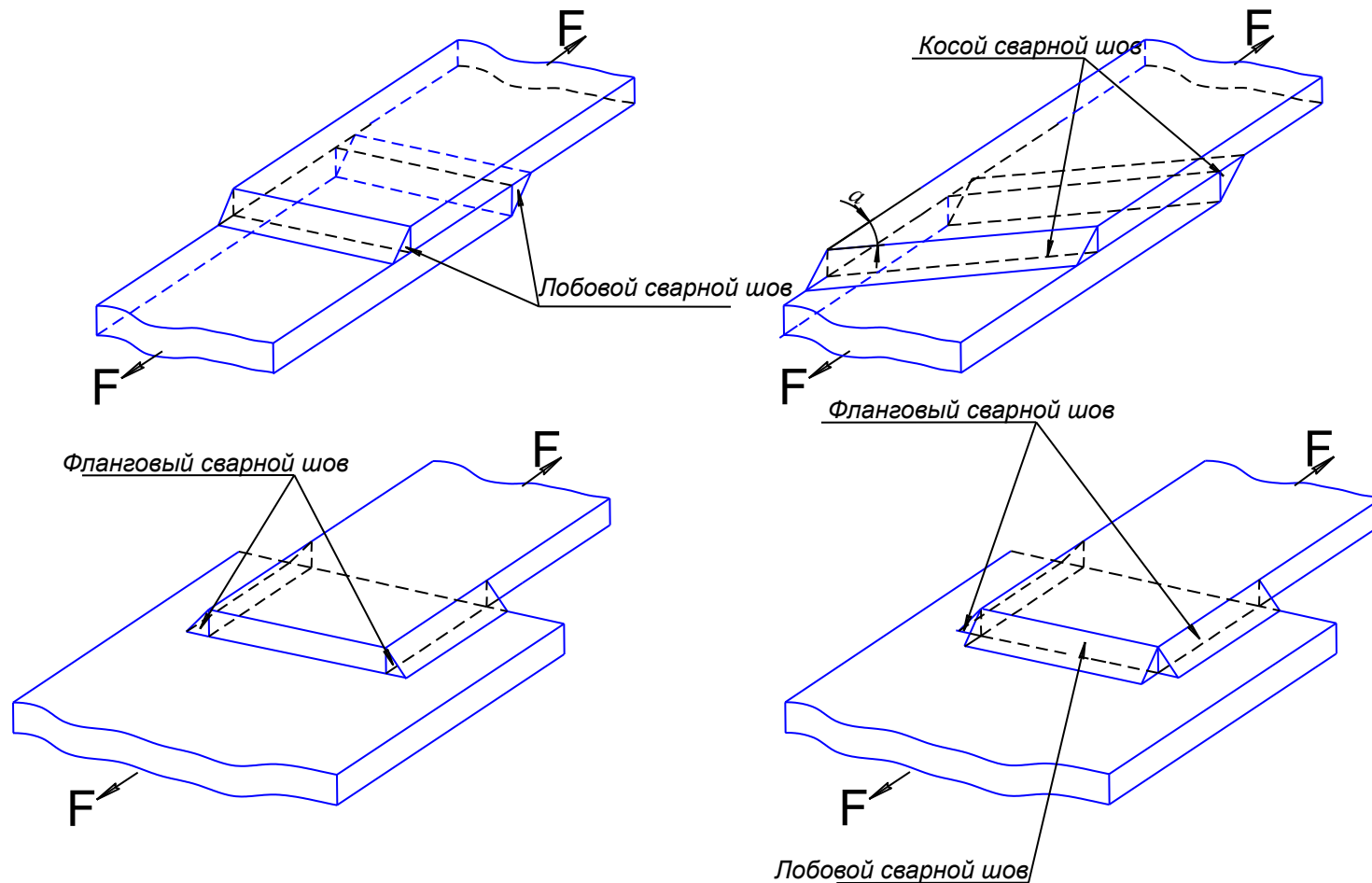
где  $n$  – количество болтов или заклепок;  $d$  – диаметр болта или заклепки;  $h$  – наименьшая из высот склепываемых или стягиваемых деталей;  $[\sigma]_{см}$  – допускаемое напряжение смятия.

Проектный расчет

$$n_{см} \geq \frac{F}{d \cdot h \cdot [\sigma_{см}]}$$

# Расчет сварных соединений

## Варианты выполнения нахлесточных сварных соединений

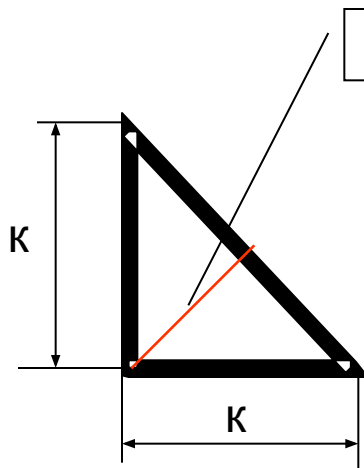


Более распространены на практике фланговые швы, они считаются вязкими и разрушаются после значительных остаточных деформаций. В отличие от фланговых швов, лобовые швы жесткие, потому что разрушаются при весьма малых остаточных деформациях и плохо сопротивляются повторно-переменным и ударным нагрузкам.

# Расчет сварных соединений

Приняты следующие допущения:

1. Нормальные напряжения оказывают незначительное влияние на прочность шва и их можно не учитывать;
2. Касательные напряжения равномерно распределены по сечению шва.
3. Сечение сварного шва имеет вид прямоугольного равнобедренного треугольника.
4. Разрушение шва происходит в сечении, проходящем по биссектрисе прямого угла.



Опасное сечение

Проверочный расчет

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} = \frac{Q}{0.7(l_{\phi} + l_{л})k} \leq [\tau']_{cp},$$

Здесь  $[\tau']$  – допускаемое напряжение среза для сварного шва определяется через допускаемые напряжения растяжения основного материала  $[\sigma]_p$ . Принимается при автоматической дуговой сварке  $[\tau'] = 0,65[\sigma]_p$ , при ручной дуговой сварке  $[\tau'] = 0,6[\sigma]_p$ ,

Проектировочный расчет

$$l \geq \frac{F}{0,7 \cdot [\tau'] \cdot k}$$

# Основные понятия деформации кручения

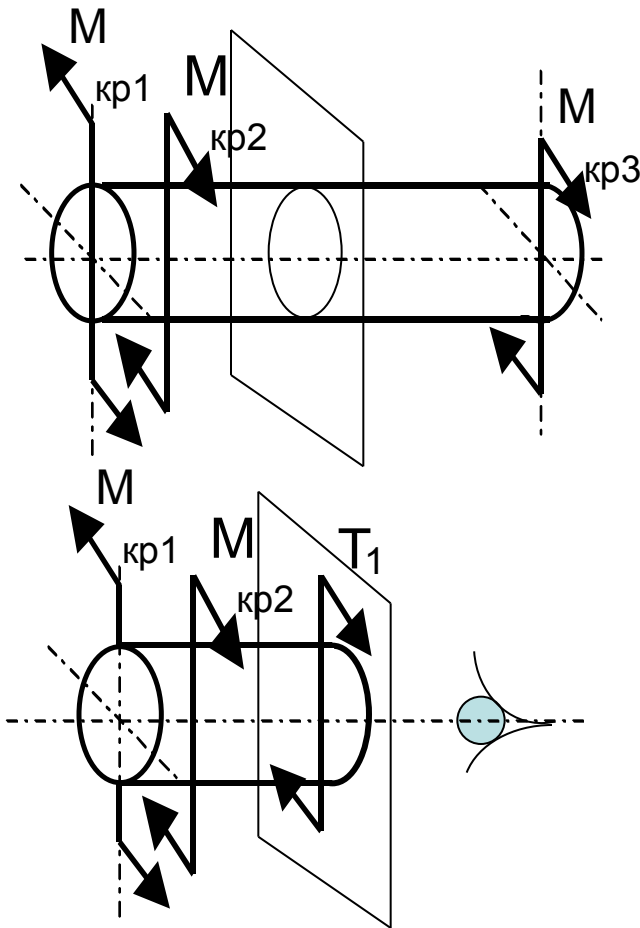
Под **кручением** понимают такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса действует только один силовой фактор - это крутящий момент

Брус в поперечном сечении, которого действует крутящий момент, называется **валом**.

Крутящий момент в рассматриваемом сечении равен алгебраической сумме всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от этого сечения.

$$T_1 = -M_{кр1} + M_{кр2}$$

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец вала со стороны сечения момент направлен по ходу часовой стрелки. Момент  $T_1$  – отрицательный



# Закон Гука при кручении

Основные допущения:

1. Поперечные сечения вала, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси, и после деформации.
2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.
3. Расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

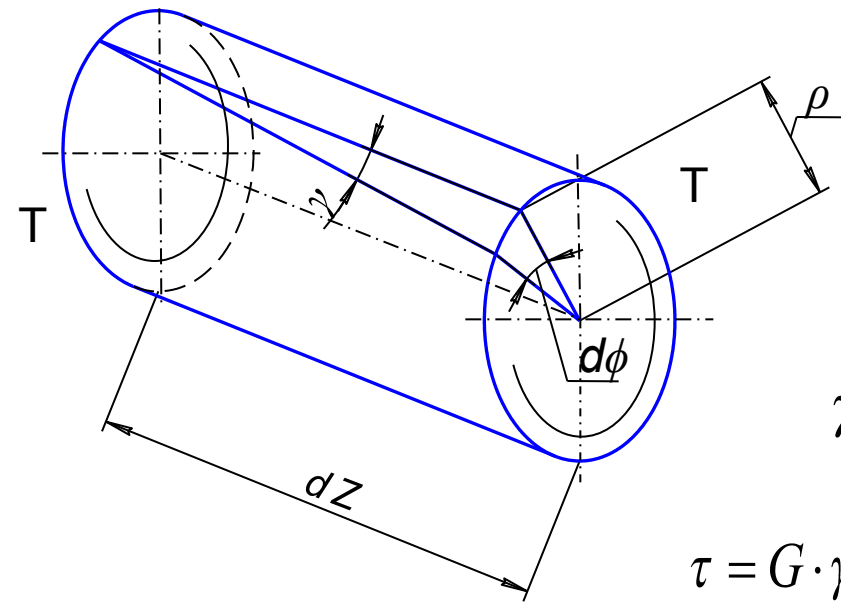
При кручении наблюдается плоское напряженное состояние чистого сдвига и соблюдается закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma,$$

Рассмотрим особенности деформации бруса при кручении

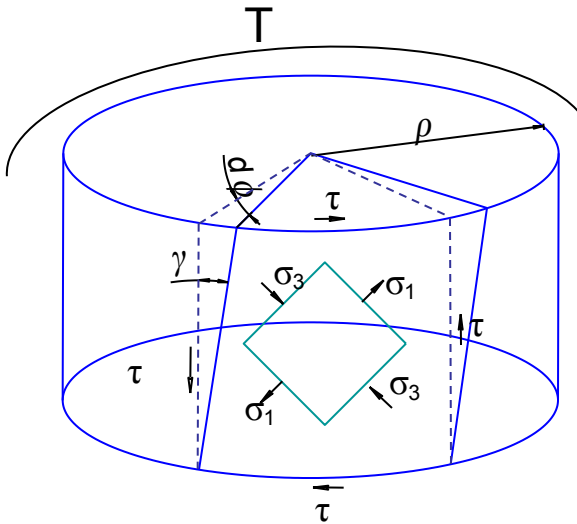
$$\gamma \cdot dz = d\varphi \cdot \rho \quad \longrightarrow \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho$$

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho \quad \longleftarrow \quad \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho = \theta \cdot \rho$$

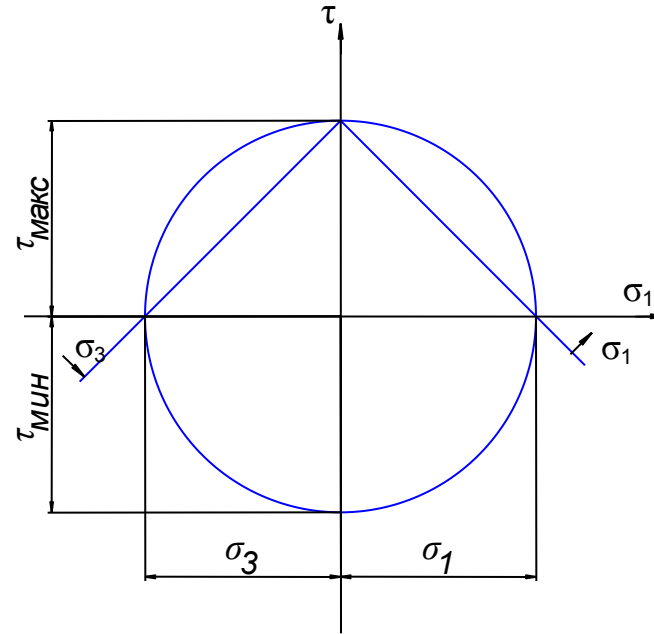


**В поперечных сечениях вала возникают касательные напряжения, направление которых, в каждой точке перпендикулярно к радиусу, соединяющему эти точки с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра.**

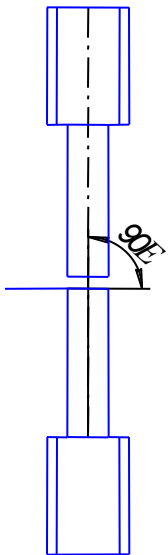
# Напряженное состояние при кручении



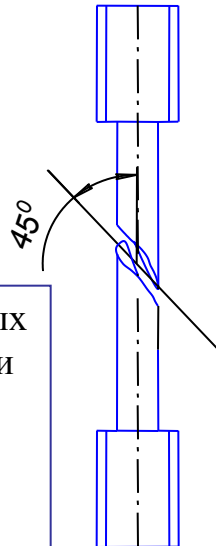
$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$



Возможны следующие варианты разрушения образцов

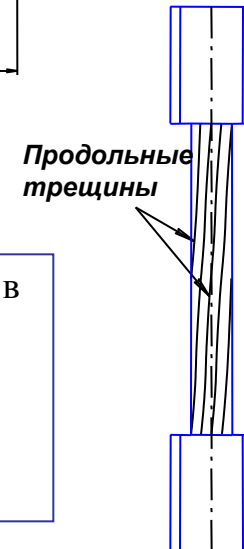


От действия касательных напряжений в плоскости поперечного сечения  
Пластичные материалы



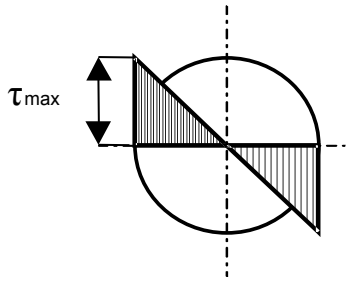
От действия главных напряжения в плоскости наклоненной под  $45^\circ$  к оси образца.

Хрупкие материалы (чугуны, закаленные стали)

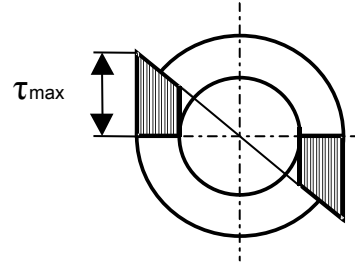


От действия касательных напряжений в плоскости параллельной образующей  
Анизотропные материалы (древесина)

# Напряжения при кручении



$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$



**Полярный момент инерции** характеризует, влияние размеров и форма поперечного сечения вала на его способность сопротивляться угловым деформациям

$$2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = I_p$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \text{ Для круглого сечения} \quad I_p = \frac{\pi d^4(1 - \alpha^4)}{32} \text{ Для трубчатого сечения}$$

здесь  $\alpha = d_1/d$ ,  $d_1$  – внутренний диаметр трубы,  $d$  – наружный диаметр трубы  
Полярный момент инерции выражается в  $\text{м}^4$  ( $\text{мм}^4$ ,  $\text{см}^4$ ).

**Полярный момент сопротивления** характеризует влияние геометрических размеров и формы поперечного сечения вала на его прочность.

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \text{ Для круглого сечения} \quad W_p = \frac{\pi d^3(1 - \alpha^4)}{16} \text{ Для трубчатого сечения}$$

Максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  прямо пропорциональны крутящему моменту  $T$  в опасном сечении и обратно пропорциональны полярному моменту сопротивления сечения  $W_p$ :

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

# Условие прочности при кручении

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом брусе не должны превышать соответствующих допускаемых значений

$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

Допускаемые напряжения

$$[\tau_{кр}] = \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{по 3 теории прочности}$$
$$[\tau_{кр}] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad \text{по 4 теории прочности}$$

Из условия прочности вытекает три типа *задач при кручении*

□. Задача проектного расчета



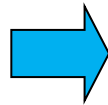
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau_p]}}$$

Для круглого сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi(1-\alpha^4)[\tau_p]}}$$

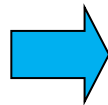
Для трубчатого сечения

□. Задача проверочного расчета



$$\tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau_{кр}]$$

□. Определение допускаемого момента



$$[T] \leq [\tau_{кр}] W_p$$

# Деформации при кручении.

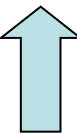
## Условие жесткости при кручении

При кручении различают угол закручивания  $\phi$  и относительный угол закручивания  $\theta$

Закон Гука при кручении

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot \rho$$

Напряжения при кручении


$$\tau = \frac{T}{I_p} \rho$$


$$\theta = \frac{T}{GI_p}$$

Угол закручивания

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p}$$

**Условие жесткости при кручении.**

Наибольший относительный угол закручивания, возникающий в скручиваемом брус не должен превышать соответствующих допускаемых значений

$$\theta_{\max} \leq [\theta]$$

Где  $[\theta]$  – допускаемы относительный угол закручивания.  $[\theta]=0,0045 \dots 0,02$  рад/м

# Потенциальная энергия деформации

Полная потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{T \cdot \varphi}{2} = \frac{T}{2} \cdot \frac{Tl}{GI_p} = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

Удельная потенциальная энергия (полная)

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

$$u = \frac{1}{2E} [2\tau^2 + 2\mu\tau^2] = \frac{(1+\mu)}{E} \tau^2$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

Удельная потенциальная энергия изменения формы

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) =$$

$$= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} (2\tau^2 + \tau^2) = \frac{1+\mu}{E} \tau^2$$

При кручении

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau$$