Лекция 6

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Тема

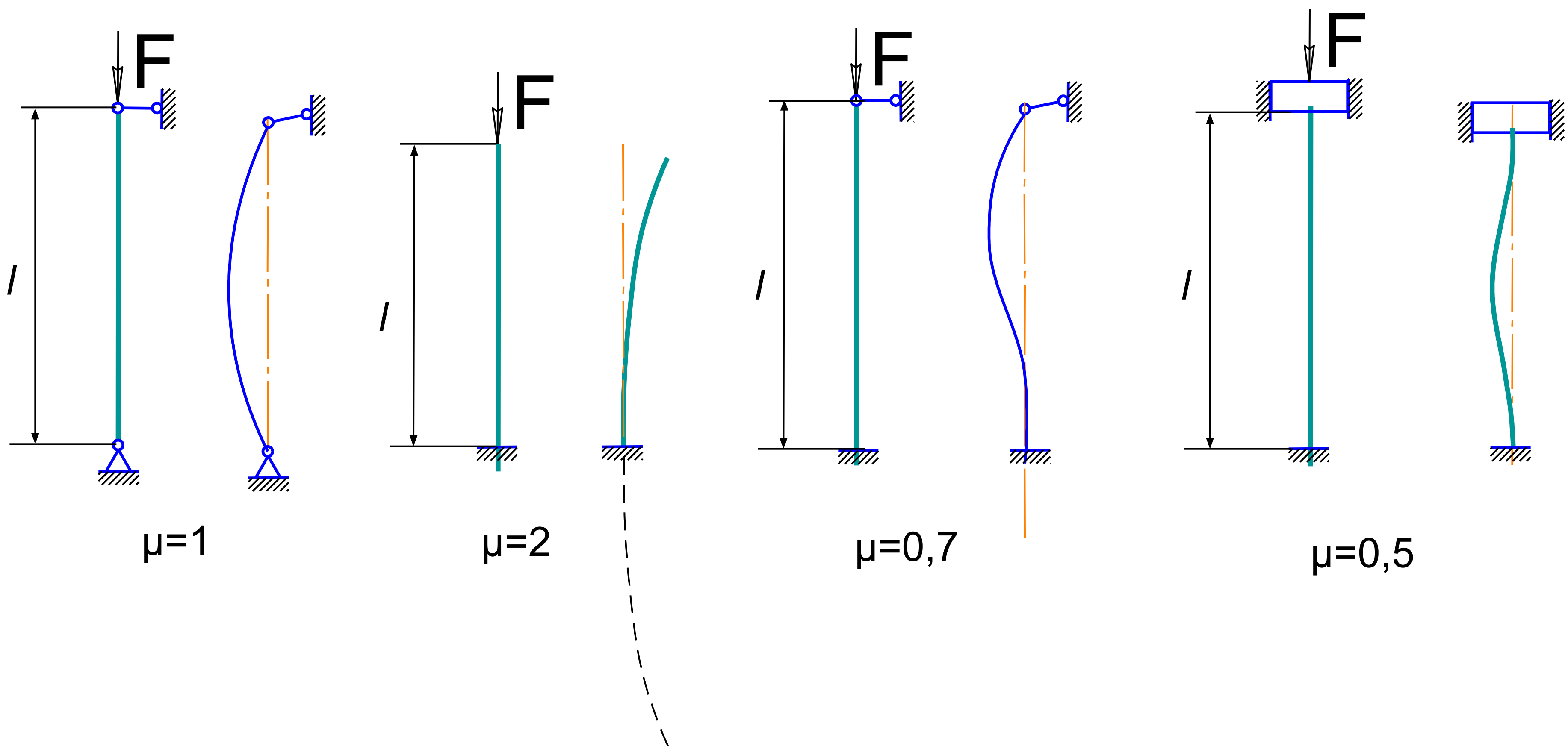
Сопротивление материалов

Устойчивость. Формула Эйлера

Для критической силы

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2}$$

E – модуль упругости, $I_{мин}$ – момент инерции, μ - коэффициент закрепления.



Устойчивость. Формула Эйлера

Для критического напряжения

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{S}$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{мин}}{S}}$$

Радиус инерции

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{S} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2 S}$$

$$\frac{I_{мин}}{S} = i^2_{мин}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2_{мин}}{(\mu l)^2}$$

$$\frac{i^2_{мин}}{(\mu l)^2} = \lambda^2$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{i_{мин}}{(\mu l)}$$

Гибкость сжатой стойки

Формула Феликса Ясинского

Для критического напряжения

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Для критической силы

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot S$$

Здесь a и b – постоянный коэффициенты зависящие от материала стойки

Значения коэффициентов a и b, МПа

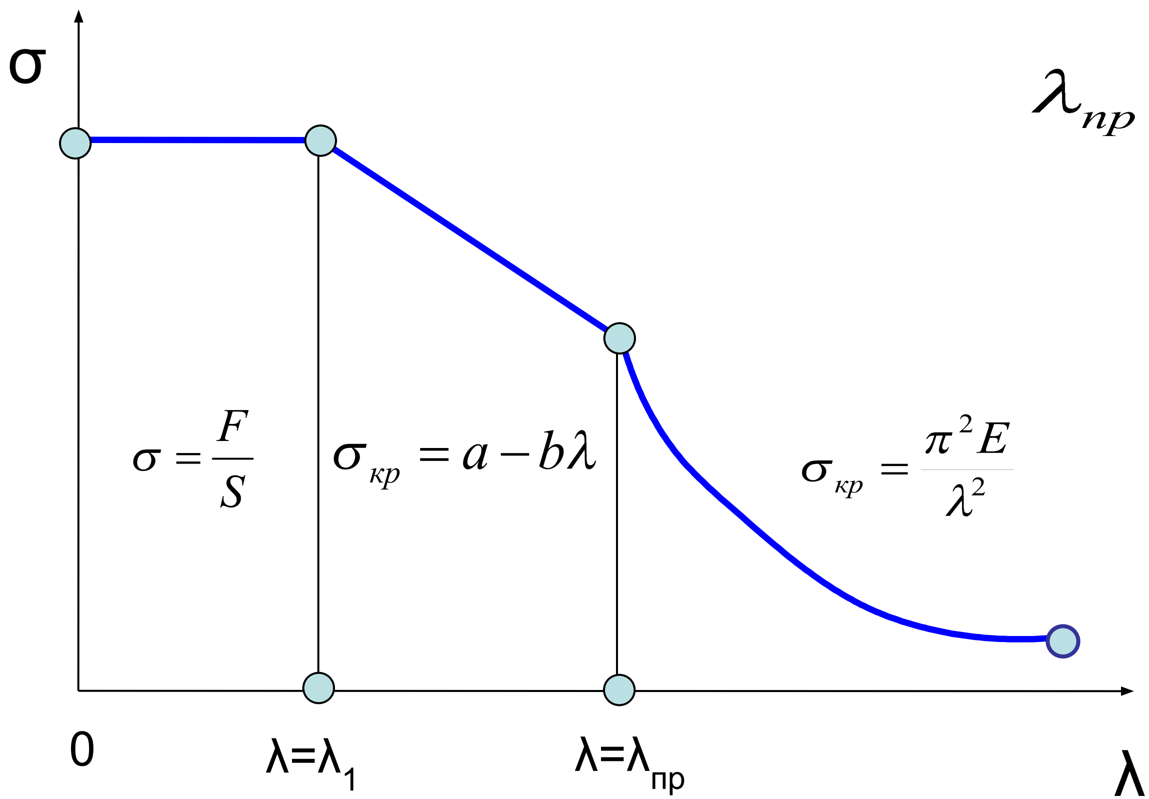
Материал	a, МПа	b, МПа
Ст.3	310	1,14
Серый чугун	776	12
Древесина		

Полный график критических напряжений

Напряжения в стойке не должны превышать предела пропорциональности

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}$$

Гибкость стойки в этом случае должна удовлетворять условию



$$\lambda_{пр} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

Для стали Ст. 3 $\lambda_{пр}=100$

Ст.5 $\lambda_{пр}=85$

Для чугуна $\lambda_{пр}=80$

Для древесины $\lambda_{пр}=70$

Сложное сопротивление

Под сложным сопротивлением подразумевают деформации бруса возникающие в результате комбинации, в различных сочетаниях, простых видов деформаций: растяжения (сжатия), среза, кручения и изгиба.

Сложный и косой изгиб

Сложным называется изгиб, вызванный силами или моментами, расположенными в двух и более плоскостях, проходящих через ось балки. Эти плоскости могут, как совпадать, так и не совпадать с главными плоскостями инерции

В том и другом случаях, наиболее удобным решением является приведение к двум плоским изгибам.

Для этого необходимо:

1) спроектировать все действующие силы на две главные плоскости;
2) рассмотреть изгиб в каждой из двух главных плоскостей отдельно;
3) пользуясь принципом независимости действия сил найти суммарные напряжения или деформации.

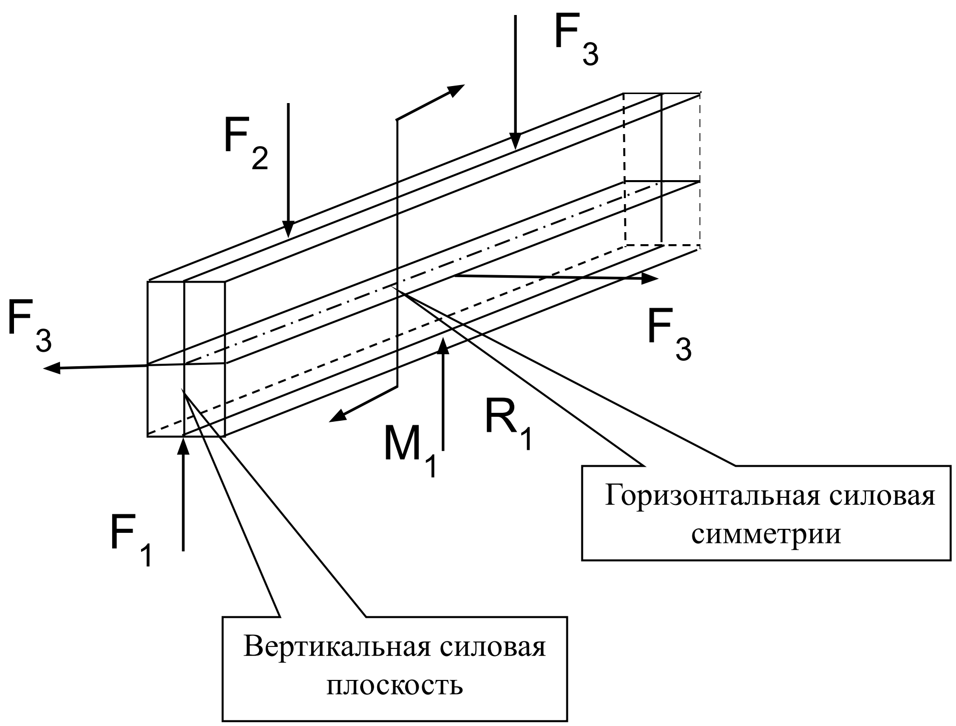
В большинстве случаев в опасной точке поперечного сечения бруса касательные напряжения, либо равны нулю, либо весьма малы по сравнению с нормальными напряжениями, поэтому расчеты на прочность при сложном и косом изгибе ведут с учетом только нормальных напряжений.

Сложный и косой изгиб

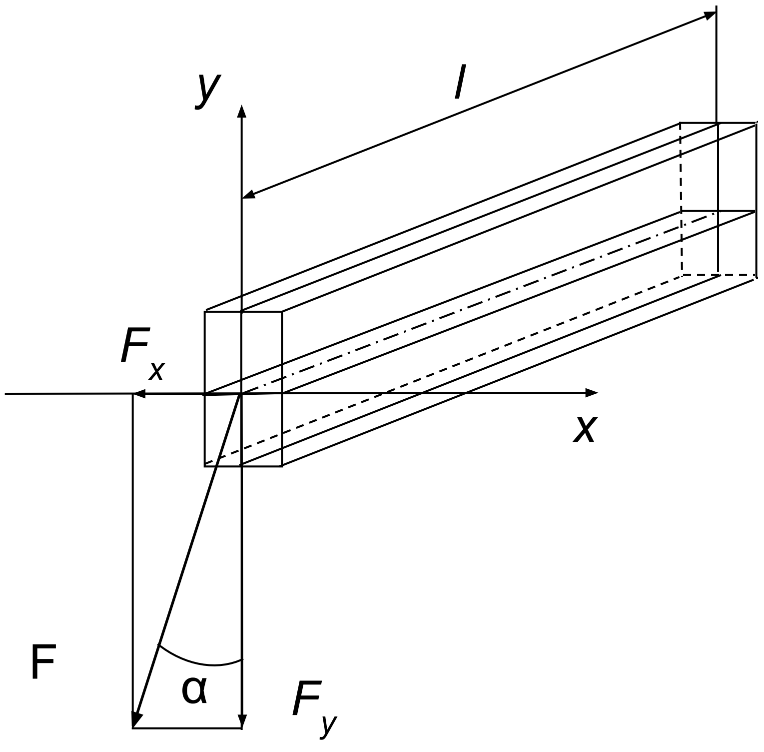
Под ***косым изгибом*** понимают такой, при котором нагрузки, действующие на балку, расположены в одной плоскости, которая не совпадает не с одной из главных плоскостей инерции.

Для сечений, у которых моменты инерции относительно обеих ортогональных осей одинаковы, косой изгиб не возможен. У этих сечений все оси главные. Это сечения типа круг, труба, квадрат и т.д.

Сложный изгиб



Косой изгиб



Сложный и косой изгиб

Напряжения при сложном изгибе

$$\sigma = \sigma_X + \sigma_y = \frac{M_X}{I_X} y + \frac{M_y}{I_Y} x$$

Напряжения при косом изгибе

$$\sigma = M\left(\frac{y \cdot \cos\alpha}{I_x} + \frac{x \cdot \sin\alpha}{I_y}\right)$$

здесь: M_X, M_Y – составляющие изгибающего момента; *M*- полный изгибающий момент в сечении; *α* - угол между осью *y* и следом плоскости действия полного момента; *x* и *y* координаты точки, в которой определяют напряжения; I_x и I_y - моменты инерции поперечного сечения.

При определении знака нормального напряжения необходимо придерживаться правила, по которому момент, вызывающий деформацию растяжения в первой четверти поперечного сечения считается положительным, тогда знак напряжения определяется знаком координат точки, в которой определяется напряжение.

Условие прочности при сложном изгибе

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma]$$

Условие прочности при косом изгибе

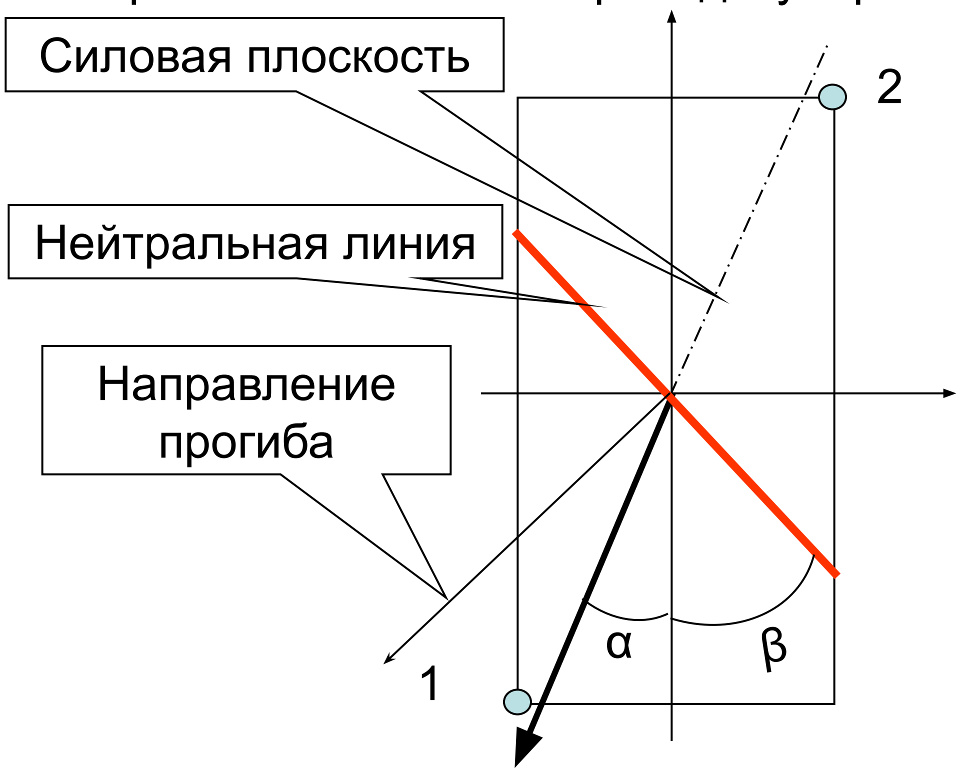
$$\sigma = \frac{M}{W_x}\left(\cos\alpha + \frac{W_x \sin\alpha}{W_y}\right) \le [\sigma]$$

Сложный и косой изгиб

Нейтральная линия поперечного сечения при сложном и косом изгибе проходит через центр тяжести сечения с угловым коэффициентом:

$$\kappa = tg\beta = -\frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y}$$

Нейтральная линия всегда располагается не в тех четвертях, через которые проходит силовая плоскость. В отличие от плоского изгиба при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к силовой линии.



Условие жесткости при сложном и косом изгибе

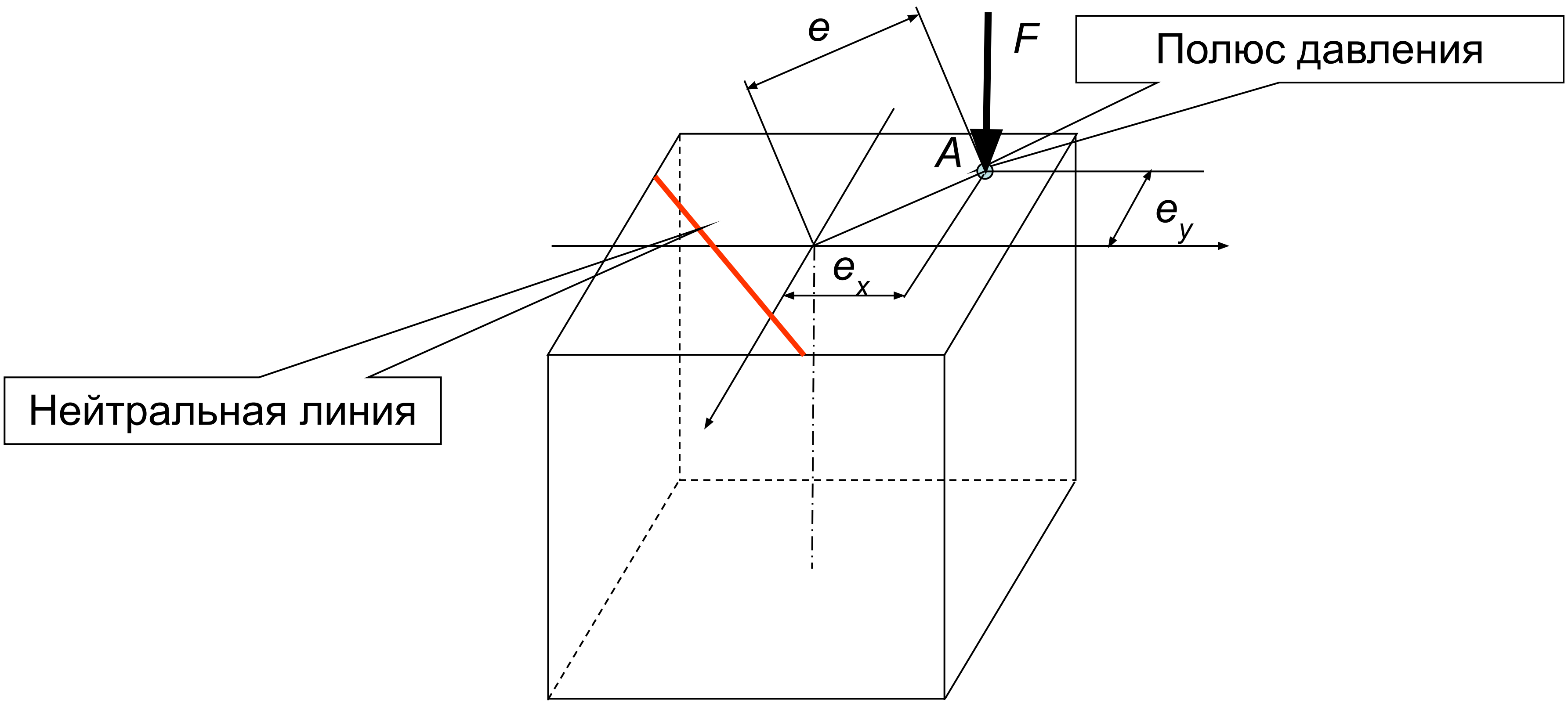
$$f = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2}} \le [f]$$

Суммарный прогиб происходит в направлении перпендикулярном нейтральной линии сечения.

Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренным растяжением или сжатием называется такой вид деформации, когда в поперечном сечении бруса одновременно действуют продольная растягивающая или сжимающая сила и изгибающий момент.

Точка, где приложена внешняя сила F, называется полюсом давления



Координаты e_x и e_y точки приложения силы F называются эксцентриситетами этой силы относительно главных осей инерции.

Внецентренное растяжение (сжатие)

Нормальные напряжения при внецентренном растяжении (сжатии)

$$\sigma = F\left(\frac{1}{A} + \frac{y \cdot e_x}{I_x} + \frac{x \cdot e_y}{I_y}\right) \qquad \sigma = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{y \cdot e_y}{i_x} + \frac{x \cdot e_x}{i_y}\right)$$

здесь F- внешняя продольная сила; x и y - координаты точки в которой определяются нормальные напряжения; e_x и e_y - координаты точки приложения внешней силы (эксцентриситеты); I_x и I_y - моменты инерции сечения относительно главных центральных осей; A- площадь поперечного сечения.

Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии):

$$\frac{e_x \cdot x}{i_y} + \frac{e_y \cdot y}{i_x} = -1$$

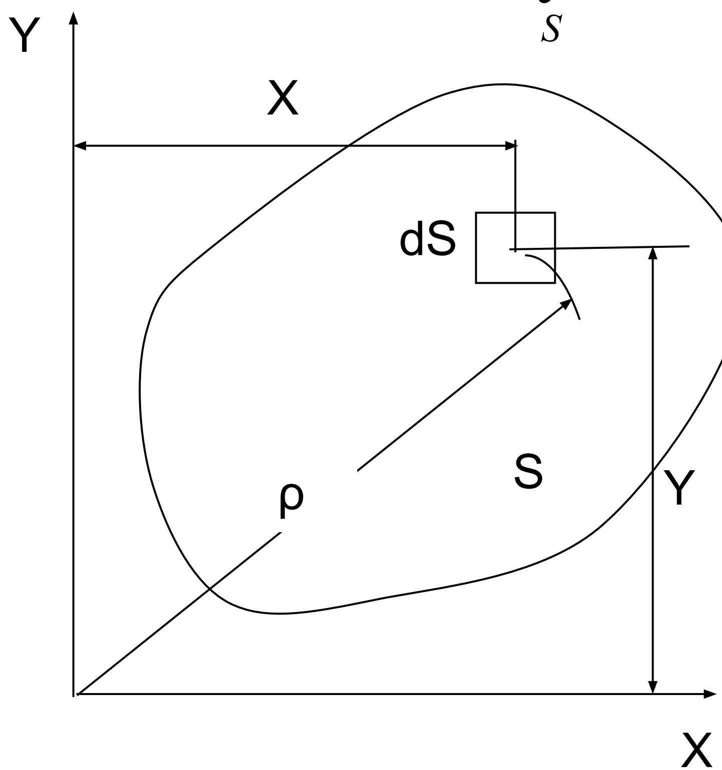
Нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения и пересекает координатные оси в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором находится точка приложения силы.

Геометрические характеристики плоских сечений

Различают следующие характеристики сечений: площадь S, статический момент площади (W_X, или W_Y), момент инерции площади ($I_{X,}$ или I_Y), центробежный момент инерции площади (I_{XY}).

*Под **статическим моментом площади** относительно некоторой оси понимается сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от их центра тяжести до соответствующей оси:*

$$W_X = \int_S Y dS \qquad W_Y = \int_S X dS$$



Оси, проходящие через центр тяжести, называются ***центральными осями.***

Моменты площади фигуры относительно центральных осей равны нулю

Координаты центра тяжести

$$X_C = \frac{W_Y}{S}; \qquad Y_C = \frac{W_X}{S}$$

Геометрические характеристики плоских сечений

Моментом инерции площади *относительно оси называется сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от их центра тяжести до соответствующей оси.*

$$I_X = \int_S Y^2 dS \qquad I_Y = \int_S X^2 dS$$

Центробежным моментом инерции называется сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от центра тяжести до осей

$$I_{XY} = \int_S XYdS$$

Полярным моментом инерции называется сумма произведения площадей элементарных площадок на квадрат расстояния от центра тяжести до начала координат

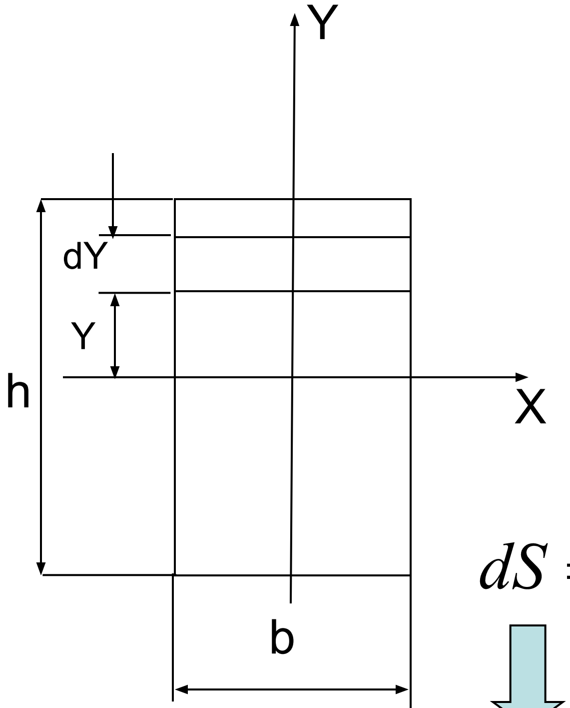
$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS \Rightarrow I_\rho = \int_S \rho^2 dS = \int_S \left(X^2 + Y^2\right) dS = \int_S X^2 dS + \int_S Y^2 dS = I_Y + I_X$$

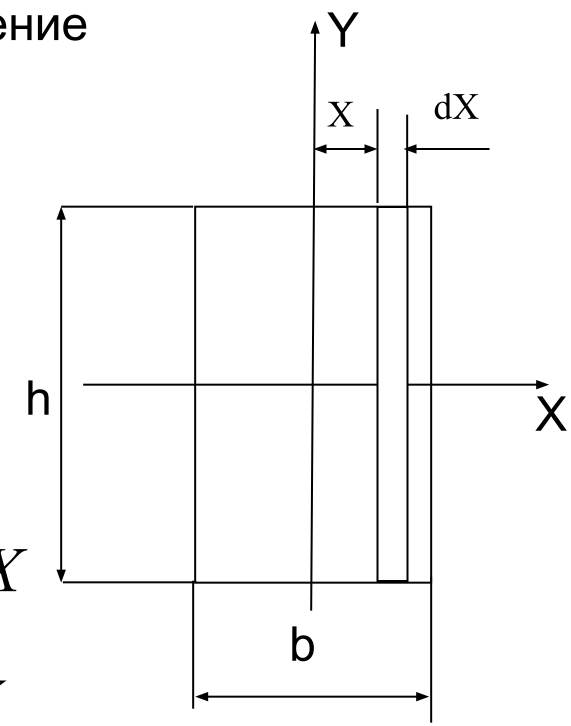
$$\rho^2 = X^2 + Y^2$$

Полярный момент инерции *равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей.*

Моменты инерции практически важных сечений

Прямоугольное сечение





$$dS = bdY$$

$$I_X = \int_S Y^2 dS$$

$$I_X = \int_{-h/2}^{h/2} bY^2 dY = b\int_{-h/2}^{h/2} Y^2 dY = \frac{bh^3}{12}$$

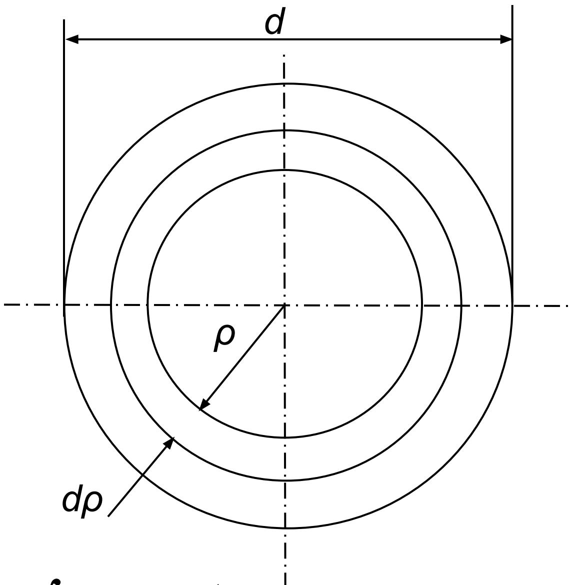
$$dS = hdX$$

$$I_Y = \int_S X^2 dS$$

$$I_Y = \int_{-b/2}^{b/2} hX^2 dX = h\int_{-b/2}^{b/2} X^2 dX = \frac{hb^3}{12}$$

Моменты инерции практически важных сечений

Круглое сечение

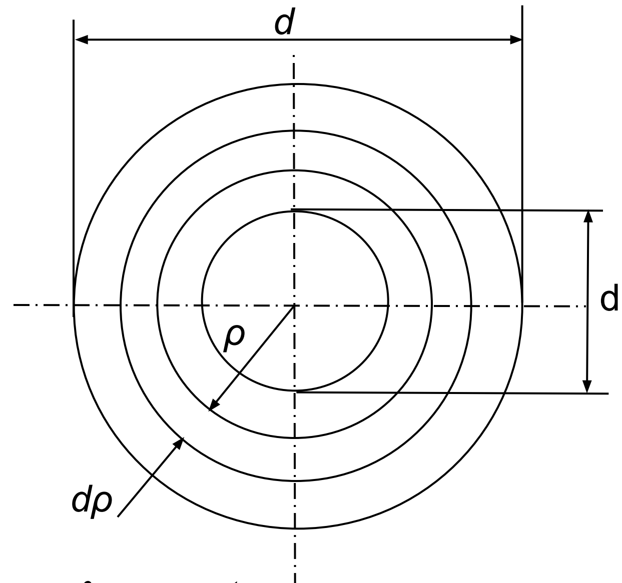


$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS \quad \Leftarrow \quad dS = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_P = \int_S \rho^2 dS = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_X = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Трубчатое сечение



$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS \quad \Leftarrow \quad dS = 2\pi\rho d\rho$$

$$I_P = \int_S \rho^2 dS = 2\pi \int_{d_1/2}^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi d^4}{64} - \frac{2\pi d_1^4}{62} = \frac{\pi d^4}{32}\left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right) = \frac{\pi d^4}{32}\left(1-\alpha^4\right)$$

$$I_X = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64}\left(1-\alpha^4\right)$$