Лекция 9. Область сходимости. Степенные ряды. Радиус сходимости. Разложение функций в степенные ряды

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от x, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной x сходиться, а при других – расходиться.

Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной x, при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ - постоянные числа, называемые коэффициентами ряда, x_0 – фиксированное число.

Теорема Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$, *то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| > |x_1|$.

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования

интервала сходимости

$|x-a|<R$ или $a-R<x<a+R$

внутри которого ряд абсолютно сходится, а вне – расходится.

На концах интервала сходимости степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие – либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном из них условно сходятся, на другом – расходятся, третьи – расходятся на обоих концах.

Число R – половина длины интервала сходимости – называется **радиусом сходимости** степенного ряда

1. Если среди коэффициентов ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нет равных нулю, т. е. ряд содержит все целые положительные степени разности $x-a$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{1}$$

при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0+a_1(x-a)^p+a_2(x-a)^{2p}+\ldots+a_n(x-a)^{np}+\ldots,$$

(где p — некоторое определенное целое положительное число: 2, 3, ...), то

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}. \tag{2}$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x-a$ любая (т. е. не образует арифметическую прогрессию, как в предыдущем случае), то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3}$$

в которой используются только значения a_n, отличные от нуля. (Эта формула пригодна и в случаях 1 и 2.)

Пример. Найти область сходимости ряда

$$x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Находим радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}|n+1|=|\infty|.$$

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.$$