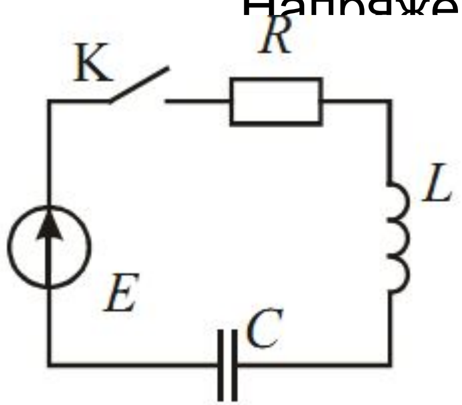
Переходные процессы в цепях второго порядка. Включение последовательной RLC-цепи на постоянное напряжение. Апериодический процесс. Критический процесс. Колебательный процесс. Операторный метод анализа переходных процессов. Преобразования Лапласа

При наличие двух независимых накопителей энергии переходные процессы в них описываются **уравнениями второго порядка.** Простейший пример такой цепи – последовательное соединение RLC.

Задача: определить переходное напряжение на ёмкости и ток в индуктивности.



Напряжение на ёмкости до коммутации: $u_C(0_-) = 0$.

...уктивности до коммутации: $i_L(0_-) = 0$.

... законам коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0) = 0,\ u_C(0_-) = u_C(0) = 0\ –$$

...а с нулевыми начальными условиями.

Составим дифференциальное уравнение для напряжения на ёмкости (после коммутации):

$$Ri_R(t)+L\frac{di_L(t)}{dt}+u_C(t)=E,\qquad i_L(t)=i_C(t)=i_R(t)=C\frac{du_C}{dt}, \text{ то}$$

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=E \text{ – НДУ.}$$

Решение уравнения ищем: $u_C(t)=u_{C\text{св}}(t)+u_{C_\text{пр}}(t)$.

Определяем свободную составляющую:

$$LC\frac{d^2u_{C\text{св}}(t)}{dt^2}+RC\frac{du_{C\text{св}}(t)}{dt}+u_{C\text{св}}(t)=0 \text{ – ОДУ;}$$

$LCp^2+RCp+1=0$ – **истическое уравнение.**

$p_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$ – теристического уравнения.

Введем понятие **критического сопротивления,** определяемого из условия:

$$\left(\frac{R_\text{кр}}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}=0,\ \text{откуда}\ R_\text{кр}=2\sqrt{\frac{L}{C}}=2\rho.$$

Если $R > R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, имеет место **апериодический процесс.**

Свободная составляющая определяетс $u_{Cсв}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$.

Принуждённая составляющая определяется п $t = \infty$, $u_{Cпр} = u_C(\infty) = E$.

Общий вид реакции: $u_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + E$.

Для определения А1 и А2 составим ещё одно уравнение:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t},$$

Поскольку $i_L(t) = i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}$, то $i_L(t) = C\left(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}\right)$.

Определим постоянные интегрирования из начальных условий:

При этом, образуется система алгебраический уравнени $i_L(0) = 0$, $u_C(0) = 0$.

$$\begin{matrix} A_1 + A_2 + E = 0 \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 = 0 \end{matrix}, \qquad A_1 = \frac{Ep_2}{p_1 - p_2}, \; A_2 = -\frac{Ep_1}{p_1 - p_2}.$$

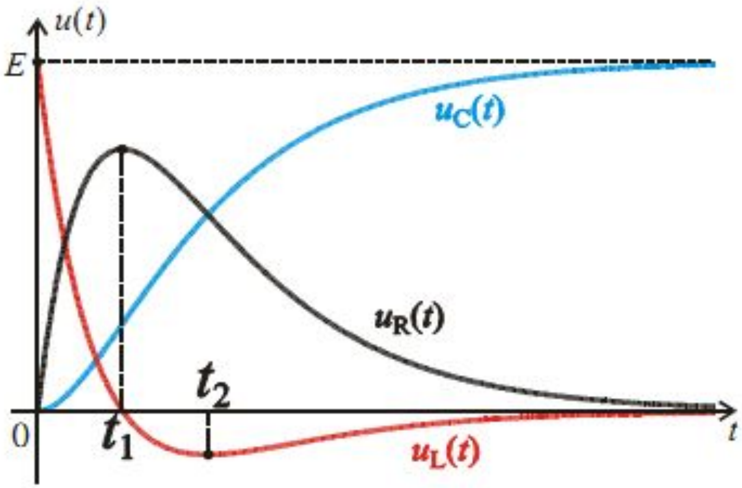
После подстановки и алгебраических преобразований получим:

$$u_C(t) = E + \frac{E}{p_1 - p_2}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right)$$ –апряжение на ёмкости.

$$i_L(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$ –к в индуктивности.

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{E}{(p_1 - p_2)}\left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}\right)$$ –ряжение на индуктивности.

$$u_R(t) = i_R(t) R = \frac{ER}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$ – апряжение на



$$t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2}\ln\frac{p_2}{p_1},\; t_2 = 2t_1.$$

Включение последовательной RLC-цепи на постоянное напряжение. Критический процесс.

Если $R = R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, имеет место **критический процесс**.

Свободная составляющая определяетс $u_{Cсв}(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$.

Общий вид реакции:

$$u_C(t) = (A_1 + A_2 t)e^{pt} + E, \text{ где } p = p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}.$$

Для определения А1 и А2 составим еще одно уравнение:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = A_2 e^{pt} + p(A_1 + A_2 t)e^{pt},$$

$$i_L(t) = i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}, \text{ то}$$

$$i_L(t) = C\left(A_2 e^{pt} + p(A_1 + A_2 t)e^{pt}\right),$$

$$i_L(0) = 0,\ u_C(0) = 0$$

получаем систему: $\begin{matrix} A_1 + E = 0 \\ A_2 + pA_1 = 0 \end{matrix}$, уда $A_1 = -E,\ A_2 = pE.$

$$u_C(t) = E - E(1 - pt)e^{pt}$$ – напряжение на ёмкости.

$$i_L(t) = \frac{E}{L} t e^{pt}$$ – ток в индуктивности.

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{E}{L}\left(e^{pt} + tpe^{pt}\right) = E(1 + pt)e^{pt}$$ –ние на индуктивности.

$$u_R(t) = i_R(t)R = \frac{ER}{L} t e^{pt}$$ – апряжение на резисторе.

Колебательный процесс.

Если $R < R_{кр}$, то имеет место **колебательный процесс.**

где
$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\sigma \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} = -\sigma \pm j\omega_{св},$$

$$\sigma = \frac{R}{2L},\ \omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2},\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Решение определяем в виде: $u_C(t) = Ae^{-\sigma t}\sin(\omega_{св}t+\psi)+E$.

Составим второе уравнение для определения неизвестных коэ...

$$i_L(t) = i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = CAe^{-\sigma t}\left(\omega_{св}\cos(\omega_{св}t+\psi)-\sigma\sin(\omega_{св}t+\psi)\right).$$

Из нулевых начальных условий

$$\begin{aligned}0 &= A\sin\psi + E\\ 0 &= CA(\omega_{св}\cos\psi - \sigma\sin\psi)\end{aligned}, \qquad \psi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_{св}}{\sigma}\right),\ A = -\frac{E}{\sin\psi}.$$

Поскольку

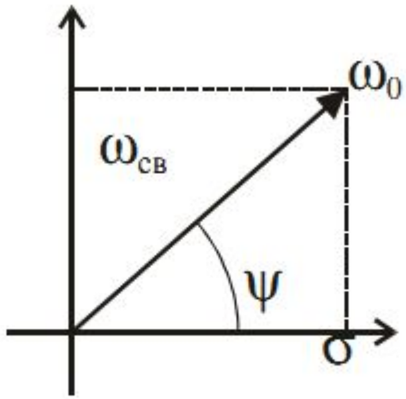
$\omega_{св}\cos\psi - \sigma\sin\psi = 0$, то $\omega_{св}\sqrt{1-\sin^2\psi} = \sigma\sin\psi$, $\omega_{св}^2\left(1-\sin^2\psi\right) = \sigma^2\sin^2\psi$.

После пр... получим уравнение: $\omega_{св}^2 = \left(\sigma^2+\omega_{св}^2\right)\ \sin^2\psi$,

Откуда $\sin\psi = \dfrac{\omega_{св}}{\sqrt{\sigma^2+\omega_{св}^2}}$.

Последнее выражение приведем к виду $\dfrac{\omega_{св}}{\sqrt{\sigma^2+\omega_{св}^2}} = \dfrac{\omega_{св}}{\sqrt{\sigma^2+\omega_0^2-\sigma^2}} = \dfrac{\omega_{св}}{\omega_0}$,

следовательно $\sin\psi = \omega_{св}\sqrt{LC}$.



$$A = -\frac{E}{\sin\psi} = -\frac{E}{\omega_{св}\sqrt{LC}}, \ \omega_{св} = \omega_0 \sin\psi, \ \sigma = \omega_0 \cos\psi .$$

Переходное напряжение на ёмкости:

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{1}{\omega_{св}\sqrt{LC}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_{св} t + \psi)\right), \text{ где } \psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{св}}{\sigma}\right);$$

пряжение на

ре $i_L(t) = \frac{E}{\omega_{св} L} e^{-\sigma t} \sin \omega_{св} t$ –

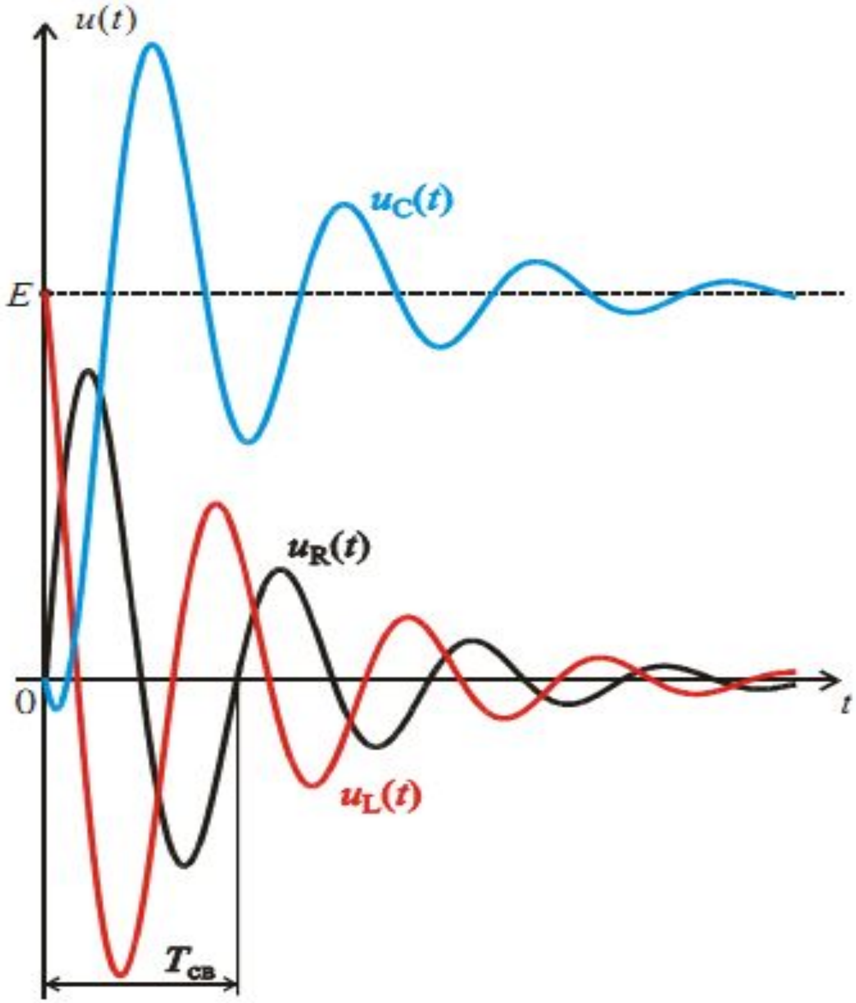
жение на

$$u_R(t) = i_L(t) R = \frac{ER}{\omega_{св} L} e^{-\sigma t} \sin \omega_{св} t \ –$$

жение на ин

$$u_L(t) = -\frac{E}{\omega_{св}\sqrt{LC}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_{св} t - \psi) \ –$$

Представим на графике соответствующие переходные напряжения:



$$T_{св} = \frac{2\pi}{\omega_{св}}.$$

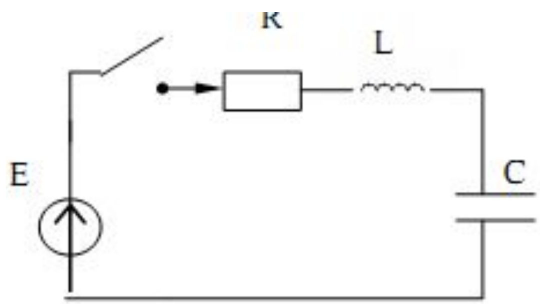
кания:

$$\Delta = e^{\sigma T_{св}}.$$

ий декремент

$$\delta_\sigma = \ln \Delta = \sigma T_{св}.$$

Напряжение при переходном процессе в колебательном режиме может превысить ЭДС– это надо учитывать. Физическое пояснение колебательного процесса.



Колебания возникают, когда есть хорошая возможность обмена энергией
разных видов – здесь при малом сопротивлени
магнитная

$$R < 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

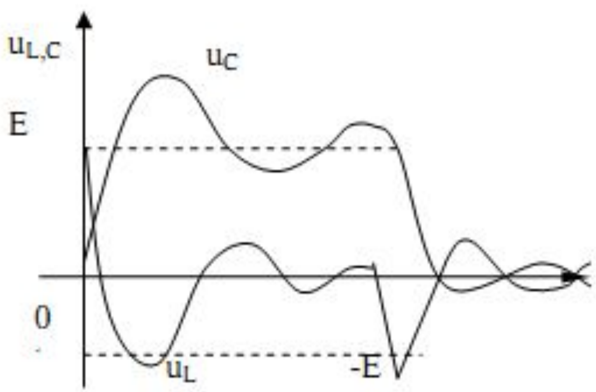
энергия индуктивности легко переходит в электрическую энергию емкости и
наоборот.

Отключение источника в последовательной RLC цепи

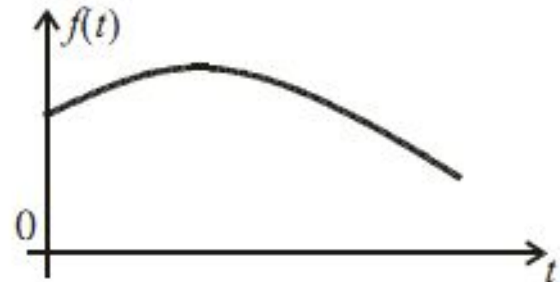
Все процессы идут в обратном направлении: емкость разряжается. Характер процесса также определяется корнями характеристического уравнения (сравниваются R и Rкр). Ток меняет направление,

u_R и u_L етственно u_C

меняют знак, а остается того же знака.



Операторный метод анализа переходных процессов. Преобразования Лапласа



$f(t)$ –очно-непрерывная однозначная функция.

1. $f(t) = 0$, если $t < 0$.

2. $\int |f(t)| dt < \infty$.

Введём комплексную переменнук $p = \sigma + j\omega$.

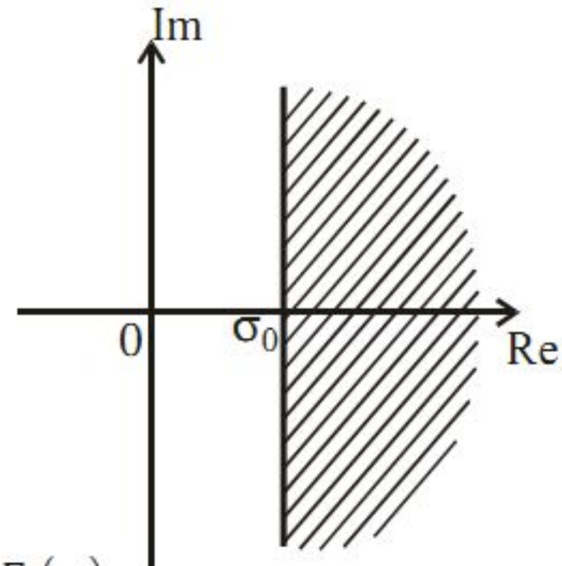
Преобразованием Лапла $F(p)$ функции $f(t)$ зляется функция комплексной переменной вида:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Интеграл такого типа абсолютно сходится в полуплоско $\mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_0$

$f(t)$ еет ограниченный показатель роста, то есть $|f(t)| < Me^{-\sigma_0 t}$.

$f(t)$ –игинал, $F(p)$ –жение.



Для сокращений записи преобразований используем: $f(t) \Leftrightarrow F(p)$.

Обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp .$$

Свойства преобразования Лапласа:

1. Линейность. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(p)$.

2. Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(0_-)$.

3. Интегрирование оригинала. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $\int_0^\infty f(t)dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$.

4. Сжатие. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

5. Запаздывание. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $f(t \pm t_0) \Leftrightarrow F(p)\mathrm{e}^{\pm p t_0}$.

6. Смещение. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $F(p \pm \lambda) \Leftrightarrow f(t)\mathrm{e}^{\mp t\lambda}$.

7. Свёртка. Если $f(t) \Leftrightarrow F(p)$, то $F_1(p)F_2(p) \Leftrightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$.

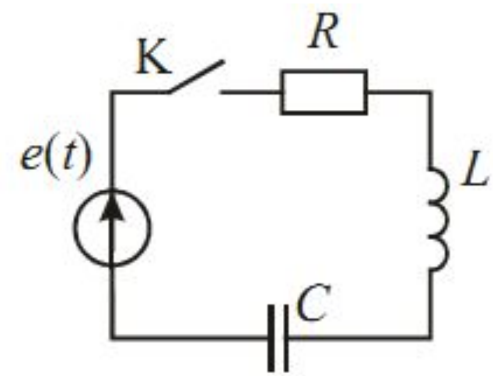
Предельные соотношения:

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0} f(t)$$
$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Расчёт переходных процессов операторным методом

В случае нулевых начальных условий:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i dt = e(t).$$



Применим преобразование Лапласа, получим

$$RI(p) + LpI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = E(p).$$

Закон Ома в операторной форме при нулевых начальных условиях:

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p)$ – операторное сопротивление.

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R + pL + \frac{1}{pC}}$$ – проводимость.

I и II законы Кирхгофа в операторной форме соответсте $\sum_{k=1}^{m} I_k(p) = 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k(p) I_k(p) = \sum_{k=1}^{n} E_k(p).$$

В случае ненулевых начальных условиях, то ес $i(0) \neq 0$, $u_C(0) \neq 0$:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = e(t),$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} idt + u_C(0) = e(t).$$

Применяя преобразование Лапласа, получим:

$$RI(p) + LpI(p) - Li_L(0) + \frac{1}{Cp}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p).$$

Изображение для тока:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E_{эк}(p)}{Z(p)},$$

Соответствующая **операторная схема замещения** цепи после коммутации: