Цепи с распределенными параметрами. Основные понятия. Уравнения однородной линии. Синусоидальные напряжения и токи в линии.

Ранее в курсе ТОЭ рассматривали цепи с сосредоточенными параметрами. В них можно выделить элементы, в которых запасается энергия магнитного поля, электрического поля, происходят необратимые преобразования

электромагнитной энергии в другие виды энергии. Эти явления учитывают

элементы резистивный, индуктивный, емкостный. Под цепями с распределенными параметрами понимают такие цепи, в которых энергии электрического и магнитного полей, а также необратимые

преобразования энергии (потери в виде тепла) распределены равномерно или неравномерно вдоль цепи (ее длины). К цепям с распределенными параметрами относят **ЛЭП, линии телефонной связи, антенны приемно-передающих устройств. Обмотки электрических машин и трансформаторов** тоже можно считать цепями с распределенными параметрами. Рассмотрим двухпроводную однородную линию электропередачи. Однородной называют линию, параметры которой равномерно распределены вдоль ее длины. Это идеализированная линия, так как учитывают изменение параметров от

В цепях с распределенными параметрами напряжения и токи будут различны на каждом участке и могут меняться в пределах одного участка.

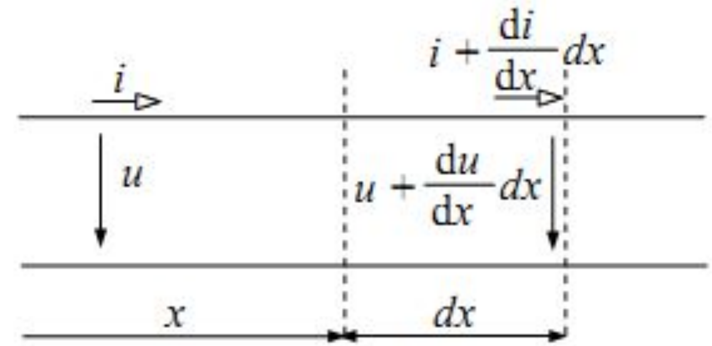
На рис. изображен элементарный участок

dx – длина элементарного участка,

I и u – ток и напряжение в начале у

$i + \frac{di}{dx}dx$ – ток в конце участка,

$u + \frac{du}{dx}dx$ – напряжение в конце участк



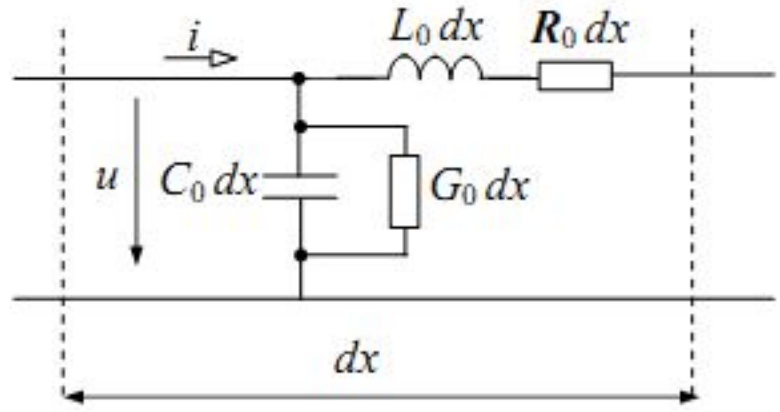
$C_0dx, L_0dx, R_0dx, G_0dx$. C_0, L_0, R_0, G_0 –

обладает параметрами:

первичные параметры однородной линии, т. е. параметры линии на единицу длины. Их считают обычно известными и постоянными.

$$[R_0] = \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \quad [G_0] = \frac{\text{См}}{\text{км}}, \quad [L_0] = \frac{\text{Гн}}{\text{км}}, [C_0] = \frac{\Phi}{\text{км}}.$$

Элементарный участок с учетом и первичных параметров представлен на рис. Каждый участок линии длиной dx можно представить в виде Г-образного четырехполюсника, саму линию – в виде совокупности П- или Т-образных четырехполюсников, включенных последовательно.



Линию в целом можно рассматривать как симметричный четырехполюсник относительно входных и выходных зажимов.

Уравнения однородной линии

Напряжение и ток линии зависят не только от времени, но и от пространственной координаты x (от точки линии). $u(x,t);\ i(x,t).$

Координату x можно отсчитывать от начала линии, конца или любой точки, принятой за начало отсчета. Начало линии – точка подключения линии к генератору, конец линии – точка подключения нагрузки к линии.

Будем вести отсчет координаты x от начала линии и считать, что вся

нагрузка сосредоточена в конце линии, линия не им $u(x,t)$ и $i(x,t)$ ий.

Исследовать линию – это значит найти зависимости

в любой точке линии в любой момент времени.

Определим изменение напряжения на участке dx

$$u-\left(u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}dx\right)=-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}dx\,.$$

падений напряжений на ка

На рис. Выше видно, что

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}dx=(R_0dx)\cdot i+(L_0dx)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

тогда

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=R_0i+L_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Изменение тока в преде мме токов утечки в

элементах этого участка

$$-\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}dx=(G_0dx)u+(C_0dx)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Отсюда

$$-\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}=G_0u+C_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Получим систему уравнений, которую называют **телеграфными уравнениями** однородной линии

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = R_0 i + L_0 \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}; \\[2ex] -\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x} = G_0 u + C_0 \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Систему записывают с использованием частных производных, так как напряжения и токи зависят от двух координат: t и x.

Если за начало отсчета принять конец линии и координату до рассматриваемой точки линии обозначить x′ , то получим систему уравнений (ниже), аналогичную системе (выше) но в левой части знаки изменятся на противоположные:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x'} = R_0 i + L_0 \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}; \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x'} = G_0 u + C_0 \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Решение системы относительно напряжений и токов можно получить однозначно при известных начальных и [illegible]овиях.

Начальные условия – это значения токов и напряжений в начале или конце линии для момента времени 0 = t .

Граничные условия устанавливают связь между напряжением и током в начале или конце линии в зависимости от режима работы линии.

Синусоидальные напряжения и токи в линии

Если линия подключена к источнику синусоидального напряжения с частотой f, то напряжение и ток установившегося режима изменяются по си-

нусоидальному закону с той же частотой.

В системе уравнений перейдем от мгновенных значений к комплексным. Комплексные значения зав $t=0:\ \dot{I}=\dot{I}(x);\ \dot{U}=\dot{U}(x).$ от t, так как комплекс сопоставляют вектору в момент времени

Поэтому получаем систему уравнений не в частных производных, а в обыкновенных (полных):

$$\begin{cases} \dfrac{-\mathrm{d}\dot{U}}{\mathrm{d}x}=R_0\dot{I}+j\omega L_0\dot{I}=(R_0+j\omega L_0)\dot{I}=\underline{Z}_0\dot{I}; \\ -\dfrac{\mathrm{d}\dot{I}}{\mathrm{d}x}=G_0\dot{U}+j\omega C_0\dot{U}=(G_0+j\omega C_0)\cdot\dot{U}=\underline{Y}_0\dot{U}, \end{cases}$$

Где $\underline{Z}_0$ – комплексное продольное сопротивление на единицу длины лин $\underline{Y}_0$ –

комплексная поперечная проводимость на единицу длины

Более краткая запись: $$\left.\begin{aligned} -\frac{d\dot{U}}{dx} &= \underline{Z}_0\dot{I} \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} &= \underline{Y}_0\dot{U} \end{aligned}\right\}$$

Из системы уравнений, исключая либо ток, либо напряжение, можно получить соответственно дифференциальное уравнение для напряжения или тока. Продифференцировав первое уравнение и подстави $\frac{d\dot{I}}{dx}$ него значение из учим $\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0\underline{Y}_0\dot{U}$.

Обозначим $\sqrt{\underline{Z}_0\underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \underline{\gamma}$ –аспространения.

Тогда уравнение примет ви $$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2\dot{U} = 0$$

Как известно из математики, решение этого уравнения есть сумма двух экспоненциальных функций: $\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}$,

где $\dot{U}$ – комплекс действующ жения для любойточки линии;

$\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ – постоянные интегрирования, $\underline{\gamma}$ и $\underline{\lambda}$ – корни характеристического уравнения, Аналогично можно получить решение для тока $\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{I}$.

Но такое решение нецелесообразно, так как нужно искать еще две постоянные интегрирования. Более рационально найти ток из первого уравнения системы :

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0}\frac{d\dot{U}}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0}\frac{d}{dx}\left(\dot{A}_1\, e^{-\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2\, e^{\underline{\gamma}x}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{\underline{Z}_0}\left(\dot{A}_1\, e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_2\, e^{\underline{\gamma}x}\right) = \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}}\left(\dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_2\, e^{\underline{\gamma}x}\right).$$

Комплексное выражение $\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$ зависит от первичных параметров и имеет размерность сопротивления. Его называют характеристическим или волновым сопротивлением линии и обозначают $\underline{Z}_c$:

$$\underline{Z}_c = Z_c\, e^{j\theta} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}.$$

Тогда комплекс действующего значения тока для любой точки линии можно записать следующим образом:

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c}\, e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_c}\, e^{\underline{\gamma}x}.$$

Для выяснения физического смысла слагаемых напряжения в уравнении перейдем к мгновенному значени $u(x,t)$ ряжения При этом учтем, что постоянные интегрирования и коэффициент распространения являк $\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}$; $\dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$; ислами:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta ,$$

где α – коэффициент затухания, характеризующий степень убывания амплитуды; β – коэффициент фазы, характеризующий изменение фазы.

Мгнове $u(x,t) = A_{1m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + A_{2m} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2).$

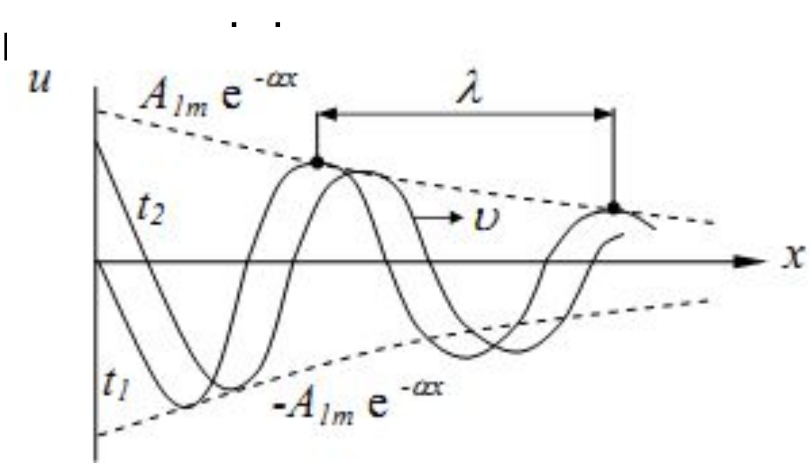
Если считать координату x фиксированной, то первое слагаемое изменяется по синусоидальному закону с постоянной амплитудой напряжения.

Если считать фиксированным время, то напряжение меняется по синусоиде, затухающей по экспоненте.

Убывание амплитуды волны вдоль линии обусловлено потерями в линии, а изменение фазы – конечной скоростью распространения электромагнитных колебаний.

Коэффициенты α и β, входящие в γ, характеризуют распространение

волны вдоль линии, поэтому γ наз… распространения.



На рис. приведены волны t_1 и t_2 $(t_2 > t_1)$.

напряжения для двух моментов

времени

Волна перемещается от начала

линии к концу с постоянной ско-

ростью υ.

Первая составляющая напряжения имеет максимальную амплитуду

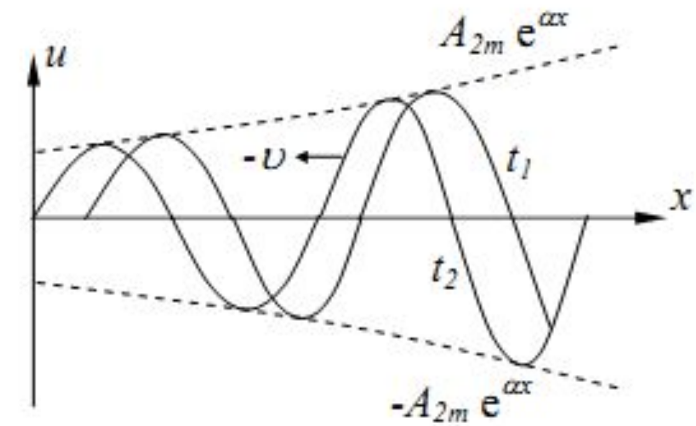
в начале линии и минимальную в конце. Эта составляющая напряжения движ… $A_{2m}e^{\alpha x}$ начала линии к концу со скоростью υ. Эту волну называют бегущей (прямой или падающей составляющей). Так как второе слагаемое имеет амплитуду βx – (со знаком плюсом), то она достигает максимального значения в конце линии. Эту волну называют обратной или от… $\upsilon = -\frac{\omega}{\beta}$. …ой. В фазе колебания второе слагаемое со знаком …поэтому фазовая скорость

Это означает, что вторая составляющая напряжения перемещается с

той же скорос $u(x,t)$ то и первая, но от к

Напряжение имеет положительное направление от него (первого) провода к нижнему (второму) и состоит из суммы двух составляющих с такими же положи-

т



$$u(x,t) = u_{\text{пр}}(x,t) + u_{\text{обр}}(x,t)\,.$$

Аналогично можно получить мгновенное значение тока:

$$i(x,t) = \frac{A_{1m}}{Z_c} = e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) - \frac{A_{2m}}{Z_c} e^{\alpha x}\sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta) = i_{\text{ïð}}(x,t) - i_{\text{îáð}}(x,t)\,.$$

Результирующий ток и его прямая составляющая совпадают по на-
правлению и направлены от начала к концу линии, обратная составляющая направлена от конца к началу линии.

Коэффициентом пропорциональност U_m и I_m, U и I ежду прямой и обратной волны является характеристическое (волновое) сопротивление каждой волны.

В комплексной форме можно записать $\dfrac{\dot{U}_{\text{пр.}}}{\dot{I}_{\text{пр.}}} = \underline{Z}_c;\ \dfrac{\dot{U}_{\text{обр.}}}{\dot{I}_{\text{обр.}}} = \underline{Z}_c.$

Напряжение и ток сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол θ .

Мощности в цепях с распределенными параметрами для каждой волны определяют так же, как в цепях с сосредоточенными параметрами.

Например, комплексная мощность прямой волны

$$\underline{S}_{\text{пр}} = \dot{U}_{\text{пр}} \overset{*}{I}_{\text{пр}} = P_{\text{пр}} + jQ_{\text{пр}} = U_{\text{пр}} I_{\text{пр}} \cos\theta + jU_{\text{пр}} I_{\text{пр}} \sin\theta.$$

Активная мощность прямой волны

$$P_{\text{пр}} = R_{\text{c}} I_{\text{пр}}^2 = \frac{U_{\text{пр}}^2}{R_{\text{c}}}.$$

Представление напряжений и токов в виде прямой и обратной составляющих есть математический прием, который облегчает анализ таких цепей.

Реальное в цепях с распределенными параметрами существуют результирую-

щие напряжения и токи.

Вопросы для самопроверки

1. Чем цепи с распределенными параметрами отличаются от цепей с
сосредоточенными параметрами?
2. Какие уравнения используют при анализе процессов в линиях?
3. Чем частные производные отличаются от полных?
4. Каков физический смысл слагаемых напряжения в уравнении одно-
родной линии?
5. Как вычислить активную мощность?