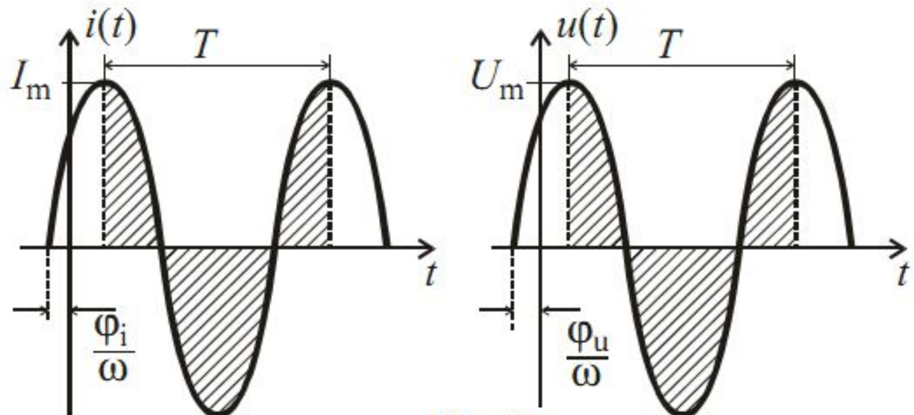
Анализ гармонических колебаний в электрических цепях. Основные понятия и определения. Способы представления гармонических колебаний. Гармонические колебания в резистивных, индуктивных и ёмкостных элементах.

Гармонические колебания – колебания, происходящие по закону синуса или косинуса. Графически гармоническое колебание можно представить в виде:



φ_i, φ_u

Где I_m, U_m –**литуды** тока и напряжения: максимальны по абсолютному значению;

$T = 1/f$ – **иод**: промежуток времени, по истечении которого значения $i(t)$ или $u(t)$ повторяются;

$\omega = 2\pi f$ – **овая частота** [рад/сек], f – **клическая частота** [Гц];

φ_i, φ_u **начальные фазы** тока и напряжения.

Аналитически гармонический ток можно представить в виде:

$$i(t) = I_{\text{m}} \sin(\omega t + \varphi_i) = I_{\text{m}} \sin \Psi_{\text{i}}(t), \text{ либо } i(t) = I_{\text{m}} \cos(\omega t + \varphi_i) = I_{\text{m}} \cos \Psi_{\text{i}}(t),$$

где $\Psi_{\text{i}}(t) = \omega t + \varphi_{\text{i}}$ – **фаз**а тока.

Аналогично для гармонического напряжения:

$$u(t) = U_{\text{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{u}}) = U_{\text{m}} \sin \Psi_{\text{u}}(t), \text{ либо } u(t) = U_{\text{m}} \cos(\omega t + \varphi_{\text{u}}) = U_{\text{m}} \cos \Psi_{\text{u}}(t)$$

где $\Psi_{\text{u}}(t) = \omega t + \varphi_{\text{u}}$ – **щая фаза** напряжения. Из соотношений следует: $\omega = \dfrac{d\Psi_{\text{i, u}}}{dt}$.

Действующее (среднеквадратичное) значение гармонического тока и напряжения:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}. \qquad I = \frac{I_{\text{m}}}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_{\text{m}}}{\sqrt{2}}.$$

Среднее значение гармонического тока и напряжения:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt.$$

Способы представления гармонических колебаний.

Гармонические колебания представляют в виде:

1. временных диаграмм;

2. векторных диаграмм;

3. комплексных чисел;

4. амплитудных и фазовых спектров;

Временное представление наглядно, но затруднительно при решении задач. Более удобно векторное представление, при котором каждому колебанию ставится в соответствие вращающийся вектор определённой длины с заданной начальной фазой. Пусть имеем колебания токов:

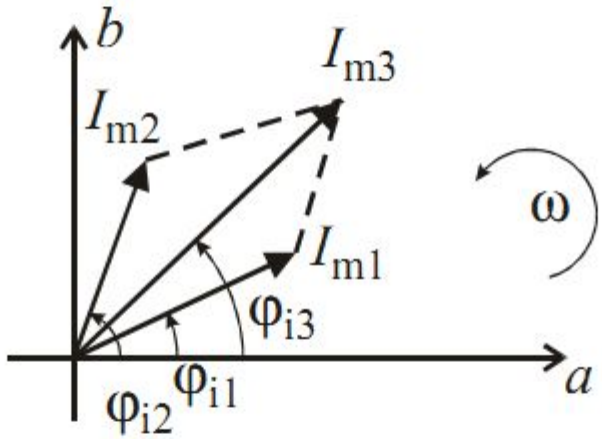
$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_{m3} \sin(\omega t + \varphi_{i3}), \text{ где } I_{m3} = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + 2 I_{m1} I_{m2} \cos(\varphi_{i2} - \varphi_{i1})}$$

Определим сумму этих токов:

$$i_1(t) = I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_{i1}) \text{ и } i_2(t) = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_{i2}).$$

$$\varphi_{i3} = \operatorname{arctg} \frac{I_{m1} \sin \varphi_{i1} + I_{m2} \sin \varphi_{i2}}{I_{m1} \cos \varphi_{i1} + I_{m2} \cos \varphi_{i2}}.$$

Последние соотношения определяются из геометрии рисунка:



ый сд $\varphi_i = \varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ –

к

i_1 и i_2.

Векторной диаграммой называют совокупность векторов, изображающих гармонические колебания в электрической цепи. Векторные диаграммы строят для амплитудных или действующих значений. Представления гармонических колебаний с помощью **комплексных чисел** лежат в основе **символического метода расчёта** электрических цепей (метод комплексных амплитуд).

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}}) \rightarrow \underline{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}}}$ – амплитуда, где $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$.

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}}) \rightarrow \underline{I} = I \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}}}$ – ное действующее значение, причём $I = \dfrac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$.

$\underline{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}}}$, $\underline{I} = I \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}}}$ – ись в показательной форме.

Существует запись в алгебраической форме, для этого используем формулу Эйлера:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos(x) + \mathrm{j}\sin(x).$$

$$\underline{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \cos(\varphi_{\mathrm{i}}) + \mathrm{j} I_{\mathrm{m}} \sin(\varphi_{\mathrm{i}}) = a + \mathrm{j}b, \text{ где } a = I_{\mathrm{m}} \cos(\varphi_{\mathrm{i}}),\ b = I_{\mathrm{m}} \sin(\varphi_{\mathrm{i}})$$

Решим предыдущую задачу с помощью символического метода:

$$i_1(t) = I_{\mathrm{m}1} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}1}) \rightarrow \underline{I}_1 = I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}1}} = I_1 \cos(\varphi_{\mathrm{i}1}) + \mathrm{j} I_1 \sin(\varphi_{\mathrm{i}1}),$$

$$i_2(t) = I_{\mathrm{m}2} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}2}) \rightarrow \underline{I}_2 = I_2 e^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}2}} = I_2 \cos(\varphi_{\mathrm{i}2}) + \mathrm{j} I_1 \sin(\varphi_{\mathrm{i}2}).$$

Суммарный ток определяем:

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \left(I_1 \cos\left(\varphi_{i1}\right) + I_2 \cos\left(\varphi_{i2}\right)\right) + \mathrm{j}\left(I_1 \sin\left(\varphi_{i1}\right) + I_2 \sin\left(\varphi_{i2}\right)\right).$$

Последнее выражение представлено в алгебраической форме, его необходимо перевести в показательную, используя соотношение:

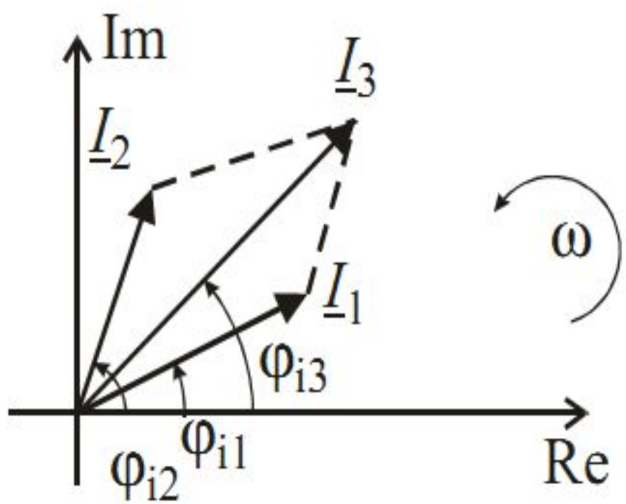
$$a + \mathrm{j}b = \sqrt{a^2 + b^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot \mathrm{arctg}\frac{b}{a}}.$$

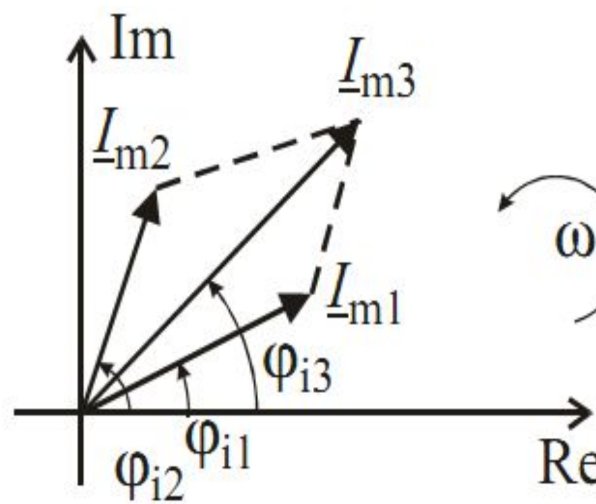
Таким образом: $\underline{I}_3 = I_3\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{i3}}$.

$$I_3 = \sqrt{\left(I_1 \cos\left(\varphi_{i1}\right) + I_2 \cos\left(\varphi_{i2}\right)\right)^2 + \left(I_1 \sin\left(\varphi_{i1}\right) + I_2 \sin\left(\varphi_{i2}\right)\right)^2},$$

$$\varphi_{i3} = \mathrm{arctg}\frac{I_1 \sin\varphi_{i1} + I_2 \sin\varphi_{i2}}{I_1 \cos\varphi_{i1} + I_2 \cos\varphi_{i2}}.$$

Полученные комплексы токов удобно представить в виде векторной диаграммы на комплексной плоскости:





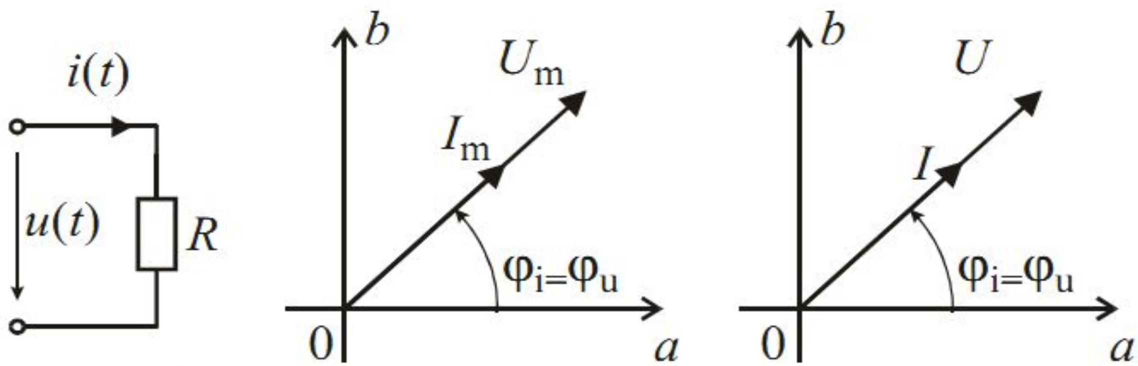
Гармонические колебания в резистивных, индуктивных и ёмкостных элементах.

Пусть к **резистивному элементу** приложено гармоническое напряжение:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u).$$

Согласно закону Ома через резистор протекает гармонический ток:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$



$I_m = \dfrac{U_m}{R}$ и $I = \dfrac{U}{R}$, $\varphi_u = \varphi_i$ – азы напряжения и тока равны!

Введём понятие **фазового сдвига** между входным напряжением и током, протека… и:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Вывод: в резистивном элементе фазовый сдвиг между напряжением и током равен нулю!

Пусть в **индуктивном элементе** протекает ток $i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})$.

Учитывая связь между током и напряжением на индуктивности, получаем:

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = I_{\mathrm{m}}\,\omega L \cos(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}}) = I_{\mathrm{m}}\,\omega L \sin\left(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}} + \frac{\pi}{2}\right) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{u}}).$$

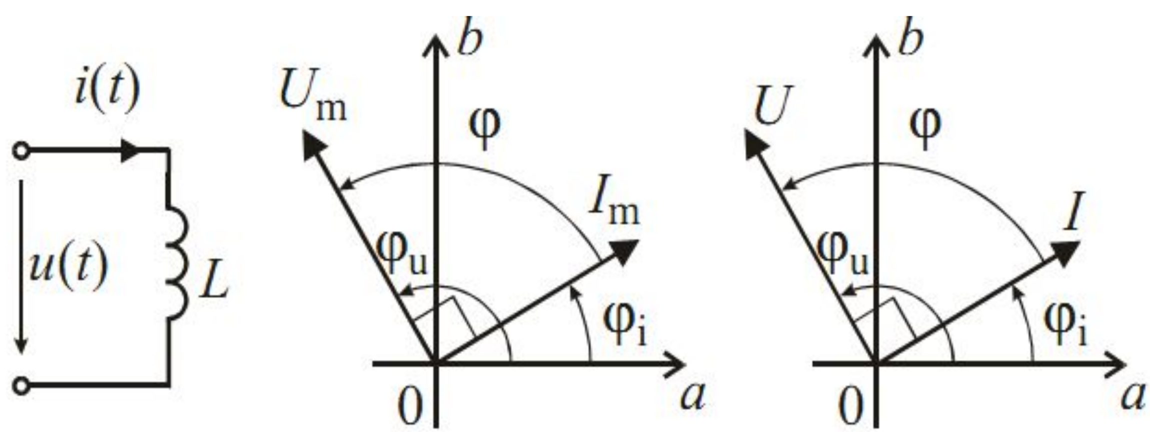
$U_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}\,\omega L = I_{\mathrm{m}}\,X_{\mathrm{L}}$ и $U = I\,\omega L = I\,X_{\mathrm{L}}$, где $X_{\mathrm{L}} = \omega L$ –

индуктивности;

$B_{\mathrm{L}} = \dfrac{1}{X_{\mathrm{L}}} = \dfrac{1}{\omega L}$ – мость на индуктивности;

$\varphi_{\mathrm{u}} = \varphi_{\mathrm{i}} + \dfrac{\pi}{2}$, ый сдвиг определяется как: $\varphi = \varphi_{\mathrm{u}} - \varphi_{\mathrm{i}} = \dfrac{\pi}{2}$.

Вывод: в индуктивности фазовый сдвиг между напряжением и током равен 90° !



Пусть напряжение приложено к **ёмкостному элементу**, тогда

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = U_m\, C\,\omega\cos(\omega t + \varphi_u) = U_m\, C\,\omega\sin\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$I_m = U_m\,\omega C = U_m\, B_C$ и $I = U\,\omega C = U\, B_C$, где $B_C = \omega C$ – проводимость на

$X_C = \dfrac{1}{B_C} = \dfrac{1}{\omega C}$ –гивление на ёмкости;

$\varphi_i = \varphi_u + \dfrac{\pi}{2}$,фазовый сдвиг определяется как: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2}$.

Вывод: в ёмкости фазовый сдвиг между напряжением и током равен –90° !