Спектралды талдау

Лекция 1. Кесіндідегі тригонометриялық жүйе

L_2 [-π, π] функциялар кеңістігі. Функциялардың ортогоналдығы. Ортогонал функциялар жүйенің толықтығы.

1,cos nx,sin nx , … n=1,2,3,4, …

тригонометриялық жүйе L_2 [-π, π] кеңістігінде толық жүйе болады

Фурье қатары. Жинақталуы L_2[-π, π] метрикада орындалады

[0, π], [a,b],[0,1]-дегі басқа ортогонал жүйелер

Лекция 2. Жинақталу түрлері және Фурье қатарының жинақталу шарттары

- Жинақталуды түрлері:
- Чезаро бойынша орташа мағынада жинақталу
- Lp метрикада жинақталу
- Чезаро бойынша бір қалыпты жинақталу
- әлсіз жинақталу

Дини шарты: белгілі бір δ>0 үшін

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$$

f – шектелген 2π периодты, 1-ші текті үзілістері болуы мүмкін фунция болсын. Әр нүктеде f функцияның оңжақты және сол жақты туындылары болсын. Онда бұл функцияның Фурье қатары барлық нүктелерде жинақталады және оны шегі үзіліссіз нүктелерде f(x) - ке тең,
ұзіліс нүктелерінде
½(f (x+0) + f (x-0)) –ке тең

Ортонормалданған жүйе үшін Парсеваль теңдгі орындалады. Нормаланбаған жүйе үшін – Бессель теңсіздігі орындалады

Лекция 3. Кесіндідегі және сандық түзудегі ортонормал жүйелер

Ең жиы қолданатын ортонормал жүйелер

1. Тригонометриялық жүйе
2. Лежандра. Көпмүшеліктері. [-1,1] -де анықталған x^n бір мұшеліктер дің ортогонализациясы арқылы табылады.
3. Эрмит функциялары : Эрмита көпмүшеліктерін Фурье түрлендірудің меншікті функциясына көбейту арқыла табылады

Бүкіл сандық сызығында ортогонал жүйе болады

Келесі жай дифференциал теңдеудің шешімі арқылы табылады:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x^2 = \mu f$$

μ = -(2n+1),
n=0,1,2,3,…

Формулалары:

$$H_n^* = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

Лекция 4. **Сигнал спектрі. Гиббс құбылысы**

Периодты функция үшін сигнал спектрі - Фурье қатарының коэффициенттер жиыны.
Фурье қатарының жинақталуы функцияның дифференциалдану қасиеттеріне тәуелді.
Келесі теоремалар орындалады:

Жекелеп шекке өту

Функционалды қатарды қарастырайық:

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots \qquad (1)$$

Теорема1. $u_n(x)$ (n=1,2,3,…) функциялар X облысында анықталсын және $x \to a$ шегі болсын. $\lim_{x\to a} u_n(x) = c_n$

Егер (1) қатары X облысында бір қалыпты жинақталса, онда $\sum_{1}^{\infty} c_n = C$

1) *Шектерден құрастырылған қатар жинақталады*
2) *және (1) қатардың қосындысы ның да шегі болады, және :* $\lim_{x\to a} f(x) = C$

Осыған ұқсас жеке интегралдау және жеке дифференциалдау теоремалары орындалады

Қатарды жеке туындау

Теорема. $u_n(x)$ (n=1,2,3,…) функциялар X=[a,b] кесіндіде анықталсын және ол кесіндіде олардың $u'_n(x)$. туындалары да анықталатын болсын. Егер (1) қатар тым болмаса « нүктеде жинақталса, және туындлардан тұрғызылған қатар X аралықта бір қалыпты жинақталса, онда берілген (1) қатар X аралықта бір қалыпты жинақталады және оның қосындысы келесі формуламен анықталады

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

Лекция 5. Дискретті Фурье түрлендіруі

f(x) – *[0,l]* анықталған үздісіз функция болсын.

f_q , q= 0,1,…,N-1, $x0=0$, $xN=l$.

Функция периодты түрде бүкіл сандар сызығына жалғастырайық f(l)=f(0), тор нүктелері: xq=qh=ql/N.

Торда Фурье қатарына жіктеу формуласы бойынша периодты функция үшін келесі теңдеу орындалады:

$$f(x_q) = f_q = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{-i2\pi n x_q}{l}\right)$$. n=Np+r болсын,

$p \in Z$, r=0,…N-1. Онда бұл қосынды келесі түрде жазылады:

$$\sum_p \sum_r c_n \exp\left(-i\frac{2\pi(np+r)x_q}{l}\right) = \sum_p \sum_r c_n \exp\left(-i\frac{2\pi(Np+r)ql/N}{l}\right) =$$

$$\sum_p \sum_r c_{Np+r} \exp\left(-i\frac{2\pi rq}{N}\right)\exp(-i2\pi qp) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \exp\left(-i\frac{2\pi rq}{N}\right),$$

Бұл жерде Ar дегеніміз $A_r = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{Np+r}$

Осыдан, егер функция өзінің дискетті мәндерімен берілсе, онда бұл функцияны келесі торлық функциялар жүйесі арқылы жіктеуге болады

$$\varphi_r(x_q) = \exp\left(-\frac{2\pi q}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi x_q}{l}\right), \ \ \mathrm{q = 0,1,..., N-1.}$$

Осы сияқты, cos(xq) және sin(xq) бойынша да жіктеуге болады.

.

$\varphi_s(x_q)$ функцияларды ортогоналдыған дәлелдейік.

f(xq) және $\varphi_s(x_q)$ скаляр көбейтіндісін есептейік:

$$f(x_q) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \exp\left(+i\frac{2\pi rq}{N}\right) \Bigg| \cdot \frac{1}{N}\exp\left(-i\frac{2\pi qs}{N}\right), \ \mathrm{s = 0,...N-1}$$

$$\left(\mathrm{f}, \varphi_{\mathrm{s}}\right) = \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_n\left[\exp\left(i\frac{2\pi(n-s)}{N}\right)\right]^q.$$

егер s≠n, онда

$$\sum_{q=0}^{N-1}\left[\exp\left(i\frac{2\pi(n-s)}{N}\right)\right]^q = \frac{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)^N}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)} = \frac{1-\exp(2\pi i(n-s))}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)} = \frac{0}{\dots} = 0,$$

$(f,\varphi_s) = A_s$, болғандықтан, кері айналдыру формуласы қорытылды:

$$A_s = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi qs}{N}\right)$$

Және $\langle\varphi_s,\varphi_s\rangle = N$, $\|\varphi_s\| = \sqrt{N}.$ екенін де дәлелдедік

Лекция 6. Жылдам Фурье түрлендіруі

Дискретті Фурье түрлендіруге қажет операциялар санын есептейік. Әр коэффициент үшін N^2 операция қажет . Бірақ, кейбір жағдайларда жылдам түрлендірілерді қолдануға болады

$N=s_1 \cdot s_2$ болсын . Фурье коэффициенттерін есептейік:

$A_n = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi q n}{N}\right)$ n коэффициент нөмірін $n=t \cdot s_1+m$ түрде жазайық,

Нүктенің нөмірін $q = \tau \cdot s_2 + p,\ p = 0,\dots,s_2-1, q = 0,\dots,s_1-1$ түрде жазайық,

Онда қосынды келесі түрге келеді:

$$\sum_{q=0}^{N-1} \dots \rightarrow = \sum_{p=0}^{s2-1}\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot s_2 + p)}{s_1 s_2} n\right) = \sum_{p=0}^{s2-1}\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot n)}{s_1}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi(p \cdot n)}{s_1 \cdot s_2}\right)$$

Ықшамдай отыра:

$$= \sum_{p=0}^{s2-1}\exp\left(-i\frac{2\pi(p \cdot n)}{N}\right)\cdot \sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot n)}{s_1}\right).$$

Сонымен, операциялар саны s1 есе кемиді.

Егер $N=s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$, онда әр қарай ықшамдауға болады.

Тәжірибеде $N=2^n$, қолданылады, онда операциялар саны N lnN .

[0,l] кесіндіде анықталған фунцияны Фурье қатарына жіктейік:

$$f(x)=\sum_{n}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\right)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right)\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}=$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(x-\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}hF(hn)$$

$l\to\infty$ кезде $h=\pi/l$ шаманы тор қадамы деп қабылдасақ, онда бұл қосынды келесі функциянын Риман қосындысы болады:

$F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda(x-\xi)f(\zeta)d\xi$. Шекке өтсек, онда

$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$, бұл формула Фурье интеграл

формуласы деп аталады, симметриялы түрде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

Лекция 7. Интегралды Фурье түрлендіруі.

Сандық сызықта анықталған абсолютті интегралданатын функцияларды қарастырайық.

Жоғарыда келесі формуланы алдық:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi \qquad (1)$$

Бұл формула келесі теореманың мазмұнын көрсетеді:

:

Теорема. Егер f(x) - үкіл сандық сызықта абсолютті интегралданатын функция болса, $f(x) \in L_1(R)$, *онда (1 . интегралды формула орындалады*

Фурье формуласын комплексті түрде жазуға болады:

(1) –ге $\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi$ нольдік келесі мүшені қосып,

(2) Эйлер формуласын қолдансақ, онда :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\exp(i\lambda(x-\xi))d\xi \qquad (2)$$

(3) Формуланы түрлендірейік.

$$\hat{f}(\lambda)\equiv Ff(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \qquad (3)$$

Белгілеуді енгізсек, онда формула (2) келесі түрде жазылады:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\exp(i\lambda x)d\lambda$$

(3) формуласы арқылы анықталған $\hat{f}(\xi)$ функциясы *f(x)* функцияның Фурье түрлендіруі деп аталады.

Фурье түрлендіруінің қасиеттері

1) Сызықтық:

$$F(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F f_1 + \beta F f_2$$

2) Ұқсастық:

$$F(f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

3) Үздіксіздік:

Егер $\{f_n\} \to \{f_0\}$ в $L_1(R)$, онд а бір калыпты $\{\hat{f}_n\} \to \{\hat{f}_0\}$.

4) Туында абсолютті интегралданатын функция болса, онын Фурье түрлендіруі келесі формула арқылы алынады:

$$F\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = (i\xi)^n F f(\xi)$$

- бөліктеп интегралдау арқылы дәлелдеуге болады

Лекция 8. Интегралды Фурье түрлендіруінің қасиеттері

5) Алғашқы функциянын Фурье түрлендіруі

$F\left(\int F(t)dt\right) = \frac{1}{i\xi} Ff(\xi)$ - Алғашқы функциянын болу керек

және абсолютті интегралданатын болу керек.

6) Ығысу туралы теорема.

$[Ff(t-\tau)](\xi) = e^{-i\xi\tau} Ff(\xi)$

7) Фурье түрлендіруді дифференциалдау.

$\frac{d}{d\xi}[Ff] = [F(-ixf(x))](\xi)$, формула орындалу үшін

$|xf(x)| \in L_1(R)$, бұл келесі асимптотикаға эквивалентті:

$|f(x)| \sim O\left(\frac{1}{x}\right) \cdot O\left(\frac{1}{x}\right)$, осыдан $|f(x)| \sim O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, егер $x \to \infty$.

8) Модуляция туралы теорема

$\left[Ff(t)e^{i\omega_0 t}\right](\xi) = Ff(\xi - \omega_0)$

9) Орам туралы теорема.

Орамнын белгілеуі: $F(f**g)=Ff\cdot Fg$.

10) Парсеваль теңдігі

$$\int_{-\infty}^{\infty}|Ff(\xi)|^2\,d\xi=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx,\ \text{если}\ f\in L_1(R)\bigcap L_2(R).$$

11) Шексіздіктегі өшуі:.

Егер f және $|x|\to\infty$ үшін онын *(n-1)* туындылары $\to 0$, онда $|\xi|^n\cdot Ff(\xi)\to 0,\ |\xi|\to\infty$. Осыдан, егер $f(x)\in L_2(R)$, онда $\hat{f}(\xi)$ - үздіксіз және шектелген функция.

12)Раншерель теоремасы.

$\forall f\in L_2(R)$ келесі тізбекті анықтайық $g_N=\int_{-N}^{N}f(x)e^{-i\lambda x}dx$, онда

$g_N\in L_2(R)$, және :

$\exists\underrightarrow{\lim} g_N(\lambda)=g(\lambda)$ $\mathrm{L}_2(\mathrm{R})$ метрикасында, егер $\mathrm{N}\to\infty$.

Лекция 9 Шеннон-Котельников теоремасы.

Қайта тудырушы ядросы бар Гильбертов кеңістігі.

$[a,b]$ кесіндінің мінездеуші функциясын карастырайык:

$$\chi[a,b] = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Бұл функциянын Фурье тұрлендіруін есептейік:

$$\hat{\chi}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{i\xi x}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-i\xi x} - e^{i\xi x}}{i\xi} = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\xi x)}{\xi x} \to 0, \text{при} \quad |\xi| \to \infty.$$

Сонымен, тасымалдаушысы компакт функциялардын Фурье этұрлендіруін шексіздікте өте жай өшетін функция болады.

Керісінше, Фурье тұрлендіруі компакт болатын функцияларды спектрі шектелген функциялар деп атайды. Олардын $\operatorname{supp}\left(\hat{f}(\xi)\right) \subset [-\Omega, +\Omega], 0 < \Omega < \infty.$

Котельников-Шеннон теоремасы:

Егер f(x) – спектрі шектелген функция болса, то онда ол өзінің π/Ω ара қашықпен берілген дискретті мәндерімен толық анықталады.

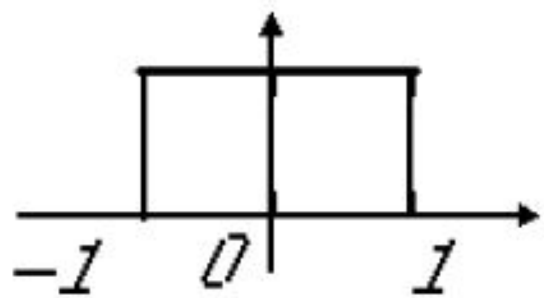
Sinc(x)=sin (x)/x $\subset L_2(R)$ функцияны анықтайық.

Бұл функцияның спектрі:.

:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\sin x}{x}e^{i\xi x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\sin x\cos\xi x}{x}dx=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left[\int_{-N}^{N}\frac{\sin(1+\xi)x}{x}dx+\int_{-N}^{N}\frac{\sin x(\xi-1)}{x}dx\right]=$$

Бұл Эйлер интегралына әкеледі: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2}sign(a)$, жалғастыра отырып:



$$\frac{\pi}{2}\left(sign(1+\xi)+sign(1-s)\right)=\begin{cases}\pi, |\xi|<1\\ 0, |\xi|\ge 1\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{\Omega}f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{i\xi\pi n}{\Omega}\right)\exp(i\xi x)d\xi=$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right)\frac{e^{i\Omega(x-n\pi/\Omega)}-e^{-i\Omega(x-n\pi/\Omega)}}{2i(x-n\pi/\Omega)}=\sum_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right)\frac{\sin(\Omega x-\pi n)}{(\Omega x-\pi n)}$$

Бұл формула Шеннон – Котельников формуласы деп атайды. Ω/π қатынасты Найквист жилігі деп атайды.

Қайта тудырушы ядросы бар Гильбертов кеңістігі

f(x) спектрі шектелген функция болсын.

Онда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x)d\xi=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\exp(-i\xi y)dy\exp(i\xi x)d\xi=$$

интегралдау ретін ауыстырсақ, онда:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{i\xi(x-y)}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{\sin\Omega(x-y)}{\Omega(x-y)}dy=f*Sinc(\Omega x)$$

Түйін: спектрі шектелген функция мәндері келесі скаляр көбейтінді арқылы есептеледі:

$f(x)=\langle f,e_x\rangle$, где $e_x(y) = \sin\Omega(x-y)/\Omega(x-y)$,

немесе, үздіксіз сызықты функционал арқылы, себебі, $f\to f(x)$ сәйкестендіру үздіксіз..

Бұл функцияларды тудырушы ядросы бар гильберт кеңістігі деп атайды.

Анықтама. Егер $\exists K(x,y): f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y) f(y)dy$ в $L_2(R)$,

онда бұл функциялар жиыны K(x,y) тудырушы ядросы бар гильберт кеңістігі деп атайды .

Лекция 10 Вейвлет туралы ұғым. Вейвлет - түрлендіру.

Терезелік Фурье түрлендіру үшін терезелік фаункция қарастырылады

$g(t) : \mathrm{supp}\, g(t) \subset [-\Omega, \Omega]$.

Терезелік Фурье түрлендіру дегеніміз келесі функциянын түрлендіруі $\hat{f}_{ок} = F\left(f(x) \cdot g(x - x_0)\right)$.

терезелік фаункция көбінесе x_0 нүктенің төңірегінде шоғырланған функция болады. Жалпы жағдайда келесі түрдегі функциялардың Фурье түрлендіруі қарастырылады $g^{\omega,x0} \cdot f(x) = f(x) e^{i\omega x} g(x - x_0)$:

$$(T_{ок} f)(\omega, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) g(x - x_0) dx$$

Көп жағдайда $\omega = m\,\omega_0$, және $x_0 = nt_0$, $(T^{ок} f) = (T^{ок} f)_{m,n}$.

Фурье түрлендірудің кемшіліктері:

Түрлі жиіліктер үшін терезелік функция түрлі болуы қажет, бұл кемшілік вейвлет түрлендірі арқылы жойылады.

Вейвлет туралы ұғым.

Егер $\psi(t)$ функциясы кеңістікте шоғырланса, ол «аналық вейвлет» құрайды. Мысалы, $\psi(t)=1/(1+|t|^{1+\alpha})$ функциясы.

$\psi(t)=(1-t^2)\exp(-t^2/2)$ ең алғашқы практикада қолданған вейвлет.

a,b параметрлер еңгізіп $\psi((t-b)/a)$ функцилар жиынын аламыз

Вейвлеттерге қойылатын талаптар:

1. $\psi(t)$, және $\psi((t-b)/a)$ $L_2(R)$ жатады.
2. $\|\psi\|_{L_2} = 1$ болсын, және $\psi((t-b)/a)$ нормалансын:

$$\left\|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(\tfrac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt = \left|\frac{t-b}{a} = s, dt = ads\right| = a\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(s)|^2 ds = a\|\psi\|^2$$

Онда вейвлет $\psi^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$

Вейвлет қасиеттері:

1. Шоғырлану (локалдану) – жиілік немесе кеңістікте шоғырлануы қажет в (ψ(t) немесе $\hat{\psi}(t)$ функциялары).
2. Масштабтаудағы инварианттылық . Егер а-ның орынына а/2 алсақ, онда кеңістікте $\xi \to 2\xi$.
3. ψ(t) $L_2(R)$ жатады.
4. $\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{|\xi|} d\xi < \infty$
5. Вейвлет-түрлендіруді дифференциалдау ережесі.
6. Парсеваль теоремасының аналогы.

Анықтама. f функцияның үздіксіз вейвлет-түрлендіруі :

$$\left(T^{вейв} f\right)_{a,b} = \left\langle f, \psi^{a,b} \right\rangle \text{ или } \left(T^{вейв} f\right)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right) dx$$

Лекция 11 Вейвлет туралы ұғым. Вейвлет - түрлендіру.

Вейвлеттер типі. Вейвлеттің орташа жиілігі. вейвлет-түрлендірудің үзіліссідікқасиеті. вейвлет-түрлендірут бойынша функцияларды қалпына келтіру формуласы.

Фурье түрлндрудің унитарлық қасиетін дәлелдейік:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Дәлелдеу.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\overline{g}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\hat{f}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g}(x)e^{i\xi x}dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\xi x}dx}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle.$$

Вейвлеттің Фурье түрлндруің карастырайық:

$\hat{\psi}^{a,b}$ -ні $\hat{\psi}(a\xi)$ арқылы әрнектейміз.

$\psi^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ Фурье түрлндрудің масштабтау қасиетін ескере отырып

$F(f(at))=1/a\ Ff(\xi/a)$ келесі өрнекті аламыз:

$F\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\frac{1}{a}\psi\left(\frac{t}{a}\right)\right)=\sqrt{a}\psi(at)$. Енді ығысудың Фурье түрлендіруінің қасиеін қолданамыз

$$F\psi^{a,b}=e^{-ib\xi}F\psi^{a,0}$$

Дәлелдеу.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(a(t-b))\exp(-i\xi t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(at')\exp(-i\xi(t'+b))dt'=$$

$$=\exp(-ib\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(at')\exp(-i\xi t')dt'=\exp(-ib\xi)\hat{\psi}(at)$$

Теорема. Кез келген $L_2(R)$ жататын f,g функциялар үшін келесі теңдік орындалады:

$$\frac{C_\psi}{2\pi}\langle f,g\rangle=\left\langle T^b f,T^b g\right\rangle,\ \text{где}\ C_\psi=2\pi\int\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\xi|}d\xi<\infty.$$

Дәлелдеу.

Скаляр кобейтіндіні ашамыз:

(здесь мы распространили интеграл по a четным образом на всю числовую прямую)

$\left\langle T^b f, T^b g\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{|a|^2}\left(T^b f\right)_{a,b}\overline{\left(T^b g\right)_{a,b}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{|a|^2}.... =$, где мы должны подставить под интеграл функции

$\left(T^b f\right)_{a,b} = \left\langle f, \psi^{a,b}\right\rangle =$ в силу унитарности преобразования Фурье $= \frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle =$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\sqrt{|a|}e^{-ib\xi}\psi(a\xi)d\xi$, ж н $\left(T^b f\right)_{a,b}$. шші

$\left\langle T^b f, T^b g\right\rangle = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dadb}{|a|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\sqrt{|a|}e^{-ib\xi}\overline{\psi}(a,\xi)d\xi\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{g}}(\xi)\sqrt{|a|}e^{ib\xi}\psi(a,\xi)d\xi =$

$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{|a|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}db\hat{F}(b)\overline{\hat{G}}(b) =$ Фурье тт тт тт унитарлы н аасиетбойныша $=$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{|a|^2}\left\langle F(b), G(b)\right\rangle$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|^2} \int_{-\infty}^{\infty} db\, |a|^{1/2} \hat{f}(b) \overline{\hat{\psi}}(ab) \overline{|a|}^{1/2} \overline{\hat{g}}(b) \hat{\psi}(ab) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} db\, \hat{f}(b) \overline{\hat{g}}(b) \, |\hat{\psi}(ab)|^2 = \text{интегралдау ретін ауыстырамыз} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} db\, \hat{f}(b) \overline{\hat{g}}(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} |\hat{\psi}(ab)|^2 =$$

қосымша аралық түрлендіруді қолданайық:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} |\hat{\psi}(ab)|^2 = \left| \begin{matrix} ab = s \\ ds = b\,da \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{|s|} |\hat{\psi}(s)|^2 = \frac{C_\psi}{2\pi},$$

жалғастыра келе:

$$= \frac{1}{4\pi^2} C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}}(\xi) = \frac{C_\psi}{2\pi} \langle f, g \rangle..$$

Келесі формула Фурье түрлендірудің кері формуласының аналогы – вейвлет – түрлендірудің кері формуласы:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{dadb}{a^2} \left(T^b f\right)(a,b) \cdot \psi^{a,b}(x) \qquad (1)$$

Бұл жерде 0<Cψ<∞, $\psi \in L_2(R), \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$

Кері формуланың жалпыландыруы:

$\psi 1(t)$, $\psi 2(t)$ –вейвлеттердің екі түрі болсын. Бір түрі бойынша түрлендіру берілсін:

$Tbf = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_1^{a,b}(x)dx$, бірқ, кері формуланы басқа түрі бойынша алайық:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_{\psi 1\psi 2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{dadb}{a^2}\left(T^b f\right)\psi_2^{a,b}(x)$$

Дәлелдеі алдынғы теоремадай, бірақ, C_{ψ} –ді $C_{\psi 1\psi 2}$, алмастыруы қажет

$$C_{\psi 1\psi 2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}_1(\xi)\hat{\psi}_2(\xi)|}{|\xi|} d\xi .$$

Егер келесі шарттар орындалса: $\psi_1(t), \psi_2(t) \in L_1(R), \exists \psi_2'(t) \in L_2(R), t\psi_2(t) \in L_1(R)$,
Және $\bar{\psi}_1(0) = \bar{\psi}_2(0) = 0$, $f(x) \in L_2(R)$ шектеул3 болса , онда кері формула f- функциянын әр үздісіздік нүктедесінде орындалады:

$$f(x) = \frac{2\pi}{C_\psi} \lim_{\substack{A1\to 0 \\ A2\to\infty}} \int_{A1\le|a|\le A2} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \left\langle f, \psi_1^{a,b} \right\rangle \cdot \psi_2^{a,b}$$

Бұл жердегі интегралдар басты мәндер мағанасында алынады

Лекция 12 Түрлі интегралды түрлендірулер

Лаплас түрлендіруі.

Жеке формулалар

	$f(t)$	$g(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$
(1)	$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt}g(z)\,dz$	$g(p)$
(2)	$f(t+a)=f(t)$	$(1-e^{ap})^{-1}\int_0^a e^{-pt}f(t)\,dt$
(3)	$f(t+a)=-f(t)$	$(1+e^{-ap})^{-1}\int_0^a e^{-pt}f(t)\,dt$

Лаплас түрлендіруінің кері формуласы

	$g(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$	$f(t)$
(1)	$g(p)$	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} g(p)\,dp$
(2)	$g(p+p^{1/2})$	$2^{-1}\pi^{-1/2}\int\limits_0^t u\,(t-u)^{-3/2}\times$ $\times\, e^{-2^{-2}u^2(t-u)^{-1}} f(u)\,du$
(3)	$p^{-1/2}g(p+p^{1/2})$	$\pi^{-1/2}\int\limits_0^t (t-u)^{-1/2}\times$ $\times\, e^{-2^{-2}u^2(t-u)^{-1}} f(u)\,du$

Келесі функцияны ν ретті Ганкель түрлендіруі деп атаймыз:

Егер $\nu=\pm 1/2$ бұл формула косинус және синус Фурье түрлендіруі болады

$$g(y;\nu)=\mathfrak{H}_\nu\{f(x);y\}=\int_0^\infty f(x)\,J_\nu(xy)\,(xy)^{1/2}\,dx$$

Басқа түрдегі жазулары:

$$\int_0^\infty f(x)\,J_\nu(xy)\,x\,dx$$

$$\int_0^\infty f(x)\,J_\nu\left[2(xy)^{1/2}\right]dx.$$

Колданулары : кеңістікте цилиндр координаттарында
Лаплас теңдеуінің шешімдерін алу үшін

Лаплас түрлендіруінің қолдануы – дифференциалды
теңдеулердің шешімдерін алу.

Лаплас теңдеуінің қолданулары - теңдеудің өлшем ретін
азайту және типын өзгертуі мүмкін

Лекция 13 Жалпы вейвлеттердің ортонормалданған базисы.

Жалпы вейвлеттердің ортонормалданған базисы. Вейвлеттік еселі масштабтық талдау

1. Хаар базисы

$$\psi(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1,[0,1/2) \\ -1,[1/2,1) \end{cases}, \ \|\psi\|^2 = 1, \ \langle \psi_{\mathrm{m,n}}, \psi_{\mathrm{m',n'}} \rangle = 0, \ \ (m,n) \neq (m',n')$$

Ортонормалданғанын тексереміз

$$\psi_{m,n} : a_0 = 2, b_0 = 1, \ \psi_{m,n} = 2^{-m/n}\psi\left(2^{-m} - n\right)$$

2. Литлвуда – Пэли базисы

Спектрал кеністігінд Хаар базисының аналогы:

$$\bar{\psi}(\xi) = \begin{cases} 1, \pi \le |\xi| \le 2\pi \\ \quad 0, \textit{иначе} \end{cases}$$

Алғашқы фунциялар:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\bar{\psi}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{ix}\left[e^{ix\xi}\Big|_{-2\pi}^{2\pi} - e^{ix\xi}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi x}\left[\sin(2\pi x) - \sin(\pi x)\right].$$

3. Баттла-Лемарье сплайндар базисы.

Еселі масштабты талдау

Еселі масштабты талдау бір-бірінің ішінде жататын келесі кеңістіктер:

$\ldots V_3 \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset V_{-3} \ldots$ (1)

$\{V_j\}, V_j \subset L_2(R)$

$\overline{\bigcup V_j} = L_2(R)$ (2

$\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$ (3)

$f \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_j$ (4)

$f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - n) \in V_0, \forall n \in Z$ (5)

$\exists \varphi \in V_0$ $\{\varphi_{0,n}\} = \{\varphi(. - n)\}$ функциялар V_0 кеңістігінде ортонормалданған базис құрайды (6).

φ функциясы масштабтайтын функция деп аталады .

Справедлива следующая теорема:
Если цепочка замкнутых подпространств $\{V_j\}$образует кратномастшабный анализ, то
Существует ортонормированный базис вейвлетов, $\{\psi_{j,ki} : j,k \in Z\}$ в $L_2(R)$, такой, что оператор проектирования на подпространство V_{j-1} представляется в виде:

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \tag{7}$$

Одним из возможных вариантов является совокупность функций, порождаемых функцией
$\psi(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\varphi(\xi/2)$, где m_0 – 2π периодическая функция:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}, \text{где } h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle,$$
$$\sum_n |h_n|^2 = 1 \tag{14}$$

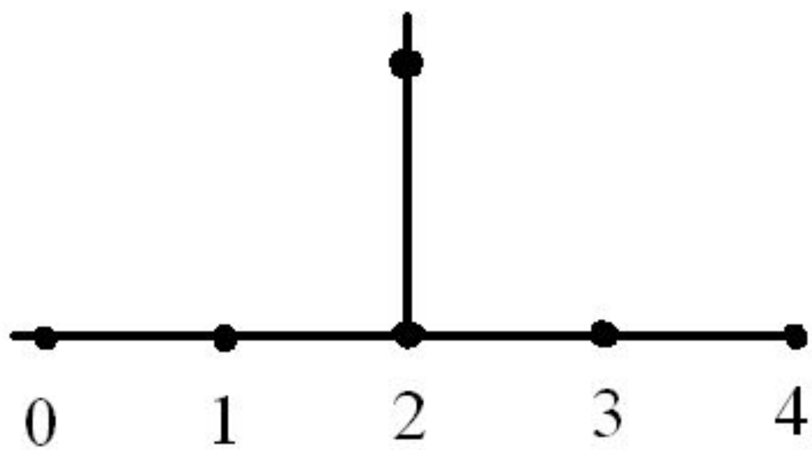
Лекция 14 Тасымалдушысы компакт вейвлеттерді тұрғызу.

Каскад алгоритмі

1 амал.   Масштабтайтын өрнекті қолданамыз

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum h_n\varphi(2x-n)$$

Итерациялық амалды тұрғызамыз



Бір нүктедегі мән беріледі, басқалары есептеледі. N=2 жағдайда алғашқы жуықтау формуласын аламыз

$$\varphi^{(1)}(x)=\sqrt{2}\sum h_n\varphi^{(0)}(2x-n)\Big|_{N=2}=$$

$$\sqrt{2}\left[h_0\varphi^{(0)}(2x)+h_1\varphi^{(0)}(2x-1)+h_2\varphi^{(0)}(2x-2)+h_3\varphi^{(0)}(2x-3)\right]$$

Осындай рекурсиялық өрнекті аралықтардың ортасындағы нүктелер үшін де алуға болады

2-ші амал. **Каскад алгоритмы.**

Теорема 1. Егер f нақты сандар R жиынында үздісіз болса, онда кез келген x $\in$ R үшін келесі шек орындалады

$$\lim_{j\to\infty} 2^j \int dy f(x+y)\overline{\varphi\left(2^j y\right)} = f(x).$$

Осы теоремаға сүйеніп каскад алгоритмын алуға болады :

1) φ0 бүтін нүктелер үшін анықтаймыз 0, 0,0, …0,1,0,….
2) бүтін n үшін η0j(2-jn) есептейміз

$$\eta_j\left(2^{-j}(2K)\right) = \sqrt{2}\sum_l h_{2K-2l}\eta_{j-1}\left(2^{-j+1}l\right),$$

3) n=2k үшін

$$\eta_j\left(2^{-j}(2K+1)\right) = \sqrt{2}\sum_l h_{2K+1-2l}\eta_{j-1}\left(2^{-j+1}l\right).$$

4) n=2k+1 үшін
5) Арадағы нүктелер үшін интеполяция қолданамыз.

Лекция 15 Вейвлеттерді жалпыландыру

Вейвлеттерді жалпыландыру келесі бағыттарда жүргізіледі:
Көп өлшемді түрлендірулер.
Симметрияны жақсарту, сығу көрсеткішін жақсарту

Вейвлеттерді екі өлшемді жағдайға жалпыландыруға болады. Еселі масштабты анализды анықтайық.

V_0 кеңістік келесі түрде анықталсын

$$V_0 = span\{F(x,y) = f(x)g(y), f(x) \in V_0, g(y) \in V_0\}.$$

W_0 кеңістікті анықтау қажет.

Еселі масштабты анализдың анықтамасына сүйенеміз

.

$$\boldsymbol{V}_{j-1} = V_{j-1} \otimes V_{j-1} = \left(V_j \oplus W_j\right) \otimes \left(V_j \oplus W_j\right) = \left(V_j \otimes W_j\right) \oplus \left(W_j \otimes V_j\right) \oplus \left(V_j \otimes V_j\right) \oplus \left(W_j \oplus W_j\right) =$$

$$= \boldsymbol{V}_{j-1} \oplus \boldsymbol{W}_{j-1},$$

Сонымен, деталдайтын кеңістік келесі формуламен анықталуы тиісті

$$W_j = \left(V_j \otimes W_j\right) \oplus \left(W_j \otimes V_j\right) \oplus \left(W_j \oplus W_j\right)$$

Осыдан екі өлшемду жағдайда масштабтау ережесі келесі түрде жазылады:

Келесі функциялардың сызықты қабықшасы деталдайтын кеңістіктің базисы болады:

$\varphi^{гор} = \varphi(x)\psi(y)$ - функцияның горизонтал ерекшеліктерін көрсетеді

$\varphi^{вер} = \psi(x)\varphi(y)$ - функцияның вертикал ерекшеліктерін көрсетеді

$\varphi^{диаг} = \psi(x)\psi(y)$ - функцияның диагонл ерекшеліктерін көрсетеді