



Всегда в
согласии с
природой
и с самим
собой

Ксенократ

Владивостокский
государственный университет
экономики и сервиса
Кафедра информационных
технологий и систем

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лекция №2



«Элементы теории физических полей»



Основные вопросы лекционного занятия

- 1. Направляющие системы и направляемые волны.*
- 2. Материальные уравнения электромагнитного поля.*
- 3. Поляризационные и сторонние токи.*



Литература для самостоятельной работы

Основная литература

1. Нефедов Е. И. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн / 3-е издание. М.: Изд. центр «Академия». 2011. Стр. 181-215.
2. Баскаков С.И. и др. Сборник задач по курсу Электродинамика и распространение радиоволн/Учебное пособие – М.: Высшая школа. 1981. Глава 7.

Дополнительная литература

3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. Стр. 167-176.



ГРАДИЕНТ

4

Градиент (от лат. *gradiens*, род. падеж *gradientis* — шагающий, растущий) — вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой величины ϕ , значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный быстроте роста этой величины в этом направлении.

Например, если взять в качестве ϕ высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.

ГРАДИЕНТ (продолжение)

5

С математической точки зрения градиент — это производная скалярной функции, определенной на векторном пространстве.

Пространство, на котором определена функция и её градиент, может быть, вообще говоря, как обычным трёхмерным пространством, так и пространством любой другой размерности любой физической природы или чисто абстрактным.

Термин впервые появился в метеорологии, а в математику был введён Максвеллом в 1873 г. Обозначение *grad* тоже предложил Максвелл.

$$\mathbf{grad}\phi = \nabla\phi$$



ДИВЕРГЕНЦИЯ



Дивергенция (от лат. *divergere* — обнаруживать расхождение) — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле» (точнее — насколько расходятся входящий и исходящий поток).

Если учесть, что потоку можно приписать алгебраический знак, то нет необходимости учитывать входящий и исходящий потоки по отдельности, всё будет автоматически учтено при суммировании с учётом знака. Поэтому можно дать более короткое определение дивергенции:



ДИВЕРГЕНЦИЯ (продолжение)

7

Дивергенция — это линейный дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность достаточно малой (в условиях конкретной задачи) окрестности каждой внутренней точки области определения поля.

$$\mathit{div} \vec{A} = \nabla \vec{A}$$



РОТОР

Рóтор (от лат. *roto* — вращаться) или **вихрь** — векторный дифференциальный оператор над векторным полем.

Обозначается: *rot* (в русскоязычной литературе) или *curl* (в англоязычной литературе), а также — как векторное умножение дифференциального оператора набла на векторное поле.

Результат действия этого оператора на конкретное векторное поле \vec{A} называется *ротором поля \vec{A}* или просто *ротором \vec{A}* и представляет собой новое векторное поле:

$$\text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}] = \nabla \times \vec{A}.$$

Поле $\text{rot } \vec{A}$ (длина и направление вектора $\text{rot } \vec{A}$ в каждой точке пространства) характеризует в некотором смысле вращательную составляющую поля \vec{A} соответственно в каждой точке.



ЛАПЛАСИАН



Из дифференциальных векторных операций второго порядка широкое применение в электродинамике находит оператор ∇^2 , закон действия которого на векторном поле \vec{A} описывается соотношением

$$\nabla^2 A = \text{grad div } A - \text{rot rot } A.$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярном поле, задается оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv \text{div grad}.$$



ЛАПЛАСИАН (продолжение)

Оператор Лапласа в различных координатных системах записывается следующим образом:

- в декартовой системе координат

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2};$$

- в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2};$$

- в сферической системе координат

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}.$$





1. Направляющие системы и направляемые волны.

(11)

Электромагнитные волны могут свободно распространяться в пространстве и при наличии каких-либо направляющих элементов (границ раздела сред, металлических, диэлектрических или полупроводящих трубок, стержней и пр.).

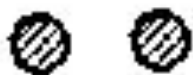
Такие волны называют *направляемыми*.

Совокупность направляющих элементов образует *направляющую систему*. ГОСТ 18238-72 устанавливает термин «Линия передач» - это устройство, ограничивающее область распространения электромагнитных колебаний и направляющее поток электромагнитной энергии в заданном направлении.

Линию передачи (ЛП), у которой поперечное сечение и другие параметры не меняются в продольном направлении, называются *однородными ЛП*.

Линии передачи однородных направляющих систем

12



а)



б)



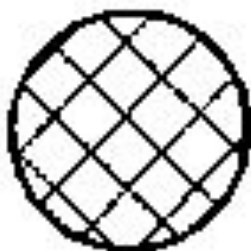
в)



г)



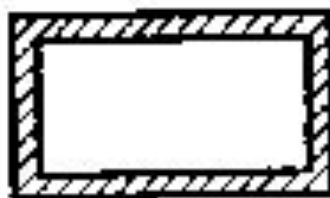
д)



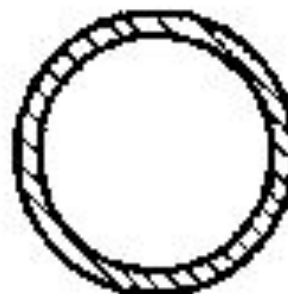
е)



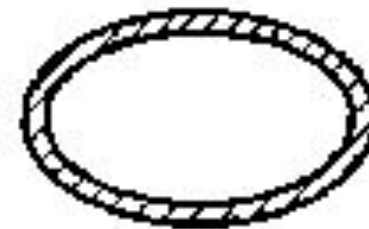
ж)



з)



и)



к)



Линии передачи однородных направляющих систем

13

- а. двухпроводная ЛП;*
- б. коаксиальная ЛП;*
- в. экранированная двухпроводная ЛП;*
- г. симметричная полосковая линия;*
- д. несимметричная полосковая линия;*
- е. диэлектрический волновод;*
- ж. световод;*
- з. прямоугольный волновод;*
- и. круглый волновод;*
- к. эллиптический волновод.*



Классы линий передач

14

Все ЛП делятся на два класса:

- линии передачи открытого типа (а, г, д, е, ж);**
- линии закрытого типа (б, в, з, и, к).**

В ЛП закрытого типа вся передаваемая энергия сосредоточена в области, экранированной от внешней среды металлической оболочкой той или иной формы.

ЛП открытого типа выполняются таким образом, чтобы подавляющая часть передаваемой энергии была сосредоточена в непосредственной близости к линии. Однако линии открытого типа подвержены влиянию внешних воздействий. На волны в таких линиях влияют электромагнитные поля, созданные другими источниками, и внешние воздействия (например, метеорологические: грозы, дождь, снег, обледенение).



Структура поля электромагнитных волн

15

Поперечными волнами, или TEM-волнами (T-первая буква английского слова *transvers*, что означает «поперечный»), называют волны, у которых \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны направлению распространения волны, то есть не имеют продольных составляющих. Согласно ГОСТ 18238-72 эти волны полагается называть T-волнами. Однако это название практически не используется ни в зарубежной, ни в отечественной литературе. Сохранен общепринятый термин TEM-волны.



Структура поля электромагнитных волн

Электрическими волнами или Е-волнами называют волны, у которых вектор \vec{E} имеет как поперечные, так и продольную составляющую, а продольная составляющая вектора \vec{H} равна нулю.

Часто Е-волны называют поперечными магнитными волнами или ТМ-волнами.

Магнитными волнами или Н-волнами называют волны, у которых вектор \vec{H} имеет как поперечные, так и продольную составляющую, а продольная составляющая вектора \vec{E} равна нулю. \vec{H} -волны часто называют поперечными электрическими волнами или ТЕ-волнами.

Гибридными или смешанными волнами называют волны, у которых и вектор \vec{E} и вектор \vec{H} наряду с поперечными составляющими имеют и продольные составляющие.



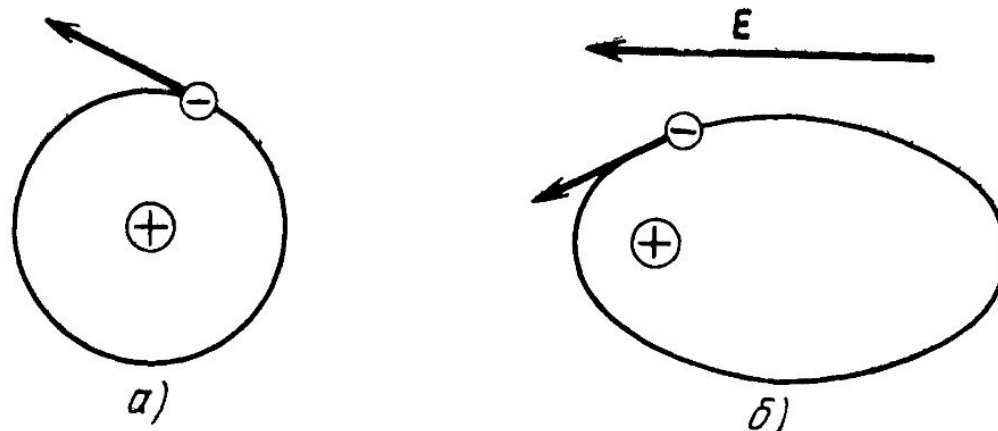
2. Материальные уравнения электромагнитного поля

(17)

Помятуя о том, что нас интересуют структуры, направляющие оптические волны, которые строятся на базе диэлектриков, материальные уравнения ЭМП будем исследовать именно на этих материалах. В природе существует обширный класс веществ, которые не проводят электрического тока. Эти вещества носят название диэлектриков. Помимо изолирующих свойств диэлектрики обладают способностью специфическим образом изменять свои свойства при помещении их в электрическое поле. Какова сущность этого процесса?



Классическая модель процесса поляризации



В отсутствие внешнего электрического поля электрон вращается по круговой орбите, так что в среднем центр «эффективного» отрицательного заряда совпадает с центром ядра и атом не проявляет дипольных свойств. После приложения внешнего поля орбита деформируется, превращаясь в эллипс, центры положительного и отрицательного заряда перестают совпадать друг с другом в пространстве (положительный заряд занимает одну из точек фокуса эллипса), и молекула начинает вести себя подобно электрическому диполю. Описанное явление носит название электронной поляризации вещества.



Примечание - 1

(19)

Следует отметить, что электронная поляризация характерна лишь для определенного класса диэлектриков, молекулы которых в отсутствие внешнего поля не обладают собственными дипольными свойствами. Подобные вещества относятся к классу неполярных диэлектриков. Примером их могут служить большинство газов и многие твердые диэлектрики как естественные, так и искусственные (кварц, стекло, полиэтилен и т.п.).



Примечание - 2

(20)

Помимо неполярных диэлектриков существуют довольно много веществ, характеризующихся тем, что их молекулы проявляют дипольные свойства и при отсутствии внешнего поля. Такие вещества носят название полярных диэлектриков. К ним относятся жидкие диэлектрики (вода, спирты), а также некоторые твердые вещества, например, полихлорвинил.

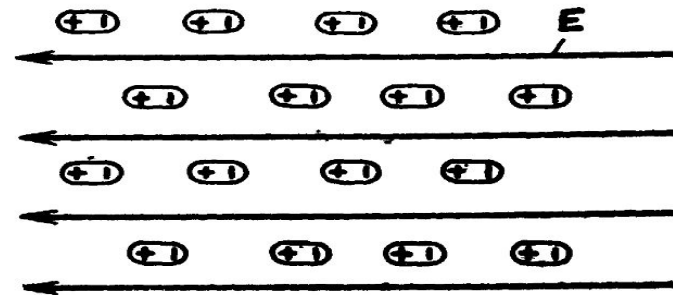


Поляризация полярного диэлектрика

21



а)



б)

Если в отсутствие внешнего поля \vec{E} молекулярные диполи ориентированы в пространстве хаотично, то после приложения поля происходит некоторая ориентация молекулярных диполей. Степень выраженности этой ориентации будет возрастать с увеличением напряженности поля \vec{E} и падать при увеличении температуры, поскольку хаотическое тепловое движение молекул нарушает их упорядоченное расположение, возникающее в процессе поляризации.



Дипольный момент частицы вещества и объема

Переходя от молекулярной модели к макроскопическим структурам можно сказать, что количественной характеристикой поляризации отдельной частицы принято считать ее дипольный момент

$$\vec{p} = ql \cdot \vec{1}_l,$$

который представляет собой вектор, коллинеарный единичному вектору $\vec{1}_l$, направленному вдоль оси диполя от положительного заряда к отрицательному.

Если в единице объема вещества находится N частиц-диполей, то в качестве меры поляризации диэлектрика принято вводить вектор поляризации

$$\vec{P} = N\vec{p}.$$

Вектор \vec{P} определяется в каждой точке объема поляризованного диэлектрика и зависит как от концентрации элементарных диполей, так и от направления вектора напряженности электрического поля, действующего внутри вещества.



Вектор электрического смещения и коэффициент диэлектрической восприимчивости

23

Практика показывает, что поляризационные заряды являются «истинными» и должны наряду со свободными зарядами учитываться при характеристике вещества.

Вектор электрического смещения будет иметь вид

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Подавляющее большинство известных природных и искусственных диэлектриков характеризуются тем, что для них существует прямо пропорциональная зависимость между

векторами \vec{E} и \vec{P} :

$$\vec{P} = k_3 \vec{E},$$

где k_3 - коэффициент диэлектрической восприимчивости.



Вектор намагниченности и магнитная восприимчивость вещества

По аналогии вектор намагниченности магнетика определяется по формуле

$$\vec{M} = N\vec{m}$$

и имеет смысл суммарного магнитного момента единицы объема.

Таким образом, в аналогии характеристик имеется и различие в поведении поляризуемых диэлектриков в электрическом поле и магнетиков, помещенных во внешнее магнитное поле. Аналогично с диэлектриками выяснено, что у большинства веществ при слабых внешних поля также имеет место линейная связь между векторами \vec{M} и \vec{H} :

$$\vec{M} = k_M \vec{H},$$

где k_M - магнитная восприимчивость вещества.

Вектор магнитной индукции будем иметь:

$$\vec{B} = (\mu_0 + k_M)\vec{H} = \mu_a \vec{H}$$





3. Поляризационные и сторонние токи.

((25))

Эффект поляризации диэлектриков связан с перемещением в пространстве заряженных частиц, что равносильно протеканию в области, занятой диэлектриком, некоторых токов, называемых поляризационными токами. Следует подчеркнуть, что принципиальной разницы между токами проводимости и поляризационными токами не существует.

Это может быть выражено соотношением

$$\vec{\delta}_{\text{пол}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$



Вектор плотности суммарного тока

(26)

Теперь, наконец, можно полностью расшифровать физический смысл составляющих, из которых складывается вектор плотности суммарного тока $\vec{\delta}_\Sigma$. Плотность тока смещения и плотность тока проводимости уже известны. Процесс поляризации материальной среды учитывается добавлением плотности поляризационного тока. Объединить все три перечисленных тока позволило то, что они зависят только от состояния исследуемого электромагнитного процесса в выбранной точке пространства.

$$\vec{\delta}_\Sigma = \dots + \dots + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$



О сторонних токах

27

В большом числе инженерных задач приходится рассматривать токи, вызываемые внешними источниками. Сюда относятся, например, задачи расчета полей, возбуждаемых антеннами во внешнем пространстве. При этом, как правило, полагают, что ток в антенне целиком определяется возбуждающим внешним источником и никак не зависит от возбуждаемого ЭМП. Подобные токи принято называть сторонними токами и обозначать вектор их плотности как $\vec{\delta}_{ст}$.

Одна из форм написания первого уравнения Максвелла

28

Итак, дифференциальная форма закона полного тока
принимает развернутый вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{\delta}_{\text{ст.}}$$



БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ

