Всегда в согласии с природой и с самим собой
Ксенократ

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

Кафедра информационных технологий и систем

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лекция № 4

«Решение волнового уравнения для произвольной линии передачи»

Основные вопросы лекционного занятия

1. Метод комплексных амплитуд.
2. Волновое уравнение для произвольной линии передачи и его решение.
3. Фазовая скорость и длина волны в линии передачи.

Литература для самостоятельной работы

Основная литература

1. 1. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ.
2. Стр. 20 – 47, 78 – 94.

2. Баскаков С.И. и др. Сборник задач по курсу Электродинамика и распространение радиоволн/Учебное пособие – М.: Высшая школа. 1981. Глава 7.

Дополнительная литература

3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. Стр. 167-176.

Метод комплексных амплитуд

Система уравнений Максвелла охватывает всю совокупность электромагнитных явлений, относящихся к макроскопической электродинамике. В ряде случаев уравнения Максвелла упрощаются. Однако есть искусственный, позволяющий упростить всю теорию колебаний. Этот метод получил название МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД.

Имеем скалярную функцию, описывающую гармонический процесс и изменяющуюся по закону

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где ψ_m - амплитуда функции; φ – начальная фаза; $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$; а f и T - частота и период колебания, соответственно.

Для упрощения анализа гармонических колебаний, используя уравнения Эйлера, вводим в рассмотрение комплексную функцию

$$\dot{\psi} = \psi_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \dot{\psi}_m e^{i\omega t},$$

где $\dot{\psi}_m = \psi_m e^{i\varphi}$ принято называть *комплексной амплитудой функции* ψ. Для перехода от комплексной функции $\dot{\psi}_m$ к исходной функции ψ нужно взять от $\dot{\psi}$ реальную часть

$$\psi = \operatorname{Re}\dot{\psi} = \operatorname{Re}\left(\dot{\psi}_m e^{i\omega t}\right).$$

Проведем ту же операцию для вектора $\vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{x}_0 a_{xm} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 a_{ym} \cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 a_{zm} \cos(\omega t + \varphi_3),$$

введем в рассмотрение комплексный вектор

$$\dot{\vec{a}} = \vec{x}_0 a_{xm} \exp[\mathrm{i}(\omega t + \varphi_1)] + \vec{y}_0 a_{ym} \exp[\mathrm{i}(\omega t + \varphi_2)] + +\vec{z}_0 a_{zm} \exp[\mathrm{i}(\omega t + \varphi_3)] = \dot{\vec{a}}_\mathrm{m} \exp(\mathrm{i}\omega t),$$

где

$$\dot{\vec{a}}_\mathrm{m} = \vec{x}_0 a_{xm} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_1} + \vec{y}_0 a_{ym} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_2} + \vec{z}_0 a_{zm} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_3}$$

- комплексная амплитуда вектора $\vec{a}$.

Для перехода от комплексной амплитуде $\dot{\vec{a}}_\mathrm{m}$ к мгновенному значению исходной функции нужно вычислить реальную часть произведения $\dot{\vec{a}}_\mathrm{m}$ на $\exp(\mathrm{i}\omega t)$:

$$\vec{a} = \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{a}}_\mathrm{m} e^{i\omega t}\right) \equiv \mathrm{Re}\dot{\vec{a}}.$$

Если функции $\vec{a}$ и ψ удовлетворяют линейным уравнениям, то таким же уравнениям будут удовлетворять соответствующие комплексные функции $\dot{\vec{a}}$ и $\dot{\psi}$.

Определение комплексных функций во многих случаях оказывается проще определения исходных функций. Это объясняется тем, что дифференцирование комплексной функции по времени равносильно умножению ее на $i\omega$:

$$\frac{\partial\dot{\vec{a}}}{\partial t} = i\omega\dot{\vec{a}}; \ \frac{\partial\dot{\psi}}{\partial t} = i\omega\dot{\psi},$$

а интегрирование по времени – к делению на $i\omega$:

$$\int \dot{\vec{a}}\, dt = \frac{\dot{\vec{a}}}{i\omega}; \ \int \dot{\psi}\, dt = \frac{\dot{\psi}}{i\omega}.$$

Уравнения Максвелла в комплексной форме

Уравнения Максвелла являются *линейными дифференциальными уравнениями*. Значит, при изучении монохроматических электромагнитных полей можно вместо векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ рассматривать ***комплексные векторы***

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t) \text{ и } \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m \exp(i\omega t).$$

Составим комплексные амплитуды $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$.

Пусть для электрического поля

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{xm} \cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{ym} \cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 E_{zm} \cos(\omega t + \varphi_3),$$

где E_{xm}, E_{ym} и E_{zm} - амплитуды составляющих вектора $\vec{E}$; φ_1, φ_2 и φ_3 - начальные фазы составляющих вектора электрического поля.

Для магнитного поля

$$\vec{H} = \vec{x}_0 H_{xm}\cos(\omega t + \varphi_1) + \vec{y}_0 H_{ym}\cos(\omega t + \varphi_2) + \vec{z}_0 H_{zm}\cos(\omega t + \varphi_3),$$

где H_{xm}, H_{ym} и H_{zm} - амплитуды составляющих вектора $\vec{H}$; φ_1, φ_2 и φ_3 - начальные фазы составляющих вектора магнитного поля.

Комплексная амплитуда $\dot{\vec{E}}_m$ будет

$$\dot{\vec{E}}_\mathrm{m} = \vec{x}_0 E_{xm} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_1} + \vec{y}_0 E_{ym} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_2} + \vec{z}_0 E_{zm} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_3},$$

а магнитного поля $\dot{\vec{H}}_m$

$$\dot{\vec{H}}_\mathrm{m} = \vec{x}_0 H_{xm} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_1} + \vec{y}_0 H_{ym} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_2} + \vec{z}_0 H_{zm} e^{\mathrm{i}\omega\varphi_3}.$$

Если составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются синфазно, то есть $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_c$, то выражения упростятся

$$\dot{\vec{E}}_{\mathrm{m}} = e^{\mathrm{i}\omega\varphi_c}\left(\vec{x}_0 E_{xm} + \vec{y}_0 E_{ym} + \vec{z}_0 E_{zm}\right),$$

$$\dot{\vec{H}}_{\mathrm{m}} = e^{\mathrm{i}\omega\varphi_c}\left(\vec{x}_0 H_{xm} + \vec{y}_0 H_{ym} + \vec{z}_0 H_{zm}\right).$$

Если $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi)$, **а** $\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi)$, ***то***

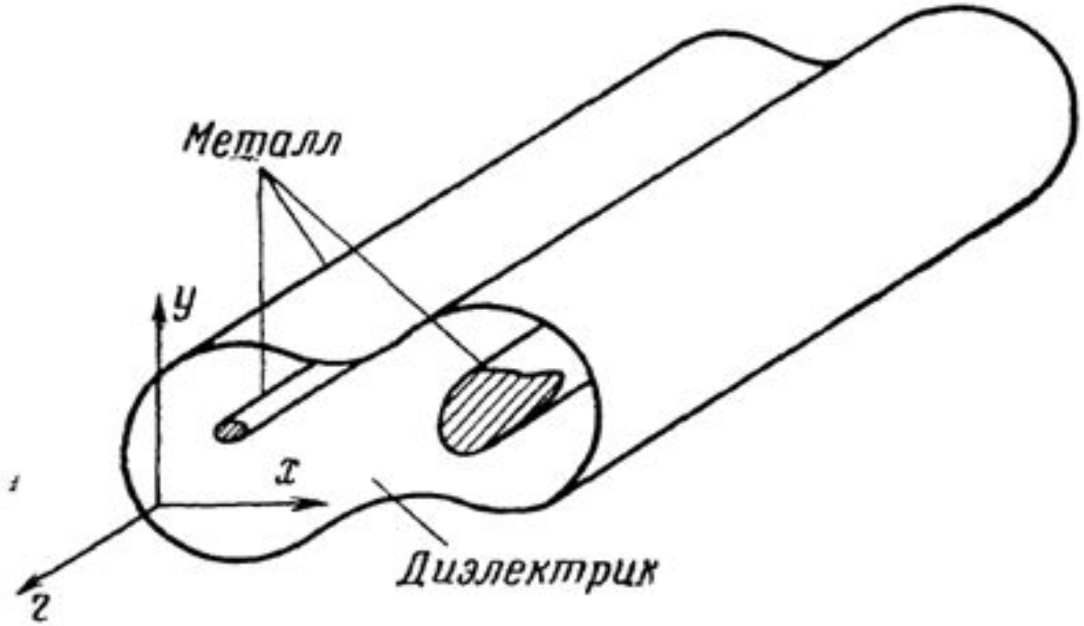
$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{E}_m \cdot e^{i\varphi}, \text{ а } \dot{\vec{H}}_m = \vec{H}_m \cdot e^{i\varphi}.$$

2. Волновое уравнение для произвольной линии передачи и его решение.

Исходные предпосылки.

Приступая к анализу линий передачи (ЛП), обратимся к теории распространения волн по произвольной передающей линии. В качестве основного ограничения примем сначала, что линия однородна, то есть в направлении распространения энергии размеры сечения и параметры неизменны. Поперечные размеры линии передачи могут находиться в любом соотношении с длиной волны.

Рассмотрим однородную неразветвленную линию передачи, состоящую из любого числа проводников произвольного поперечного сечения.



Направление распространения волны совместим с осью z правосторонней прямоугольной системы координат. Поперечное сечение ЛП находится в плоскости xy.

Сейчас и в дальнейшем все решения будем проводить в международной системе мер СИ.

Пространство между проводниками заполнено изотропным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε, относительной магнитной проницаемостью μ и удельной проводимостью σ. В наиболее простых, чаще всего встречающихся случаях величины ε, μ и σ не являются функциями координат и напряженности электрического и магнитного полей.

Считаем, что в пространстве между проводниками ЛП отсутствуют свободные заряды (электронные или ионные потоки), а также отсутствуют какие-либо виды «активных сред» (например, атомы или молекулы), являющиеся источниками сторонних колебаний.

Исходные уравнения Максвелла, описывающие ЭМП в пространстве между проводниками, не содержащем свободных зарядов, в дифференциальной форме имеют вид:

$$rot\,\vec{H} = \vec{\sigma}\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t};$$

$$rot\,\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t};$$

$$div\left(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\right) = 0;$$

$$div\left(\mu\mu_0\vec{H}\right) = 0$$

Через ε_0 и μ_0 обозначены диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, равные

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В} \cdot \text{м}} \text{ или } \varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}};$$

$$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} \text{ или } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Подставляя выражения комплексных амплитуд в уравнения Максвелла получим, при однородном изотропном заполнении диэлектриком линии передачи уравнения поля приводятся к симметричному виду относительно векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$rot\,\vec{H} = i\omega\varepsilon'\varepsilon_0\vec{E};$$

$$rot\,\vec{E} = -i\omega\mu\mu_0\vec{H}$$

$$div\,\vec{E} = 0;$$

$$div\,\vec{H} = 0.$$

При этом

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}.$$

Уравнения Максвелла легко сводятся к волновым уравнениям, в которые входит только один из векторов поля. Определяя $\vec{H}$ через $\vec{E}$ и переходя к лапласиану, получим:

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0.$$

Такое же уравнение можно получить относительно вектора $\vec{H}$:

$$\nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0.$$

Рассмотренные уравнения справедливы для любой системы координат, причем в общем случае векторы электрического и магнитного полей могут иметь по три составляющих.

При использовании прямоугольной системы координат имеем

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z;$$

$$\vec{H} = \vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы (орты) на осях координат x, y, z, соответственно.

Если подставить полученные соотношения в модифицированные уравнения Максвелла и произвести их выражения через прямоугольные координаты, то получим шесть независимых скалярных уравнений:

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0; \qquad \nabla^2 H_x + k^2 H_x = 0;$$

$$\nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0; \qquad \nabla^2 H_y + k^2 H_y = 0;$$

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0; \qquad \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0.$$

Все уравнения имеют совершенно одинаковую форму.

$$\omega^2 \varepsilon' \varepsilon_0 \mu \mu_0 = k^2$$

Общее волновое уравнение

Следовательно, нахождение общих выражений составляющих поля в прямоугольной системе координат требует решения одного скалярного дифференциального уравнения в частных производных типа

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + k^2 W = 0,$$

где W – одна из составляющих электрического или магнитного поля, то есть E_x, E_y, E_z, H_x, H_y или H_z.

Необходимо отметить, что в цилиндрической системе координат, где в дальнейшем мы будем много работать, выражение $\nabla^2 E$ будет иметь более сложную форму и не будет давать столь простых уравнений относительно всех составляющих поля.

Решение волнового уравнения для произвольной линии передачи.

Математическое решение ОВУ производится разделением переменных по методу Фурье.

Представим решение ОВУ в виде произведения сомножителей, каждый из которых является функцией только одной координаты:

$$W = X(x)Y(y)Z(z)e^{i\omega t}.$$

Функции X, Y, Z являются взаимно независимыми. Каждой функции соответствуют постоянные ξ, η, γ, которые связаны выражением

$$\xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = k^2$$

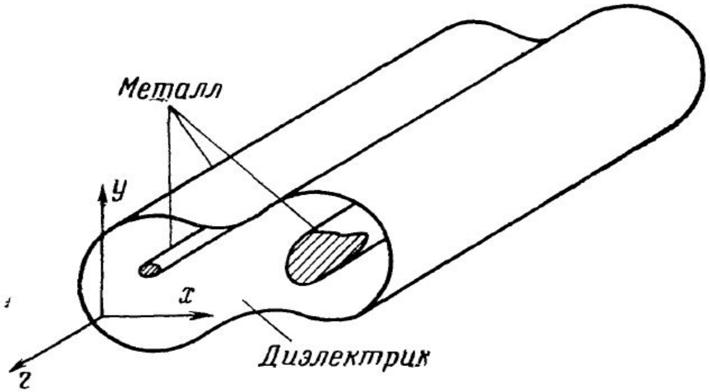
Решение волнового уравнения для произвольной линии передачи.

Решение общего волнового уравнения для любых составляющих ЭМП в декартовой системе координат имеет вид:

$$X = C_1 e^{i\xi x} + C_2 e^{-i\xi x};$$

$$Y = C_3 e^{i\eta y} + C_4 e^{-i\eta y};$$

$$Z = C_5 e^{i\gamma z} + C_6 e^{-i\gamma z}.$$



Окончательная формула решения волнового уравнения для произвольной линии передачи

Так как ось z выбрана в качестве направления распространения волны, функцию Z оставим в показательной форме. Сомножители X и Y представим в тригонометрической форме, воспользовавшись преобразованиями Эйлера и, таким образом, получим решение скалярного волнового уравнения для любой составляющей поля бегущей волны

$$W = D\,cos(\xi x - \varphi)\,cos(\eta y - \psi)\,e^{i\omega t - \gamma z}.$$

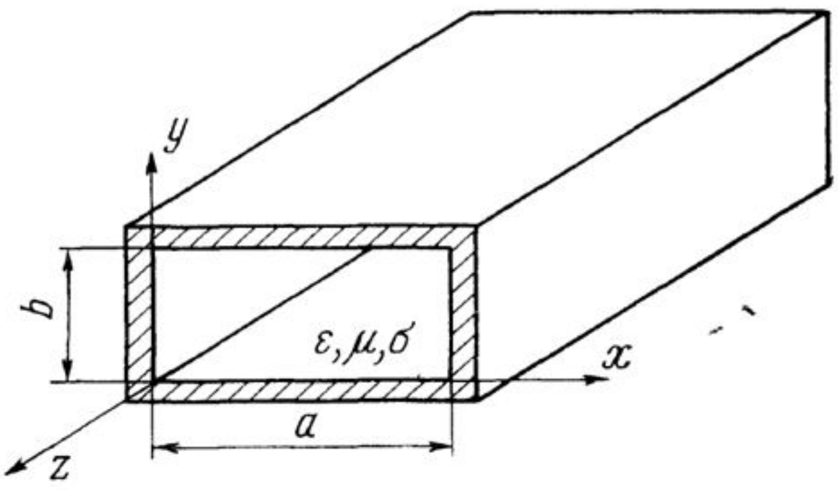
Константы ξ и η, входящие в это выражение, определяют изменение (вариацию) ЭМП в плоскости поперечного сечения рассматриваемой линии. Поэтому ξ и η называются поперечными волноводными числами ЛП. D - алгебраическая сумма всех констант.

3. Фазовая скорость и длина волны в линии передачи

Скорость перемещения фазы волны – есть фазовая скорость

$$v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Если $\sqrt{\varepsilon\mu} < 1$, *то* $v_{\text{ф}} > c$!



λ – длина волны генератора (в свободном пространстве)

$\lambda_{\text{лп}}$ - длина волны в линии передачи

$\lambda_{\text{кр}}$ - критическая длина волны

Длина волны во всякой однородной линии передачи:

$$\lambda_{лп} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon\mu - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Большое практическое значение имеет случай диэлектрика, для которого $\varepsilon = \mu = 1$ (вакуум или, практически, воздух).

$$\lambda_{лп} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

$$\lambda_{кр} = 2a$$

Фазовую скорость волны, распространяющейся по линии передачи, определим по выражению:

$$v_ф = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

В случае вакуумного наполнения имеем:

$$v_ф = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

Весь расчетный материал разберем на практическом занятии

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ