ВОЕННО–МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени С.М. Кирова
Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 1

по дисциплине «Математика»
на тему: «Функции и их свойства. Графики функций. Предел функции. Непрерывность функции»

для курсантов I курса по военной специальности «Фармация»

- Кафедра биологической и медицинской физики — одна из первых кафедр Военно-медицинской академии и старейшая кафедра физики в России (образована в 1795 г.).

Здание Естественно-исторического института

Первым профессором кафедры стал Василий Владимирович Петров (1761—1834) — знаменитый русский ученый-естествоиспытатель, заложивший основы преподавания экспериментальной физики в России.

1. Определение функции, числовых промежутков и окрестностей точек. Некоторые свойства функций и их графиков.

Определение:

- Пусть X, $У$ — некоторые множества, элемента ми которых являются некоторые числа. Если каждому числу x Є X по некоторому закону или правилу f ставится в соответствие число y Є $У$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция f и записывают эту функциональную зависимость формулой

$$y = f(x).$$

- Переменная *x* называется независимой переменной или аргументом, а переменная *y* называется зависимой переменной (от *x*) или функцией.

- Множество *X* — область изменения аргумента — называется области определения функции. Множество *У*, содержащее все значения, которые принимает *у*, называется областью изменения функции.

- Множества *X* и *Y* часто являются конечными или бесконечными **промежутками**:

- а) **конечные промежутки**:
- Открытый интервал *(a,b)*: множество вещественных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$ или $(a,b) \leftrightarrow (a < x < b)$, где знак эквивалентности;
- Замкнутый интервал (или отрезок) $[a,b]$: $[a,b] \leftrightarrow (a \leq x \leq b)$;
- Полуоткрытые интервалы $(a,b]$ и $[a,b)$: $(a,b] \leftrightarrow (a < x \leq b)$ или $[a,b) \leftrightarrow (a \leq x < b)$.

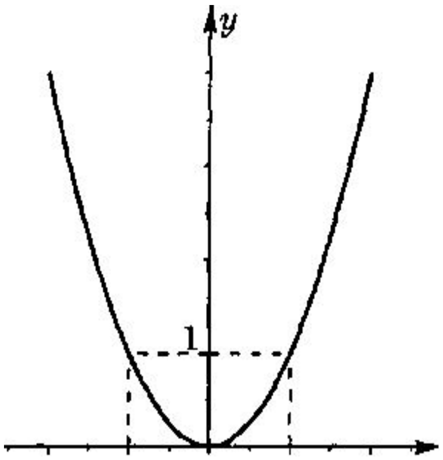
- б) **бесконечные промежутки**:
- $(-\infty, +\infty) = R$ – множество всех вещественных чисел.
- Аналогично, возможны промежутки $(a,+\infty)$, $(-\infty, a)$ *и т.д.*
- Числа a и b называются **левым** и **правым концами** этих промежутков.

- Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). **Окрестностью точки** x_0 называется любой интервал (a,b), содержащий точку x_0; интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, симметричный относительно x_0, называется ε-окрестностью точки x_0.

Способы задания функции:

- **1) Графический.**
- Правило, по которому можно находить *y*, зная *x*, может быть задано графиком функции.
- **Графиком функции** в декартовой прямоугольной системе координат называется множество всех точек, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты - соответствующими значениями функции.

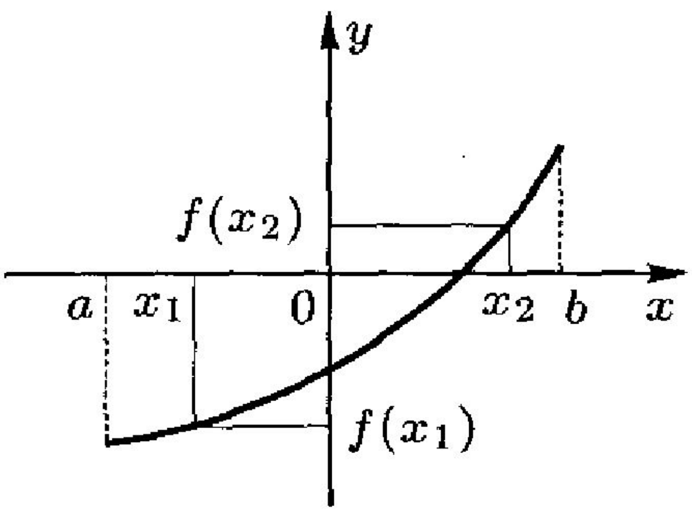
- **Пример.** Графиком функции $y = x^2$ является парабола, ось симметрии которой совпадает с положительной полуосью ординат, а вершина с началом координат.



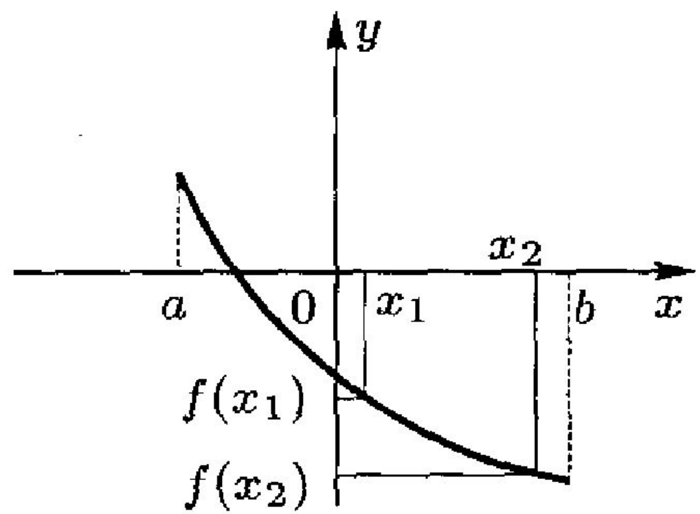
- Функцию можно задавать также с помощью таблицы или формулы (аналитически).
- 2) **Табличный** способ применяется на практике при обработке результатов наблюдений приближенных значений функции.
- *3)* **Аналитический** способ задания функции является наиболее удобным для полного исследования функции при помощи методов математического анализа.

- **Основные характеристики функции:** монотонность, ограниченность, четность (нечетность), периодичность.

- **Определение.** Функция называется **возрастающей (убывающей)** в интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции.
- График возрастающей на интервале *(a,b)* функции, если его рассматривать слева направо, поднимается вверх, а для убывающей функции — опускается вниз.



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- **Определение.** Интервал независимой переменной, в котором функция возрастает (убывает), называется **интервалом возрастания (убывания)**. Как интервал возрастания, так и интервал убывания называют **интервалами монотонности** функции, а функцию в этом интервале — **монотонной функцией**.

- **Определение.**
- Функция называется **четной**, если при изменении знака допустимого аргумента значение функции не изменяется.
- Функция называется **нечетной**, если при изменении знака допустимого аргумента значение функции меняет знак на противоположный.

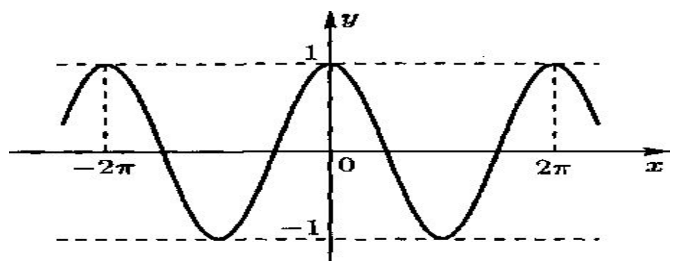
- Таким образом, если функция $f(x)$ — четная, то для всех x из ее области определения должно выполняться равенство $f(-x)=f(x)$, как это происходит, например, при $f(x) = x^2$, а если $f(x)$ — нечетная, то $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции, как, например, в случае $f(x)= x^3$.

- Четные или нечетные функции должны быть обязательно определены в области, симметричной относительно начала координат.
- При этом график четной функции симметричен относительно оси абсцисс, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

- Не все функции являются четными либо нечетными; функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, будем называть **функциями общего вида**.

- **Определение.**
- Функция *f(x)* называется **периодической**, если существует такое положительное число *a*, что $f(x + a) = f(x) = f(x - a)$ для любого *x* из ООФ (точки *x*, *x + a*, *x -a* относятся к области определения функции).
- При этом наименьшее положительное *a* с таким свойством (если таковое существует) называется **периодом** функции.

- Примером периодической функции служит определенная на всей оси функция $y = \cos x$, период которой равен 2π.



2. Сложная функция. Обратная функция.

- **Определение.** Сложной функцией называется функция, аргумент которой также является функцией, т.е. $F(x) = f(\varphi(x))$.
- Чтобы сосчитать значение в точке x сложной функции $f(\varphi(x))$, составленной из функций f и φ, следует сначала найти частное значение $u=\varphi(x)$ внутренней функции φ, а затем подставить его в качестве аргумента во внешнюю функцию f.

- При этом область определения функции $F(x)$ следует выбирать таким образом, чтобы промежуточное множество U, с одной стороны, было областью значений функции $\varphi(x)$, а с другой стороны, являлось областью определения функции $f(u)$.

- **Пример.** Рассмотрим сложную функцию $y = lg(1 - x^2)$. Здесь $y = f(u) = lgu$, в то время как $u = \varphi(x) = 1 - x^2$.
- Областью определения функции y является интервал $(-1, 1)$, в котором как функция $\varphi(x)$, так и функция $f(u)$ имеют смысл.

Обратная функция

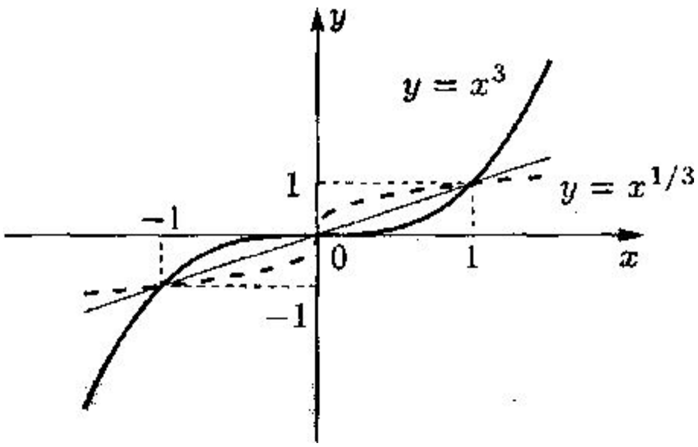
- Рассмотрим функцию с областью определения X и областью значений Y. Предположим, что каждому значению $y \varepsilon Y$ соответствует одна определенная точка

  $x \varepsilon X$, такая что $y = f(x)$. Тогда существует функция φ, переводящая любое $y \varepsilon Y$

  в $x \varepsilon X$, удовлетворяющее вышеуказанному свойству $y = f(x)$.

- Функции f и φ с вышеперечисленными свойствами называются **взаимно-обратными**, а функция φ называется **обратной** по отношению к f. С учетом того что символ x соответствует, как правило, независимой переменной, обычно вместо записи $x = \varphi(y)$ используют запись $y = \varphi(x)$.

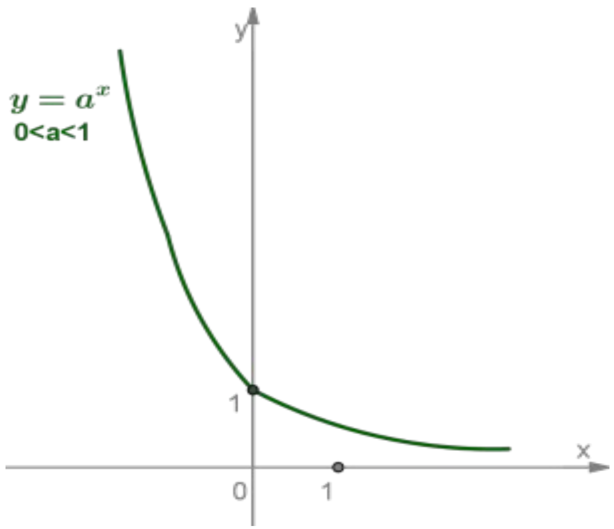
- Между графиками функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеется простая связь: график обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

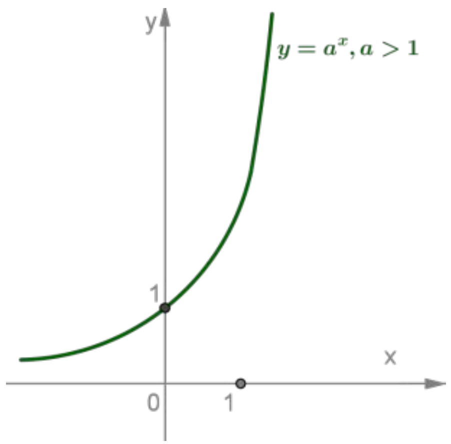


3. Элементарные функции. Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции.

- **Определение.** Основными элементарными функциями являются:
- 1) **степенная функция**: $y = x^n$, где n — действительное число, $x > 0$ (в некоторых случаях, в частности при натуральном n, степенная функция определена на всей оси);

- 2) **показательная функция**: $y = a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$; $X = R$;




y
$y = a^x, a > 1$
1
x
0
1

- 3) **логарифмическая функция**: $y = log_a x$, где основание логарифма $a > 0$, $a \neq 1$, и $X = (0, +\infty)$;

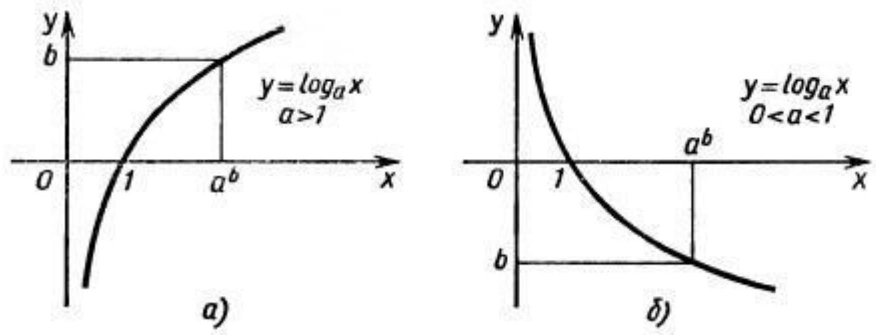
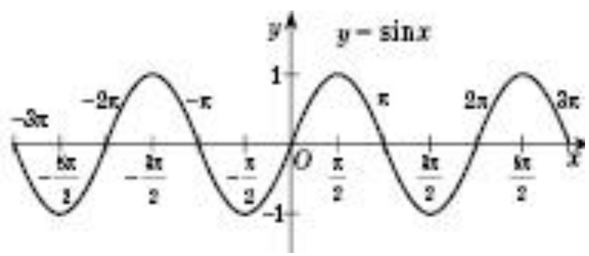
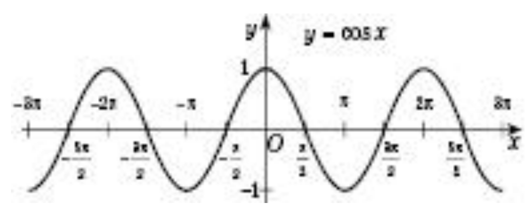
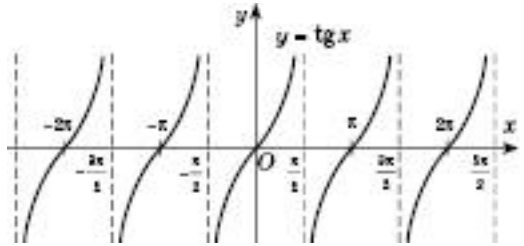


Рис. 1

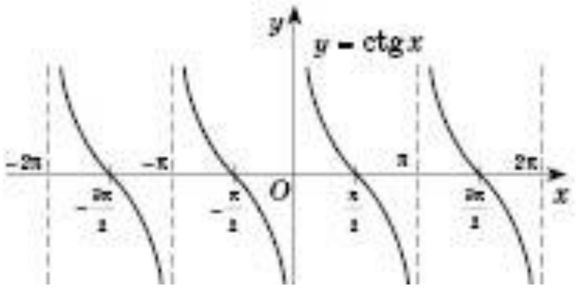
- 4) **тригонометрические функции**:
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$;







y
y = tg x
x
O



y
y = ctg x
x
O

- 5) ***обратные тригонометрические функции***: *y* = arcsin *x*, *y* = arcos *x*, *y* = arctg *x* и

  y = arcctg *x*

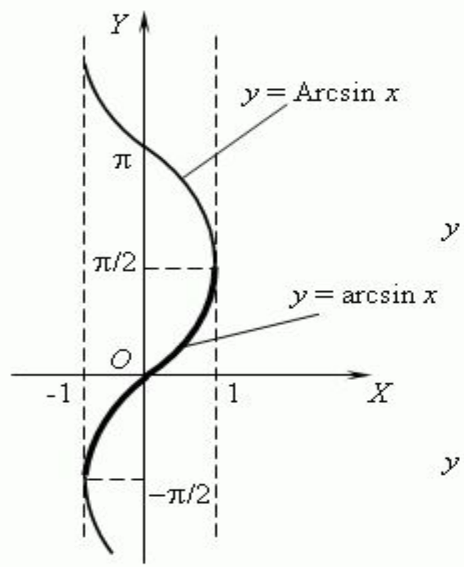


Рис. 23

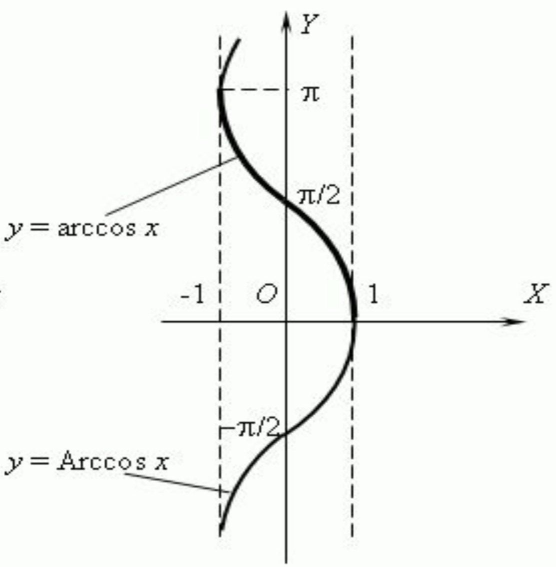


Рис. 24

4. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Специальные пределы

- **Пример**. Пусть задана функция

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} ,$$

определенная при всех значениях x, кроме $x = 1$.

(Отметим, что эта функция не эквивалентна функции $f(x) = x + 1$, получаемой при сокращении правой части на $x - 1$, так как эти функции имеют разные области определения).

- Исследуем поведение функции при значениях x, мало отличающихся от 1. Для этого составим таблицу значений функции в интересующем нас интервале:

x	0,97	0,98	0,99	1,01	1,02
$f(x)$	1,97	1,98	1,99	2,01	2,02

- Чем ближе x приближается к 1, тем ближе значения $f(x)$ к 2.
- В подобных случаях говорят, что число 2 является пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к 1

  (или более кратко: $f(x) \to 2$ при $x \to 1$).

- **Определение.** Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0.
- Число b называется **пределом функции** *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε, как бы мало оно не было, можно найти такое положительное δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.
- *Записывают так:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Основные теоремы о пределах:

- В приводимых ниже теоремах будем считать, что функции *f(x) и g(x)* имеют общую область определения, содержащую точку x_0, и обладают пределами в этой точке.

- **Теорема 1** (о единственности предела функции). Функция не может иметь более одного предела.
- **Следствие.** Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ равны в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0, то либо они имеют один и тот же предел при $x \to x_0$, либо обе не имеют предела в этой точке.

- **Теорема 2.** Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют пределы в точке x_0, то:
- 1) предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых, т.е.

- 2) предел произведения функций равен произведению пределов сомножителей, т.е.

- **Теорема 3.** Предел частного двух функций равен частному от деления предела делимого на предел делителя, если предел делителя не равен нулю, т.е.

Следствие 2. *Постоянный множитель* можно выносить за знак предела, т.е.

- **Следствие 1.** *Предел постоянной* равен самой постоянной, т.е.

- **Следствие 2.** *Постоянный множитель* можно выносить за знак предела, т.е.

[illegible]

Специальные пределы

- Для решения примеров используются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(первый классический предел)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828$$

(второй классический предел)

- При решении примеров полезно иметь в виду следующие равенства:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

5. Непрерывность функций

- Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в интервале $[a, b]$.
- Пусть x_0 и x — два произвольных значения из этого интервала. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, откуда $x = x_0 + \Delta x$.
- Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано **приращение** Δx.

- Приращением Δy функции $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0,
  называется разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- **Определение.** Функция $f(x)$ непрерывна в

точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- **Второе определение** непрерывности функции:
- Функция называется непрерывной в данной точке, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции,

т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

- **Определение.** Функция *f(x)* называется непрерывной в интервале, если эта функция непрерывна в каждой точке этого интервала.
- Для функции, непрерывной в интервале $(a,\ b)$, для каждого значения x_0 интервала (a,b) выполнено равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

- Непрерывность функции в точке x_0 равносильна ее непрерывности в этой точке одновременно слева и справа, то есть должны выполняться следующие четыре условия непрерывности:
- *1. f(x)* должна быть определена в некоторой окрестности точки x_0.
- 2. Должны существовать конечные пределы слева и справа: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$
- 3. Эти пределы слева и справа должны быть равны: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$
- 4. Эти пределы должны быть равны значению функции в точке x_0, т. е. $A = f(x_0)$.

- Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно условие, то в этой точке функция терпит разрыв, а сама эта точка называется точкой разрыва.
- В качестве конкретного примера функции, имеющей точку разрыва, рассмотрим изменение биомассы микроорганизмов, чувствительных к температурным колебаниям.


m

Классификация точек разрыва

- Пусть x_0 является внутренней точкой отрезка $[a, b]$. Если существуют конечные пределы $f(x)$ при стремлении x к x_0 слева и справа, но нарушены условия 3 или 4, то точку x_0 называют **точкой разрыва первого рода**.
- Если хотя бы один из пределов слева или справа бесконечен или его вовсе нет, тогда говорят о **разрыве второго рода**.