ВОЕННО-МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени С.М. Кирова
Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 1

по дисциплине «Физика, математика»
на тему: «**Основы теории вероятностей**»

для курсантов и студентов I курса ФПВ, ФПиУГВ, спецфакультета

ВОЕННО-МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени С.М. Кирова
Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 1

по дисциплине «Физика, математика»
на тему: «**Основы теории вероятностей**»

для курсантов и студентов I курса ФПВ, ФПиУГВ, спецфакультета

- Кафедра биологической и медицинской физики — одна из первых кафедр Военно-медицинской академии и старейшая кафедра физики в России (образована в 1795 г.).

Здание Естественно-исторического института

Первым профессором кафедры стал Василий Владимирович Петров (1761—1834) — знаменитый русский ученый-естествоиспытатель, заложивший основы преподавания экспериментальной физики в России.

Понятие о доказательной медицине

- Понятие "Evidence-based Medicine", или "медицины, основанной на доказательствах" (доказательной медицины) было предложено канадскими учеными из университета Мак Мастера в Торонто в **1990** году.

- **Доказательная медицина подразумевает добросовестное, точное и осмысленное использование лучших результатов клинических исследований для выбора лечения конкретного больного.**

Почему возникла необходимость в доказательной медицине?

- Увеличение объема научной информации, в частности в области клинической фармакологии.
- Нехватка средств, связанных с расходами на здравоохранение.

В основе медицинской практики, не основанной на доказанных фактах, лежат:

- Авторитет врача ("увеличение числа однотипных ошибок с увеличением стажа работы")
- Страстность ("эмоциональное воздействие на более спокойных коллег и родственников больных")
- Внешний облик врача и его красноречие ("хороший загар, шелковый галстук, вальяжная поза и красноречие как замена доказанным фактам")
- Провидение ("когда неизвестно, что делать с больным, вместо обоснованного решения полагаются на волю божью")
- Чувство неуверенности ("от чувства растерянности и отчаяния решения вовсе не принимаются")
- Нервозность ("в условиях постоянного страха перед судебным процессом врач назначает чрезмерное обследование и лечение")
- Самоуверенность ("в основном у хирургов")

- По современным стандартам надежная оценка эффективности методов лечения и профилактики может быть получена только в ходе **рандомизированных контролируемых клинических исследований** – наиболее доказательных и объективных.

- По окончании исследования сопоставляются частоты наступления **клинически важных исходов** – выздоровления, осложнения, смерти, а не **суррогатные исходы** – изменения физиологических, биохимических, иммунологических и других параметров.

- Для получения выводов исследования необходимо учитывать неопределенность многих характеристик, а также конечность числа наблюдений. Наиболее приемлемым инструментом в этом случае оказываются **методы теории вероятностей и медицинской статистики**.

- «Статистика – **это совокупность методов, которые дают нам возможность принимать оптимальные решения в условиях неопределенности**» (А. Вальд, американский математик).

1. Случайные события. Предмет теории вероятности. Определение вероятности (статистическое и классическое).

- **Случайные события** – это явления и факты, которые при различных условиях могут происходить или не происходить.
- Количественная оценка закономерностей, относящихся к случайным событиям, дается в разделе математики, называемом **теорией вероятности.**

- **Изучение закономерностей однородных массовых (статистических)случайных событий** составляет предмет теории вероятности и основанной на ней математической статистики.

- Изучение каждого отдельного явления с выполнением определенного комплекса условий называется **испытанием (опытом, экспериментом)**.
- Всякий результат или исход испытания называется **событием**.
- События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C…

- Возможность появления каждого события определяется специальной величиной – **вероятностью наступления события** – *P*(*A*).
- Вероятность *P*(*A*) – числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного случайного события *A* при многократном повторении испытаний.

Два способа определения вероятности:

- В «*классическом*» определении вероятности вероятность случайного события определяется как **отношение числа равновозможных исходов опыта, благоприятствующих наступлению события, к общему числу равновозможных исходов.**

$$P(A) = m/n$$

Из классического определения вероятности вытекает ряд ее свойств:

- Вероятность **достоверного события**, то есть события, которое происходит неизбежно в результате каждого испытания, равна 1.
- Вероятность **невозможного события** равна 0.
- Вероятность **любого события** удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{0 \le \mathit{P}(A) \le 1}.$$

- Классическое определение вероятности случайного события применимо только к испытаниям с **конечным** числом исходов, причем исходов **равновероятных**. Однако на практике часто рассматривают испытания, не удовлетворяющие этим условиям. В этом случае пользуются *статистическим* определением вероятности.

Статистическое определение вероятности:

- **Вероятностью случайного события называется предел, к которому стремится относительная частота события (частость) при неограниченном увеличении числа испытаний.**

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} m/n$$

- Здесь m – число событий; n –число испытаний.

Из этого определения следует, что

- В отличие от классического подхода к определению вероятности случайного события, в соответствии с которым для нахождения вероятности случайного события нет необходимости проводить реальные испытания, а достаточно теоретически изучить особенности их проведения, при статистическом подходе требуется проведение таких испытаний;

- Статистическую вероятность события нельзя **точно** определить на основании конечного числа испытаний, каким бы большим оно ни было. Однако статистическую вероятность можно оценить **приближенно** по величине соответствующей относительной частоты.

Пусть проведено **5 серий** по **100** выстрелов в цель, осуществленных одним и тем же спортсменом в одинаковых условиях.

Количество выстрелов	Количество попаданий в цель	Относительная частота попаданий в цель
100	**98**	**0,98**
100	**99**	**0,99**
100	**97**	**0,97**
100	**98**	**0,98**
100	**99**	**0,99**
100	**97**	**0,97**

Из таблицы очевидно, что:

- Относительная частота попаданий в цель не является величиной постоянной, а изменяется от серии к серии.
- Эта относительная частота не изменяется произвольно, а варьирует относительно среднего значения, равного 0,98.
- Статистическую вероятность попадания в цель можно принять примерно равной 0,98.

2. Классификация событий. Понятие о совместных и несовместных, зависимых и независимых событиях. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

События могут быть:

- а) Достоверными, невозможными и случайными;
- б) Противоположное событие – происходит только тогда, когда событие А не происходит;
- Сумма вероятностей наступления случайного события А и противоположного ему события В равна 1.

$$P(A) + P(B) = 1$$

- в) **Эквивалентные события** – события с одинаковой вероятностью, независимо от их природы: $P(A) = P(B)$;
- г) **Несовместные события**, если в условиях испытания каждый раз возможно появление только одного из них, т.е. никакие два не могут появиться вместе в этом испытании.
- В противном случае события называются **совместными**.

- **д)** **Независимые события** – вероятность события А не зависит от того, произошло ли событие В.
- В противном случае события называются **зависимыми.**

- В ряде случаев вычислить вероятность события оказывается проще, если представить его в виде **комбинации более простых событий.**
- **Этой цели служат некоторые теоремы теории вероятностей.**

Теорема сложения вероятностей

- **Вероятность появления одного (безразлично какого) события из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.**

$$P\ (A \text{ или } B \text{ или } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

- Например, вероятность выпадения четного числа на верхней грани игральной кости:

$$P\ (2 \text{ или } 4 \text{ или } 6) = P\ (2) + P\ (4) + P\ (6) =$$

$$= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2.$$

Теорема умножения вероятностей

- **Вероятность одновременного появления двух или более независимых событий равна произведению их вероятностей.**

$$P\,(A \text{ и } B \text{ и } C) = P\,(A) \cdot P\,(B) \cdot \mathrm{P}(C)$$

- **Пример:** Найти вероятность того, что в семье из трех детей родятся два сына и одна дочь.

- Вероятность рождения мальчика $P\ (A) =$
$=P\ (B) = 0{,}515$; вероятность рождения девочки $P(C) = 0{,}485$.

$$P\ (A \text{ и } B \text{ и } C) = 0{,}515 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485 = 0{,}129.$$

- Если вероятность события *A* меняется в связи с появлением или непоявлением события *B*, то событие *A* называется **зависимым** от события *B*.
- Вероятность события *A*, вычисленная при условии, что имело событие *B*, называется **условной вероятностью** события *A*; обозначение $P(A/B)$.

- **Вероятность появления двух зависимых событий одновременно равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго при условии, что первое событие осуществилось.**

$$P\,(A \text{ и } B) = P\,(A) \cdot P\,(B/A)$$

- Пример: студент пришел на экзамен, зная 40 вопросов из 50. Найти вероятность того, что он ответит на 3 вопроса билета.

- Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос: $P(A) = 40/50 = 4/5$.
- Вероятность того, что он ответит на второй вопрос, вычисленная при условии, что он ответил на первый вопрос, т.е. условная вероятность, равна: $P(B/A) = 39/49$.
- Вероятность того, что студент ответит на третий вопрос, при условии, что он ответил на первые 2 вопроса: $P(C/AxB) = 38/48$.

- Искомая вероятность:

$$P\ (A \times B \times C) = P\ (A) \times P\ (B/A) \times P\ (C/A \times B) =$$
$$= 40/50 \times 39/49 \times 38/48 = 0{,}5.$$

3. Непрерывные и дискретные случайные величины. Распределения дискретных случайных величин, их характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение.

- Науку об измерениях физических величин и способах обеспечения необходимой точности этих измерений называют **метрологией**.
- Под **физической величиной** мы понимаем характеристику материальных объектов и явлений, которая может быть количественно оценена (т.е. измерена).

- Основой для количественной оценки физической величины является **единица измерения** физической величины. Единицы измерения физических величин группируются в **системы единиц**.

- В Международной системе единиц (СИ) основными единицами являются метр (м), килограмм массы (кг), секунда (с), моль (М), ампер (А), кандела (кд), кельвин (К).
- Все остальные единицы являются производными от основных (например, единица скорости (м/с), единица давления (Н/м^2) и т.п.

- Величины, которые в зависимости от стечения случайных обстоятельств могут принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое именно значение, называются **случайными величинами**.
- Случайные величины принято обозначать заглавными буквами «второй половины» латинского алфавита (X, Y, Z), а их возможные значения – строчными буквами, например - x_1, x_2, x_3, …, x_n.

- Случайная величина называется **дискретной**, если совокупность всех ее возможных значений представляет собой конечное или бесконечное, но обязательно **счетное** множество значений.
- Примеры: число букв на странице книги, число волос на голове человека, количество очков, выпадающих при броске игральной кости, число больных на приеме у врача в течение дня и т.п.

- Вероятность того, что дискретная случайная величина X в i-м опыте примет значение x_i, равна $p_i = P(X=x_i)$.
- **Законом (или функцией) распределения** дискретной случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между всеми возможными значениями этой случайной величины (x_i)и соответствующими им вероятностями (p_i).

- Закон или функция распределения могут быть заданы графически, аналитически или в форме таблицы.
- Пример: Имеется 10 студенческих групп, насчитывающих соответственно 12, 10, 11, 8, 12, 9, 10, 8, 10 и 11 студентов. Составить закон распределения случайной величины X, определяемой как число студентов в наугад выбранной группе.

- Возможными значениями рассматриваемой случайной величины являются (в порядке возрастания) 8, 9, 10, 11 и 12.
- Вероятность того, что $x_1 = 8$ (событие A), равна $P(A) = 2/10 = 0{,}2$.
- Вероятность того, что $x_2 = 9$ (событие B), равна $P(B) = 1/10 = 0{,}1$.
- Вероятность того, что $x_3 = 10$ (событие C), равна $P(C) = 3/10 = 0{,}3$.
- Вероятности для x_4 и $x_5 = 0{,}2$.

- Искомый закон распределения имеет вид:

X	8	9	10	11	12
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

- На практике закон распределения дискретной случайной величины часто неизвестен, но для определения особенностей случайной величины используют основные числовые параметры (характеристики), связанные с законом распределения. Это математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

- **Математическим ожиданием** случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений этой величины на вероятности этих значений.

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

- Например, если использовать данные предыдущего примера, то математическое ожидание

$$M(X) = 8 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}2 = 10{,}1.$$

- Основной смысл математического ожидания дискретной случайной величины состоит в том, что оно представляет собой среднее значение данной величины.

- Отдельные значения случайной величины группируются около математического ожидания. Степень рассеивания (разброса) характеризуется **дисперсией**.
- **Дисперсией** называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = = M[(x_i - \mu)^2]$$

- Здесь $\mu = M(X)$ - математическое ожидание случайной величины.

- На практике дисперсию часто удобнее вычислять по формуле:

$$\boldsymbol{D\,(X) = \sigma^2 = M\,(X^{\,2}) - \mu^2}$$

- Например, в том же примере с группами студентов:

- $M(X^2) = 64 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}3 + 121 \cdot 0{,}2 + 144 \cdot 0{,}2 = 103{,}9$.

- Подставляя это значение и найденное ранее значение математического ожидания ($\mu = M(X) = 10{,}1$), получаем

- $D\,(X) = 103{,}9 - 10{,}1 = 1{,}89$

- **Средним квадратическим отклонением** (стандартным отклонением) случайной величины называют корень квадратный из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

- Для нашего примера $\sigma(X) = \approx 1{,}37$.

4. Непрерывные случайные величины, их распределения и характеристики

- Случайная величина, принимающая любые значения в определенном интервале, называется **непрерывной**.
- Примеры: мгновенные значения скорости теплового движения молекул, температура тела человека, плотность воздуха в зависимости от высоты над поверхностью Земли и т.п.

- Так как невозможно перечислить все значения непрерывной случайной величины и указать их вероятности, то промежуток между крайними значениями делят на определенное количество интервалов и определяют вероятность того, что те или иные значения величины попадают в эти интервалы (так называемую **плотность вероятности**).

- Плотность вероятности, или функция распределения вероятностей [$f(x)$], показывает, как изменяется вероятность dP, отнесенная к интервалу dx некоторой величины, в зависимости от значений самой этой величины.

$$f(x) = dP/dx$$

- Вероятность того, что случайная величина принимает какое-либо значение в интервале (a,b):

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x)dx$$

- Условие нормирования непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

- Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины рассчитываются по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 f(x) dx$$

Примеры распределений непрерывных случайных величин: Нормальный закон распределения

- Нормальный закон распределения (закон Гаусса):

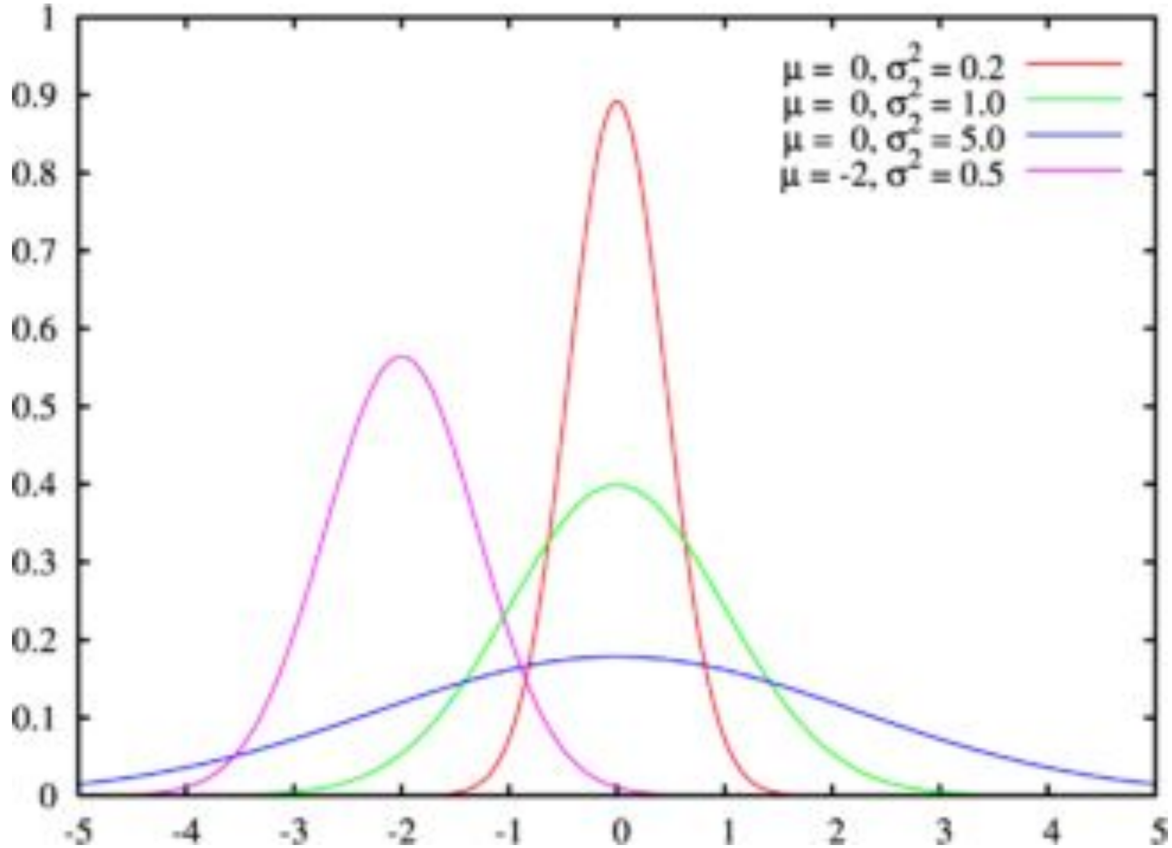
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

- Здесь:

$a = M(x)$ – математическое ожидание случайной величины,

σ – среднее квадратическое отклонение (соответственно, σ^2 -дисперсия случайной величины), e – основание натурального логарифма.

Графически нормальное распределение имеет вид:



- Кривая имеет колоколообразную форму, симметричную относительно точки $x = a$. Величина $f(X)$ в этой точке определяется формулой:

$$f(x)_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

- При изменении параметра a форма нормальной кривой не изменяется, график сдвигается влево или вправо.
- При изменении параметра σ форма нормальной кривой изменяется. Если этот параметр увеличивается, то максимальное значение функции $f(x)$ убывает, и наоборот. С увеличением параметра σ кривая растягивается вдоль оси OX.

- Важное значение нормального распределения во многих областях науки, например, в математической статистике и статистической физике, вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей.

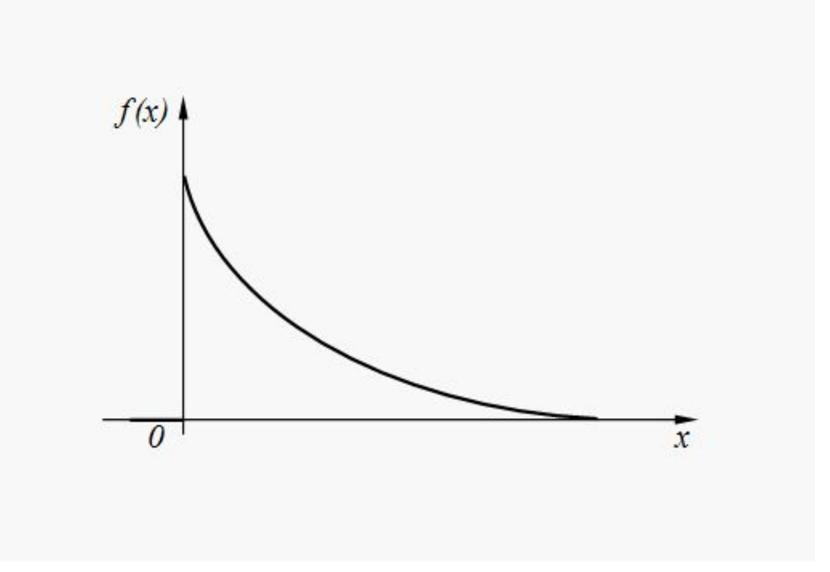
- Если результат наблюдения является суммой многих случайных слабо взаимозависимых величин, каждая из которых вносит малый вклад относительно общей суммы, то при увеличении числа слагаемых распределение центрированного и нормированного результата стремится к нормальному.

- Этот закон теории вероятностей имеет следствием широкое распространение нормального распределения, что и стало одной из причин его наименования.

- Непрерывная случайная величина X, функция плотности вероятности которой задается выражением

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \bullet e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$$

называется случайной величиной, имеющей **показательное**, или **экспоненциальное**, распределение.


f(x)
0
x

- Как видно из формулы, показательное распределение определяется только одним параметром λ. В этом его преимущество, так как обычно параметры распределения заранее неизвестны, и их приходится оценивать приближенно. Понятно, что оценить один параметр проще, чем несколько.