ВОЕННО–МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени С.М. Кирова
Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 2

по дисциплине «Математика»

на тему: «Производные функций. Правила дифференцирования. Дифференциал функции»

для курсантов I курса по военной специальности «Фармация»

1. Понятие производной. Правила дифференцирования. Производные от основных элементарных функций.

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке, и пусть x_0 - некоторая точка этого промежутка. Пусть Δx - приращение к значению аргумента такое, что $(x_0 + \Delta x)$ не выходит за пределы упомянутого промежутка, а $\Delta y =$
$= f(x_0 + \Delta x) — f(x_0)$ — соответствующее приращение функции.

- **Определение.** Если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,
- то этот предел называется производной от функции *y = f(x)* по переменной *x* в точке x_0 (обозначения: $\dfrac{dy}{dx}$ и y'_x). Итак:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Если этот предел конечен, то производная называется конечной, если же этот предел бесконечен, то y'_x — бесконечная производная.
- Если конечная производная существует в каждой точке некоторого множества, то она оказывается функцией от x , заданной на этом множестве.

- **Пример.** Найдем производную $y = x^2$ на основании определения производной.
- **Решение.**

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2.$$

- Тогда:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

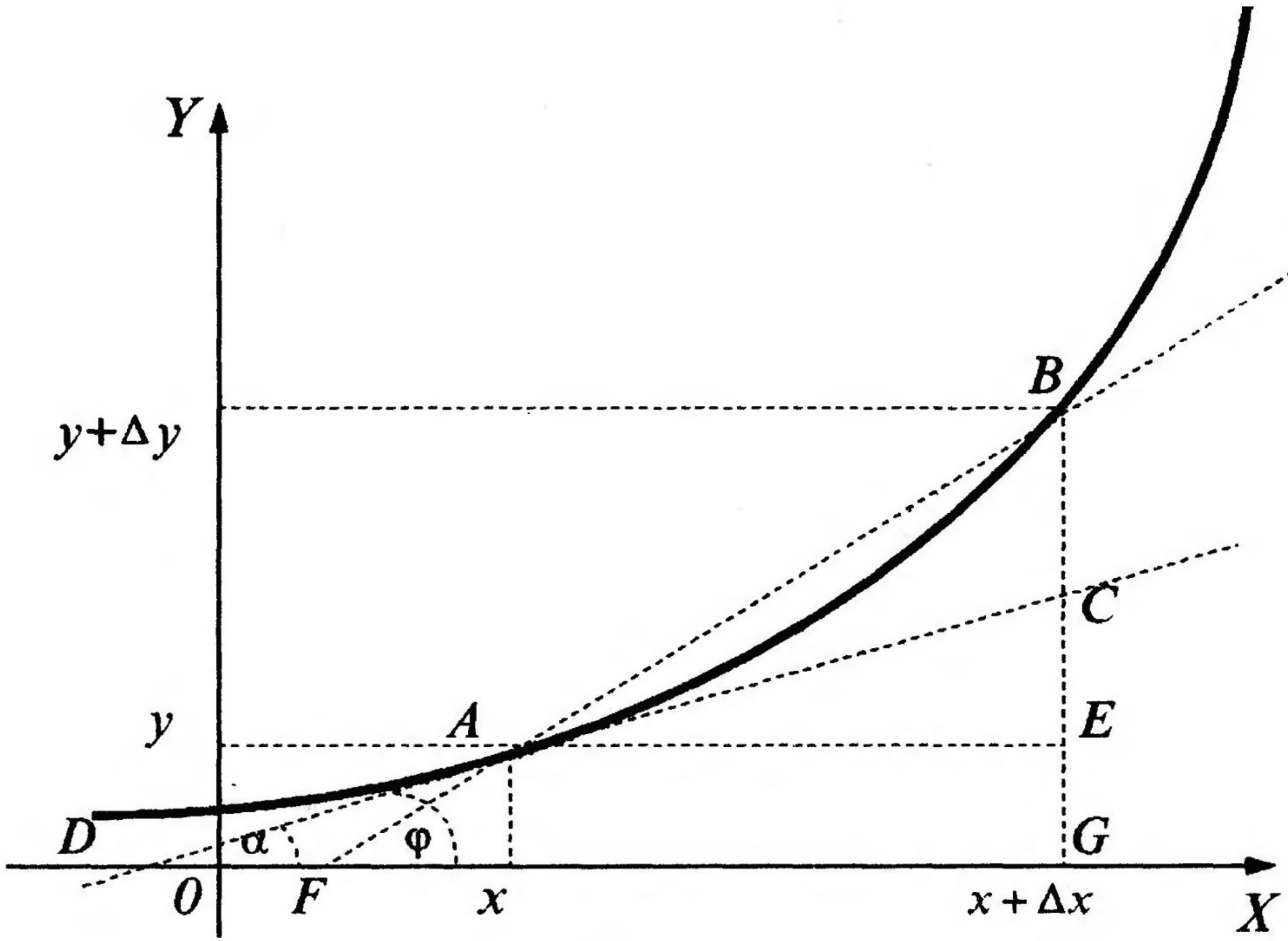
Геометрический и физический смысл производной

- **Физический смысл** - производная функции отражает **скорость** изменения функции при изменении ее аргумента.
- Например, если $x = f(t)$ есть уравнение прямолинейного движения точки, то производная dx/dt представляет собой мгновенную скорость точки в момент времени t.

- Скорость (быстрота) протекания физических, химических, биологических процессов, например скорость охлаждения тела, скорость химической реакции и т.п., также выражается при помощи производной.
- Например, скорость охлаждения тела равна производной температуры тела по времени: $\frac{dT}{dt}$
- Скорость химической реакции есть производная массы образующегося вещества по времени: $\frac{dm}{dt}$.

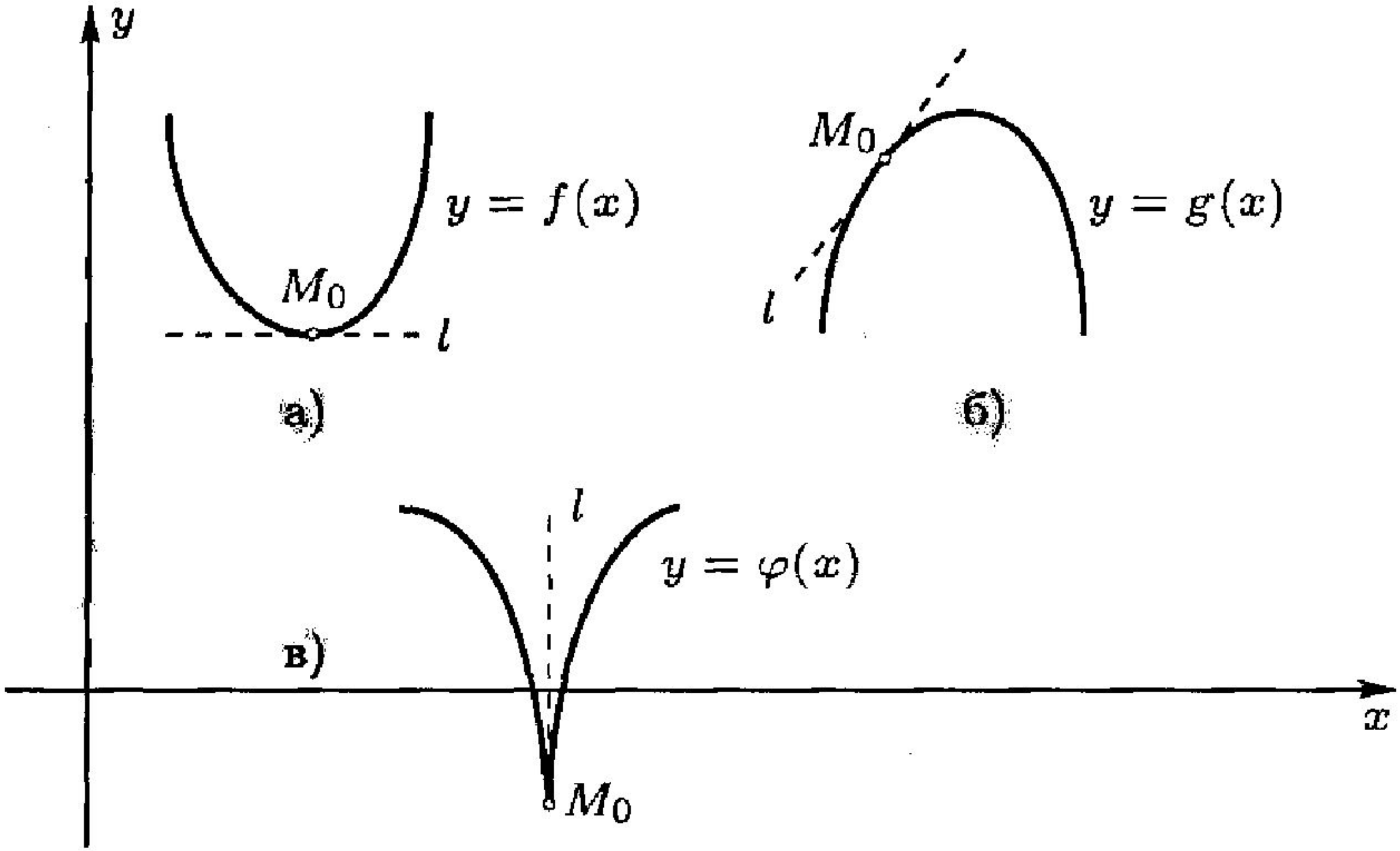
  и т.д.

- **Геометрический смысл:**
- Производная функции $y = f(x)$ геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x (тангенс угла наклона касательной к оси $0X$).



Y
B
y+Δy
C
y
A
E
D
α
φ
G
0
F
x
x + Δx
X

- При этом если существует касательная, то существует и производная, и наоборот. Случаю касательной, не параллельной оси OY, отвечает конечная производная, параллельной оси OY – бесконечная производная.



y
M_0
$y = f(x)$
l
а)
M_0
$y = g(x)$
l
б)
l
$y = \varphi(x)$
в)
x
M_0

Дифференцируемость функции в точке

- **Определение:** Если приращение функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в форме

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

- где A не зависит от Δx и α – бесконечно малое в точке x, то эта функция называется дифференцируемой в точке x.

- Из последнего равенства следует, что

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \alpha$$

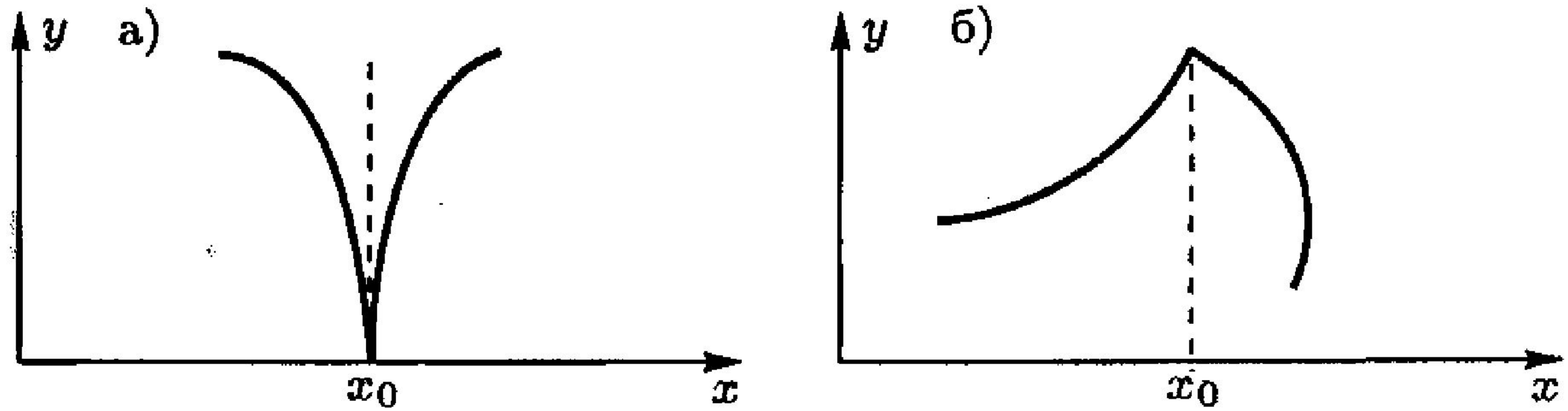
- Перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \alpha\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$$

- Итак, если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то приращение этой функции можно представить в виде $$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$
  где α – бесконечно малое в точке x.
- Отсюда следует, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она обладает в этой точке конечной производной.
- Можно показать, что справедливо и обратное утверждение.

Связь дифференцируемости и непрерывности

- **Теорема 1** (необходимое условие дифференцируемости):
- Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в ней.
- Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности не следует дифференцируемость. Рассмотрим две функции:



Эти функции непрерывны, но не имеют производной в точке x_0:
а) бесконечная производная; б) производной нет.

Правила дифференцирования:

- 1. Производная от постоянной величины равна нулю, т.е. если $y = C$, то $y' = 0$:
- **Доказательство.** По определению производной $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Очевидно, что $\Delta y = 0$, следовательно $\Delta y / \Delta x = 0$; $y' = 0$.

- 2. Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых:
  $(u + v + w + \ldots)' = u' + v' + w' + \ldots$
- **Доказательство.** Очевидно,
  $\Delta(u + v + w + \ldots) = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \ldots$
  Остается поделить обе части этого равенства на Δx, перейти к пределу при
  $\Delta x \to 0$ и воспользоваться тем, что предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых.

- 3. Производная произведения двух функций определяется формулой:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

- 4. Производная частного от деления двух функций определяется формулой:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Производные от основных элементарных функций:

1.	$(C)' = 0$, где $C = const$.
2.	$(x)' = 1$.
3.	$(x^n)' = nx^{n-1}$.
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$, при $a > 0$ и $a \neq 1$.
4а.	$(e^x)' = e^x$.
5.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, при $a > 0$ и $a \neq 1$.
5а.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6.	$(\sin x)' = \cos x$.

7. $(\cos x)' = -\sin x$.
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Дифференцирование сложной функции.

- Рассмотрим сложную функцию с одним промежуточным аргументом: $y=f(u), u=\varphi(x)$, предполагая при этом, что функция y дифференцируема по аргументу u, а функция u дифференцируема по аргументу x. Требуется вывести правило дифференцирования этой сложной функции.

- На основании определения производной имеем

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{u}} . \frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \mathrm{u}}{\Delta x}$$

так как предел равен произведению пределов.

- Если учесть, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$$

поскольку всякая дифференцируемая функция непрерывна, то получим, что

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- или, в других обозначениях,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

- Пример.
- Найти y', если: $y = \sin^3 5x$.
- Производную этой сложной функции будем находить по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$
- Тогда $(\sin^3 5x)' = 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5.$

Производная обратной функции.

- Предположим, что функция $y = f(x)$ определена, монотонна и дифференцируема в некоторой области, причем производная dy/dx нигде не равна нулю.
- Наша функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, и нам надо получить правило дифференцирования этой функции.

- Для вывода можно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции с одним промежуточным аргументом.
- Согласно представлениям о сложной функции функцию *y* можно рассматривать как сложную функцию от самой себя с промежуточным аргументом *x:*

$$y = f(x),\ x = \varphi(y).$$

- На основании правила дифференцирования сложной функции получаем: $$y'_y = y'_x \cdot x'_y$$

- Поскольку $y'_y = 1$, получаем правило дифференцирования обратной функции:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

3. Дифференциал функции: определение, геометрический смысл.

- **Определение.** Дифференциалом функции называется произведение производной этой функции на приращение ее аргумента:

$$dy = y'(x) \cdot \Delta x$$

- Как видно из определения, дифференциал функции существует лишь для дифференцируемых функций, то есть функций, имеющих производную.
- Дифференциал функции прямо пропорционален приращению аргумента Δx (линеен относительно приращения аргумента функции).

Связь между дифференциалом функции и приращением функции:

- Рассмотрим следующий пример:
- Найдем приращение Δy функции $y = x^2$ и дифференциал этой функции:
- $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$
- $dy = 2x\Delta x$
- Из сравнения этих выражений видно, что приращение функции отличается от дифференциала функции на величину квадрата приращения аргумента $(\Delta x)^2$.

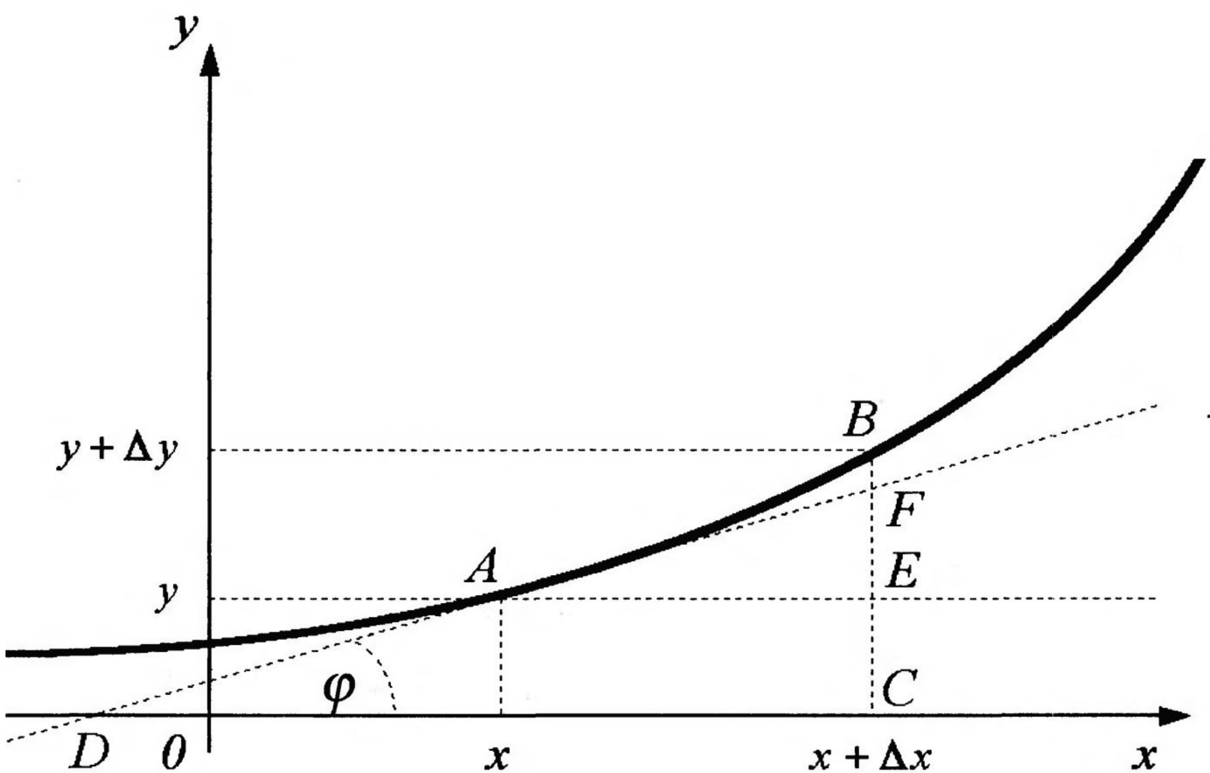
- Рассмотрим малые приращения аргумента. Например, пусть при $x = 1$ приращение аргумента равно 0,01. В этом случае первое слагаемое в приращении функции (равное величине дифференциала) составит 0,02, а второе слагаемое – всего 0,0001, т.е. в 200 раз меньше.

- Таким образом, дифференциал функции, в общем случае отличаясь от приращения функции, представляет собой главную часть этого приращения, линейную относительно приращения аргумента. В этом заключается **аналитический смысл** дифференциала.

- При достаточно малых приращениях аргумента величина приращения функции приближенно равна дифференциалу этой функции: $\Delta y \approx dy$, причем погрешность этого приближенного равенства тем меньше, чем меньше приращение Δx аргумента.

Геометрический смысл дифференциала.

- Рассмотрим график функции $y = f(x)$.



- Пусть через точку $A\ (x,y)$, лежащую на кривой графика функции, проведена касательная DF, образующая угол $FDC = \varphi$ с положительным направлением оси $0X$. Пусть точка $B\ (x + \Delta x;\ y + \Delta y)$ также принадлежит данной кривой. Точка F лежит на пересечении линии BC, параллельной оси $0Y$, и касательной DF.

- Поскольку углы FAE и FDC равны как соответственные при пересечении параллельных прямых AE и DC прямой DF, то угол FAE прямоугольного треугольника AFE также равен φ. Из этого треугольника для катета FE получаем:

$$FE = AE \cdot \mathrm{tg}\varphi.$$

- Учитывая, что катет $AE = \Delta x$, а из геометрического смысла производной следует, что $\mathrm{tg}\varphi = y'$, то из этого равенства имеем:
- $FE = y' \cdot \Delta x = dy.$
- Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, при переходе из данной точки в точку с абсциссой $x + \Delta x$.

Дифференциал аргумента функции

- Рассмотрим функцию, равную своему аргументу: $y = x$.
- Тогда дифференциал функции равен дифференциалу аргумента:

$$dy = y' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

- Таким образом, дифференциал аргумента равен приращению аргумента.

- Формулу дифференциала функции можно записать в виде:

$$dy = y'dy,$$

- а формулу производной – в виде: $y' = \frac{dy}{dx}$

- Таким образом, производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента.