ВОЕННО–МЕДИЦИНСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени С.М. Кирова
Кафедра биологической и медицинской физики

ЛЕКЦИЯ № 3

по дисциплине «Математика»
на тему: «Неопределенный интеграл»

для курсантов I курса по военной специальности «Фармация»

1. Понятие неопределенного интеграла

- При изучении дифференциального исчисления рассматривалась задача нахождения производной или дифференциала по заданной функции ***y=F(x)***, то есть нужно было найти *f(x)=F'(x)* или *dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx*.
- Можно поставить обратную задачу: восстановить продифференцированную функцию, т.е., зная производную *f(x)* или дифференциал *f(x)dx*, найти такую функцию ***F(x)***, чтобы *F'(x) = f(x)*.

- Например, известна скорость перемещения точки *v(t)*, а найти нужно закон ее перемещения: *S(t)*.
- Эта задача является более трудной, чем задача дифференцирования. Для решения подобных задач вводятся новые понятия и действия.

- **Определение: Дифференцируемая функция** ***F(x)*** называется **первообразной** для функции ***f(x)*** на интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$ на интервале (a,b).
- Например, для $f(x)=x^2$ первообразная

  $F(x) = x^3/3$, так как $F'(x)=(x^3/3)'=x^2$.
- Для $f(x)=\cos x$ первообразной будет

  $F(x)=\sin x$, так как $F'(x)=(\sin x)'=\cos x$.

- Первообразная для заданной функции $f(x)$ существует только, если эта функция непрерывна на (a,b).
- Кроме того, первообразных – множество, и отличаются они только постоянным слагаемым.
- Действительно, $sinx+2$, $sinx-2$, $sinx+C$ – все эти функции будут являться первообразными для функции $f(x) = cosx$.

- **Определение: Выражение *F(x)+C***, где ***C*** - произвольная постоянная величина, определяющее множество первообразных для функции *f*(*x*) называется **неопределенным интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$

т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$

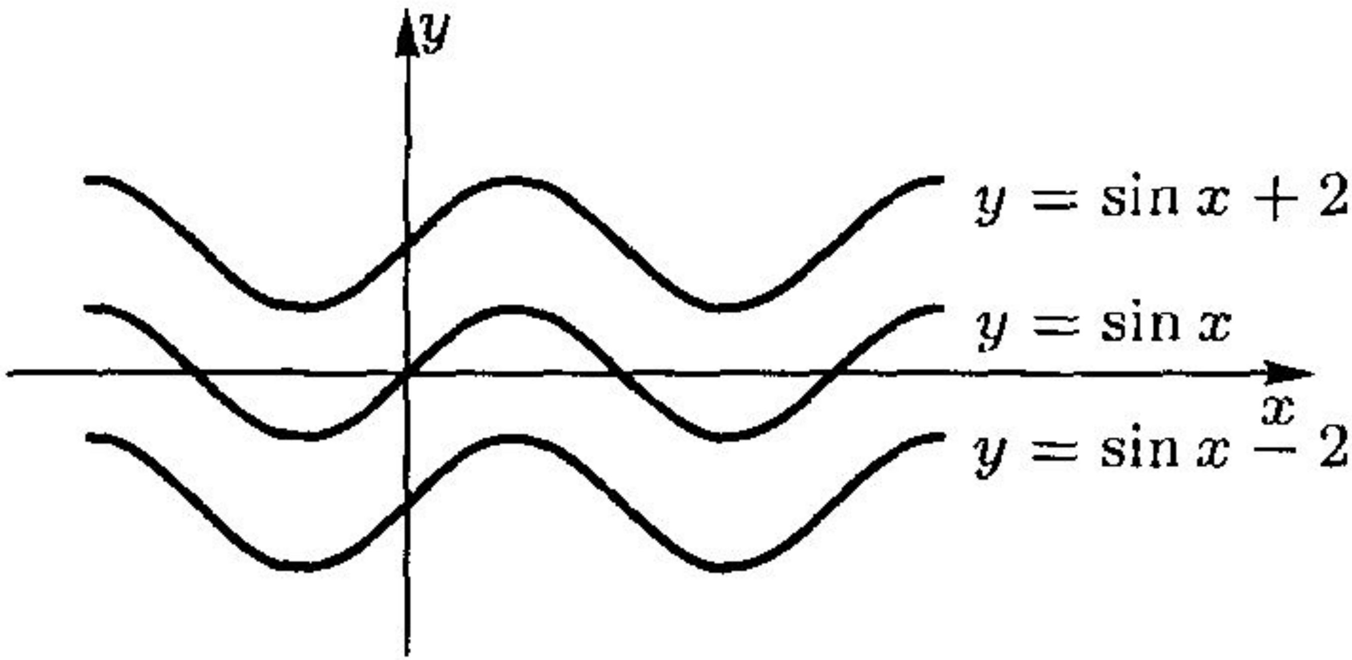
- Знак $\int$ - знак неопределенного интеграла;
- $f(x)dx$ – подынтегральное выражение;
- $f(x)$ – подынтегральная функция.

- **Определение:** Операция нахождения первообразной по заданной производной или дифференциалу называется **интегрированием**.
- Интегрирование – действие, обратное дифференцированию.
- Его можно проверить дифференцированием, причем дифференцирование однозначно, а интегрирование дает ответ с точностью до постоянной.

- Придавая постоянной величине C различные значения C_1, C_2, C_3, получим различные функции $y_1(x)=F(x)+C_1$, $y_2(x)=F(x)+C_2$, $y_3(x)=F(x)+C_3$, каждая из которых задает на координатной плоскости кривую, называемую интегральной.
- Все графики интегральных кривых сдвинуты друг относительно друга вдоль оси OY.

- Следовательно, геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых.

Пример семейства интегральных кривых



- Чтобы находить первообразные, необходимо составить и выучить наизусть таблицу неопределенных интегралов от основных элементарных функций.
- Она получается в результате обращения соответствующих формул дифференцирования.
- Например, если $(\sin x)' = \cos x$, то $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1.	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $(n \neq -1)$
2.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3.	$\int e^x\,dx = e^x + C$
4.	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ $a \neq 1, a > 0$

5.	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6.	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9* $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
10* $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12* $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

13.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
14.*	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15.*	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$
16.*	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln \left\| x + \sqrt{x^2+m} \right\| + C$

2. Свойства неопределенных интегралов

- 1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x).$$

- 2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\,(F(x) + C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

- 3) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Пример 1. $\int dx = x + C.$

Пример 2. $\int d(e^x) = e^x + C.$

- 4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx = k\,(F(x) + C)$$

Пример 3. $\displaystyle\int \frac{5dx}{x} = 5\int \frac{dx}{x} = 5\ln|x| + C.$

- 5) Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx$$

Пример 4.

$$\int \left(3x^2 + \frac{\sin x}{2}\right) dx = \int 3x^2\, dx + \int \frac{\sin x}{2}\, dx = 3\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

- Формула интегрирования остается справедливой, если переменная интегрирования является функцией:

  если

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную. Это свойство называется инвариантностью.

3. Непосредственное интегрирование

- Этот метод заключается в прямом использовании табличных интегралов и свойств.

Примеры.

1. $\int \left(6x^5 + \frac{\sin x}{2} - 10\right) dx = 6\int x^5\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x\, dx -$

$- 10\int dx = 6\frac{x^6}{6} - \frac{1}{2}\cos x - 10x + C = x^6 - \frac{1}{2}\cos x - 10x + C.$

2. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{1}{4x} + e^2 \right) dx = 3 \operatorname{tg} x - \frac{1}{4} \ln |x| + e^2 x + C.$

3. $\int (\sin^2 x + 1) \; d(\sin x) =$

$$= \int \sin^2 x d(\sin x) + \int d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + \sin x + C.$$

Метод разложения

- Этот метод заключается в разложении подынтегральной функции в линейную комбинацию более простых функций с использованием известных формул.

Примеры.

1. $$\int \left(\frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^2} \right) dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

3. $$\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1 - \cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

3. Основные методы интегрирования

- Таких методов два:
- а) метод замены переменной;
- б) интегрирование по частям.

Метод замены переменной

- Метод основан на замене переменной в неопределенном интеграле с целью свести его нахождение к нахождению такого неопределенного интеграла, который может быть найден методом разложения.
- Другими словами, необходимо получить:

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy, \text{ где } y = \varphi(x)$$

- Пример: Найти неопределенный интеграл: $\int \cos 2x dx$
- Этот интеграл не является табличным.
- Произведем замену: $y = 2x$
- Тогда $dy=(y)'dx=2dx$
- $dx = dy/2$
- Соответственно:

$$\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos y\, dy = \frac{1}{2}\sin y + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Интегрирование по частям

- Дифференциал произведения двух функций определяется формулой:

$$d(u \cdot v) = udv + vdu$$

Интегрируя это равенство, получаем:

$$u \cdot v = \int udv + \int vdu$$

Отсюда:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

Это и есть формула **интегрирования по частям.**

- Применение этого метода требует субъективного представления подынтегрального выражения в виде udv, причем интеграл $\int vdu$ не должен быть труднее, чем интеграл $\int udv$.

Примеры.
1) Интегралы вида

$$\int P(x)e^{kx}\,dx, \quad \int P(x)\sin kx\,dx, \quad \int P(x)\cos kx\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, k — константа вычисляются по частям, обозначив $u = P(x)$, а dv — все остальные сомножители.

1. $\int xe^{3x}\,dx = \left| u = x; dv = e^{3x}\,dx; du = dx; v = \frac{1}{3}e^{3x} \right| =$

$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)e^{3x} + C.$$

2) Интегралы типа

$$\int P(x)\arcsin x\,dx,\quad \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\quad \int P(x)\ln x\,dx.$$

Здесь положим $dv = P(x)\,dx$, а u — другие сомножители.

$$\textbf{2.}\ \int x^2 \ln x\,dx = \left| u = \ln x;\, dv = x^2\,dx;\, du = \frac{1}{x}\,dx; \right.$$

$$\left. v = \frac{1}{3}x^3 \right| = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$$

3. $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \left| u = \operatorname{arctg} x;\, dv = x\, dx;\, du = \frac{dx}{1+x^2};\right.$

$$\left. v = \frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2-1)}{(1+x^2)}\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + C.$$

$$\mathbf{4.}\ \int \arcsin x\,dx = \left| u = \arcsin x;\ dv = dx;\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\right.$$

$$\left. v = x \right| = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

- Любой результат можно проверить дифференцированием.
- Например, в последнем случае:

$$(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \arcsin x.$$

3) Интегралы вида

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

где a, b — const. За u можно взять e^{ax}, $\sin bx$ или $\cos bx$.

5. $\int e^x \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x;\, dv = e^x\,dx; \\ du = \cos x\,dx;\, v = e^x \end{matrix} \right| =$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x;\, dv = e^x\,dx; \\ du = -\sin x\,dx;\, v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Отсюда получаем, что

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)/2 + C.$$