Тема 2. Численные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным

Определение нелинейного уравнения

В общем виде нелинейное уравнение с одним неизвестным можно записать в виде

$$Y(x) = 0, \tag{1}$$

где x - действительное число,

а *Y(x)* - нелинейная функция.

Типы нелинейных уравнений:

а) **Алгебраическими** называются уравнения *Y(x)=0,* которые могут быть представлены в форме канонического полинома:

$$Y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$$

где x – аргумент функции $Y(x)$,

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – коэффициенты уравнения .

б) **Трансцендентными (*"<u>конечными</u>")*** называются уравнения неприводимые к виду алгебраических, в которых функция $Y(x)$ содержит тригонометрические, показательные, логарифмические и другие функции, **не являющиеся алгебраическими.**

Примеры трансцендентных уравнений:

$$5 \cdot sin(x) + 0{,}8 = 0;$$

$$3^x - tg(2x) = 0;$$

$$lg(x+3) = sin(x)$$

Решением или **корнем** уравнения

$$Y(x)=0 \qquad (1)$$

называется **значения аргумента *x*,**

обращающее равенство (1) в тождество.

Методы решения нелинейных уравнений

1. **Аналитические (прямые, точные) методы решения:**

   Методы, позволяющие записать решение уравнения в виде некоторого соотношения (формулы).

   Значения **аналитических** решений вычисляются за конечное число арифметических операций.

2. **Итерационные методы** позволяют получить приближенные значения корней **с** любой **заданной точностью**.

   Число операций, необходимых для этого, не может быть определено заранее.

Алгебраические уравнения

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \qquad (2)$$

Аналитические решения могут быть получены для алгебраических уравнений не выше четвертой степени и для некоторых видов трансцендентных уравнений

Алгебраические уравнения, имеющие аналитические решения:

линейные уравнения: $a*x+b=0$ (или $a_0 + a_1*x = 0$);

квадратные уравнения: $a*x^2+b*x + c=0$ (или $a_0 + a_1*x + a_2*x^2= 0$);

кубичные уравнения: $a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + a_3*x^3 = 0$;

уравнения четвертой степени: $a_0 +a_1x + a_2*x^2 + a_3*x^3 + a_4*x^4 = 0$.

<u>Итерационные</u> <u>методы</u> – методы **последовательных приближений**, реализуют алгоритмы, обеспечивающие нахождение решения за несколько последовательно выполняемых шагов - **итераций**.

Число шагов итерации заранее не известно.

На каждом шаге итеративного процесса точность решения увеличивается.

Решение нелинейных уравнений численными методами обычно осуществляется в **два этапа**:

1 этап – отделение (локализация) корней :

a. **анализ функции** - определение интервала (ов) допустимых изменений значений аргумента $\boldsymbol{X}$ функции ($\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{X_k}$);

b. выделение на определённом(ых) в анализе интервале(ах) изменения аргумента [$\boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{X_k}$] подынтервалов [$x_i$,$x_j$], содержащих по одному корню.

2 этап - уточнение корня на выбранном промежутке [x_i,x_j], содержащем один корень.

Признак нахождения корня в интервале [a; b]

$$Y(a)*Y(b) <= 0 \qquad (3)$$

Обычно решение считается найденным, если

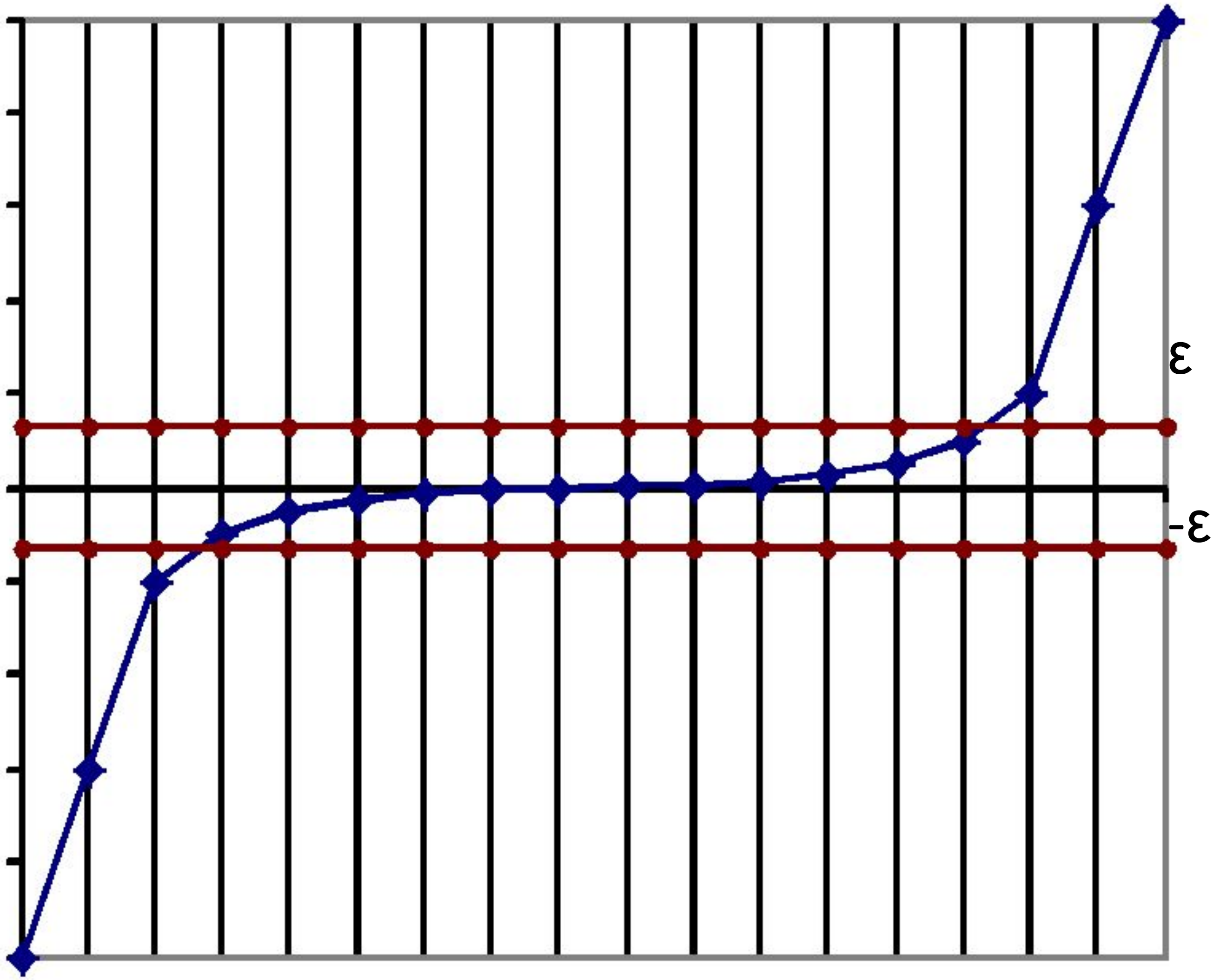
$$|\ Y(x_i)\ | \le \varepsilon\ , \qquad (4)$$

либо, если

$$|(x_{i+1} - x_i)| \le \delta, \qquad (5)$$

где ε и δ - некоторые положительные вещественные константы

X	F(X)	+eps	-eps
0,1	-0,5000000	0,065	-0,065
0,2	-0,3000000	0,065	-0,065
0,3	-0,1000000	0,065	-0,065
0,4ε	-0,0500000	0,065	-0,065
0,5	-0,0250000	0,065	-0,065
0,6	-0,0125000	0,065	-0,065
0,7	-0,0062500	0,065	-0,065
0,8	-0,0003125	0,065	-0,065
0,9	-0,0001550	0,065	-0,065
1	0,0001550	0,065	-0,065
1,1	0,0003125	0,065	-0,065
1,2	0,0062500	0,065	-0,065
1,3	0,0125000	0,065	-0,065
1,4	0,0250000	0,065	-0,065
1,5	0,0500000	0,065	-0,065
1,6	0,1000000	0,065	-0,065
1,7	0,3000000	0,065	-0,065
1,8	0,5000000	0,065	-0,065



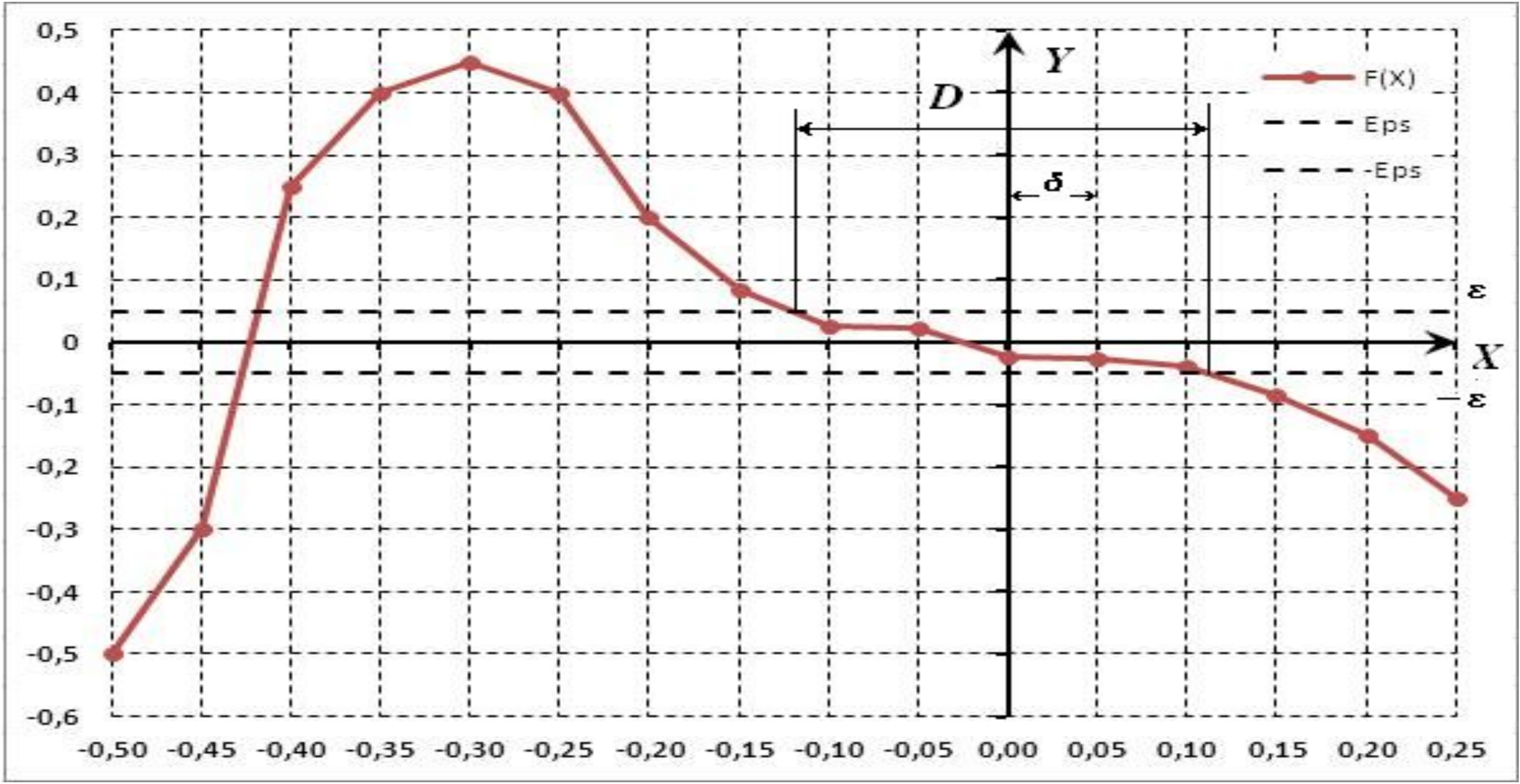
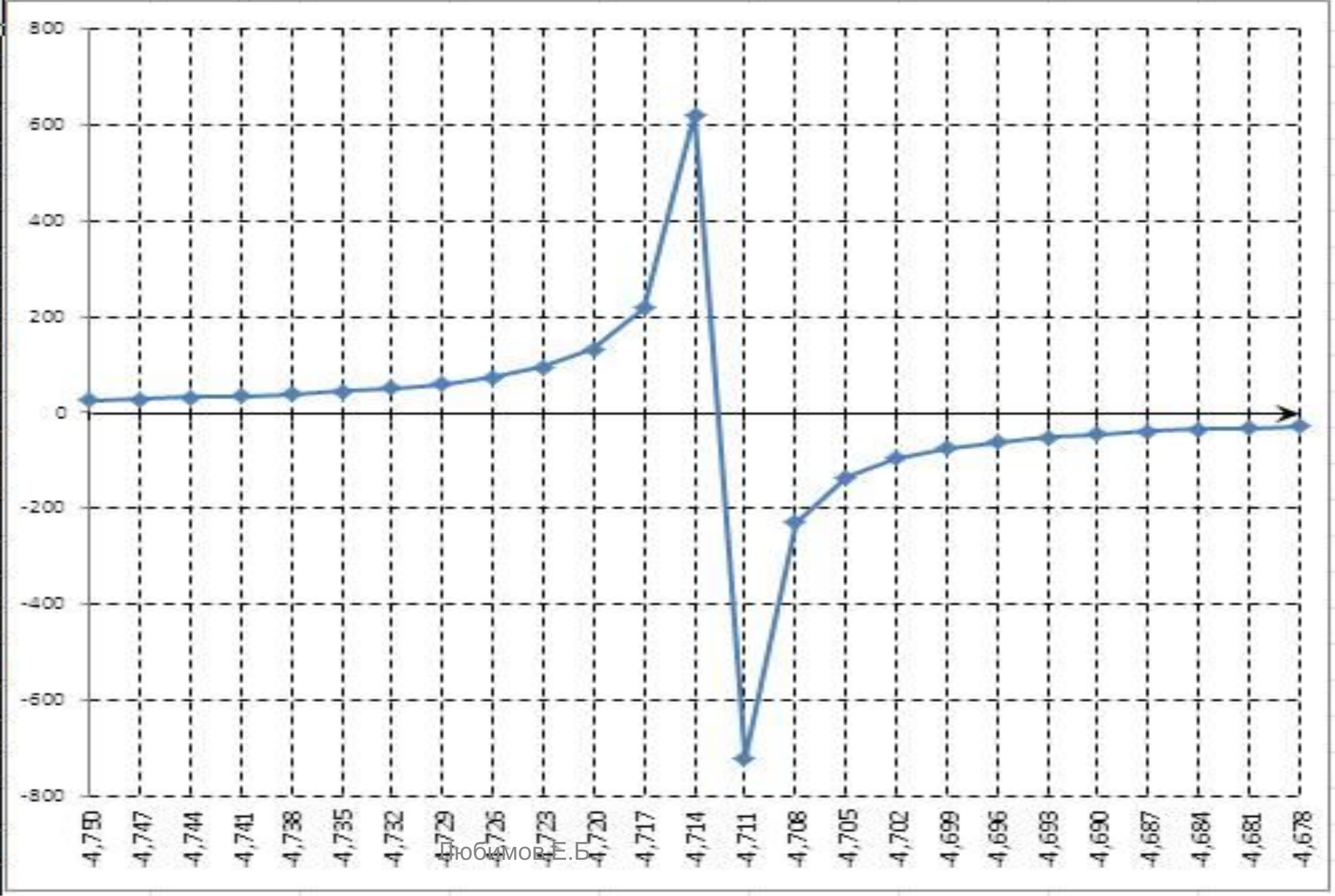


График исследуемой функции

График функции с точкой разрыва

B2 f_x =TAN(A2)

	A	B	C	D
1	*X*	*F(X)*	dX=	0,003
2	-4,75	26,57541		
3	-4,747	28,88099		
4	-4,744	31,624		
5	-4,741	34,94203		
6	-4,738	39,03716		
7	-4,735	44,21869		
8	-4,732	50,9852		
9	-4,729	60,19546		
10	-4,726	73,46534		
11	-4,723	94,23811		
12	-4,72	131,3859		
13	-4,717	216,8702		
14	-4,714	620,7244		
15	-4,711	-719,952		
16	-4,708	-227,842		
17	-4,705	-135,334		
18	-4,702	-96,2524		
19	-4,699	-74,6838		
20	-4,696	-61,0111		
21	-4,693	-51,5692		
22	-4,69	-44,6574		
23	-4,687	-39,3787		
24	-4,684	-35,2155		
25	-4,681	-31,8479		
26	-4,678	-29,0676		



Пример. Выполнить предварительный анализ функции

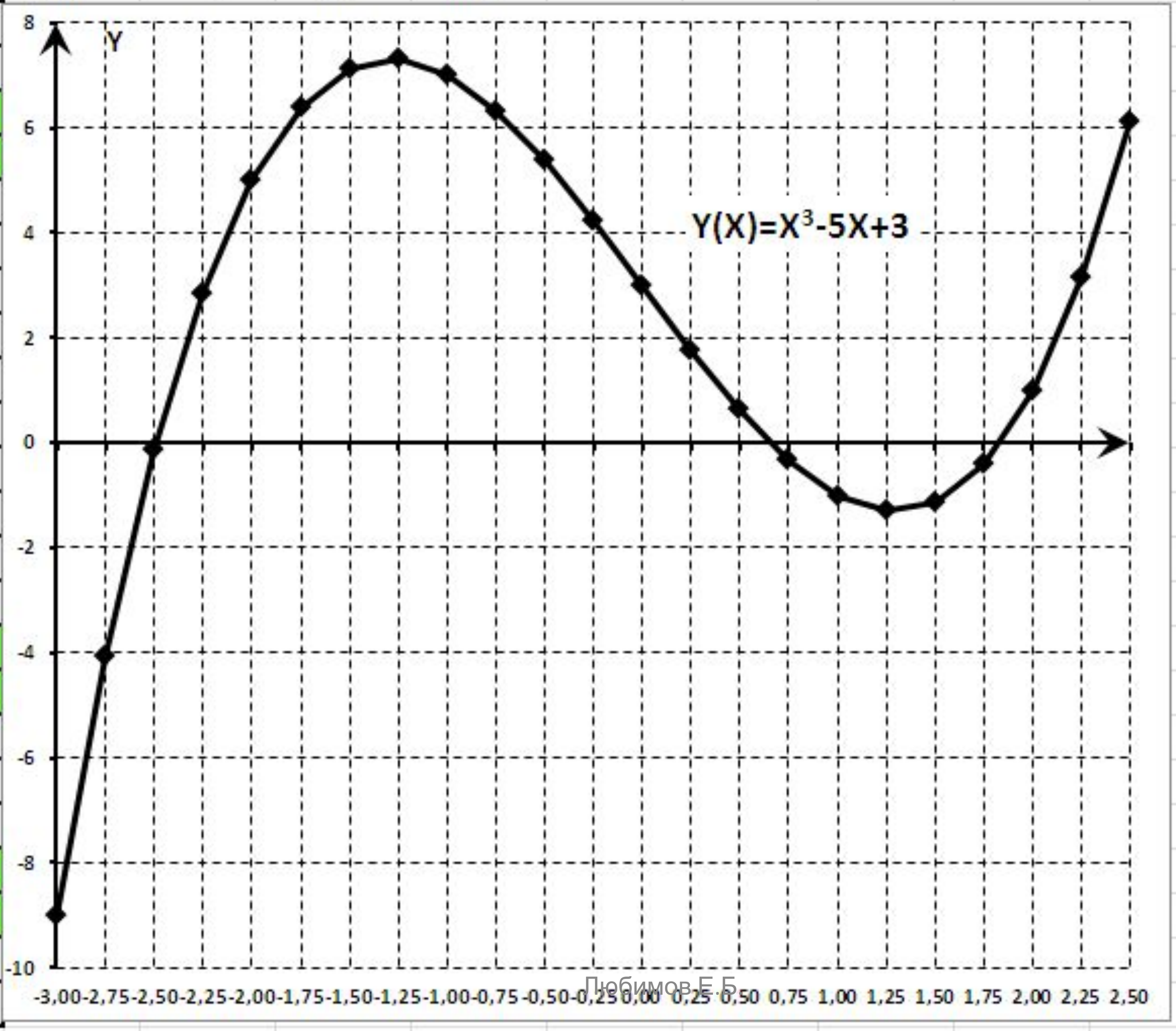
$$Y(x) = x^3 - 5x + 3$$

1а) интервал допустимых изменений аргумента x Є [-∞; +∞];

1б) В интервале изменения функции Y(x) могут находиться один или три вещественных корня.

X	F(X)
-3,00	-9,0000
-2,75	-4,0469
-2,50	-0,1250
-2,25	2,8594
-2,00	5,0000
-1,75	6,3906
-1,50	7,1250
-1,25	7,2969
-1,00	7,0000
-0,75	6,3281
-0,50	5,3750
-0,25	4,2344
0,00	3,0000
0,25	1,7656
0,50	0,6250
0,75	-0,3281
1,00	-1,0000
1,25	-1,2969
1,50	-1,1250
1,75	-0,3906
2,00	1,0000
2,25	3,1406
2,50	6,1250

X0=	-3	dX=	0,25



1. Область допустимых значений аргумента X(-∞;+∞);

1-й корень Є(-2,5; -2,25);

Y(-2,5) = -0,1250; Y(-2,25) = 2,8594

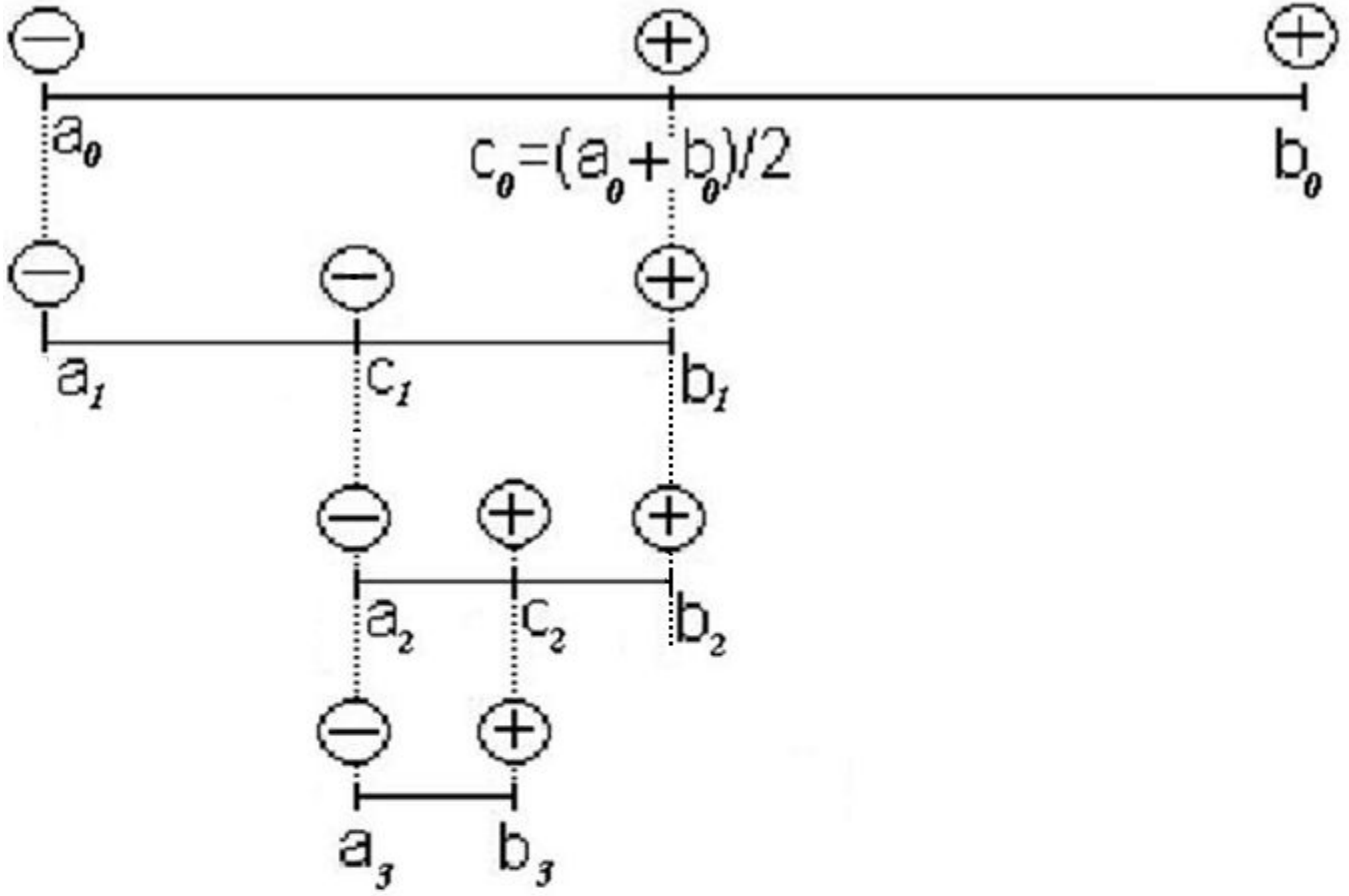
2-й корень Є(0,5;0,75);

Y(0,5) = 0,6250; Y(0,75) = -0,3281

3-й корень Є(1,75; 2,00);

Y(1,75) = -0,3906; Y(2,00) =1,0000

Начальный интервал нахождения корня [a_0;b_0]:



Алгоритм метода дихотомии (деление пополам)

Реализация метода дихотомии в среде MS Excel

Уточнение 2-го корня уравнения F(x)=X3-5X+3 методом дихотомии

заголовок таблицы: $a_0=0{,}5;\ b_0=0{,}75;\ \varepsilon = \delta = 0{,}001$

Формирование заголовка и первой строки таблицы (столбцы от А до F)

	A	B	C	D	E	F
2	a=	0,5	b=	0,75	ε = δ =	0,001
3	a	b	x_{cp}	F(a)	F(b)	$F(x_{cp})$
4	=B2	=D2	=(A4+B4)/2	=A4^3-5*A4+3	=B4^3-5*B4+3	=C4^3-5*C4+3

Ссылки на ячейки со значениями параметров a_0 и b_0

Формулы для вычисления значений Xср, F(a), F(b) и F(Xср)

19

	A	B	C	D	E	F
1	*Уточнение 2-го корня уравнения $F(x)=X^3-5X+3$ методом дихотомии*					
2	a=	0,5	b=	0,75	$\varepsilon = \delta =$	0,001
3	a	b	x_{cp}	F(a)	F(b)	$F(x_{cp})$
4	=B2	=D2	=(A4+B4)/2	=A4^3-5*A4+3	=B4^3-5*B4+3	=C4^3-5*C4+3
5	=ЕСЛИ($D4*$F4>0;$C4;$A4)	=ЕСЛИ($D4*$F4<0;$C4;$B4)	=(A5+B5)/2	=A5^3-5*A5+3	=B5^3-5*B5+3	=C5^3-5*C5+3

- Формулы изменения граничных значений a_i и b_i по правилу метода дихотомии

Заголовок, первая и вторая строки таблицы (столбцы от F до J)

	F	G	H	I	J
1	*Уточнение 2-го корня уравнения $F(x)=X^3$-5X+3 методом дихотомии*				.
2	0,001				
3	*$F(x_{cp})$*	*d=abs(b-a)*	*Условие*	*результат*	*N итерации*
4	=C4^3-5*C4+3	=ABS(B4-A4)	=И(G4<$F$2;ABS(F4<=$F$2))	=ЕСЛИ(H4;"корень ="&ТЕКСТ(C4;"0,00000");"*")	1
5	=C5^3-5*C5+3	=ABS(B5-A5)	=И(G5<$F$2;ABS(F5<=$F$2))	=ЕСЛИ(H5;"корень ="&ТЕКСТ(C5;"0,00000");"*")	2

d - длина интервала неопределённости

$(d<\varepsilon)\cap(|F(Xcp)|<=\delta$

Вывод сообщения о результате выполнения очередного шага итерационного процесса:

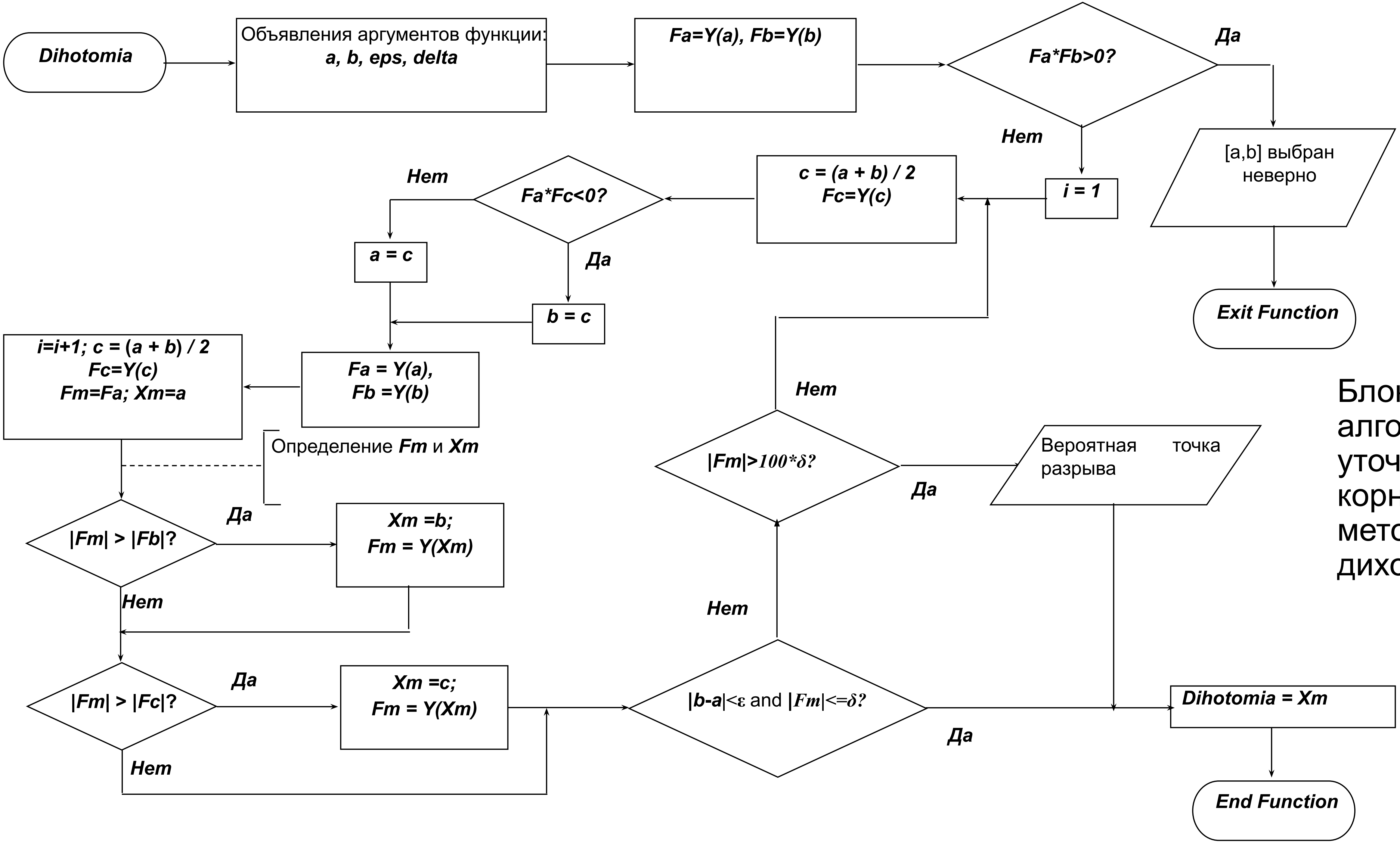
- * - выводится, если решение ещё не получено;
- текст "корень" и его значение

Результаты решения уравнения методом дихотомии

Уточнение 2-го корня уравнения $F(x)=X^3-5X+3$ методом дихотомии

a= 0,5 b= 0,75 $\varepsilon = \delta =$ 0,001

a	b	$x_{ср}$	F(a)	F(b)	$F(x_{ср})$	d=abs(b-a)	Условие	результат	N итерации
0,5	0,75000	0,625	0,62500	-0,32813	0,11914	0,25	ЛОЖЬ	*	1
0,625	0,75000	0,6875	0,11914	-0,32813	-0,11255	0,125	ЛОЖЬ	*	2
0,625	0,68750	0,65625	0,11914	-0,11255	0,00137	0,0625	ЛОЖЬ	*	3
0,65625	0,68750	0,67188	0,00137	-0,11255	-0,05608	0,03125	ЛОЖЬ	*	4
0,65625	0,67188	0,66406	0,00137	-0,05608	-0,02747	0,01563	ЛОЖЬ	*	5
0,65625	0,66406	0,66016	0,00137	-0,02747	-0,01308	0,00781	ЛОЖЬ	*	6
0,65625	0,66016	0,65820	0,00137	-0,01308	-0,00586	0,00391	ЛОЖЬ	*	7
0,65625	0,65820	0,65723	0,00137	-0,00586	-0,00225	0,00195	ЛОЖЬ	*	8
0,65625	0,65723	0,65674	0,00137	-0,00225	-0,00044	0,00098	ИСТИНА	корень =0,65674	9



Блок-схема алгоритма уточнения корней методом дихотомии

```
' Текст функции Dihotomia с отладочными выводами
Public Function Dihotomia(a As Double, b As Double, _
                    eps As Double, delta As Double) As Double
Dim i As Integer ' счётчик числа итераций
Dim c As Double, Fa As Double, Fb As Double, Fc As Double
Dim Fm As Double, Xm As Double
   Fa = Y(a): Fb = Y(b)
      If Fa * Fb > 0 Then
         MsgBox ("Начальный выбор интервала [a,b]
сделан _             неверно")
                  Exit Function
      End If
```

```
i = 1 ' вход в цикл определения корня
  Do ' While ((Abs(b - a) > eps) And (Abs(Fm) > delta))
    c = (a + b) / 2: Fc = Y(c):
     '  MsgBox "i= " & i & "  c= " & c & ";   Fc= " & Fc
     ' выполнение шага метода дихотомии
      If Fa * Fc < 0 Then b = c Else a = c
       ' вычисление новых значений функции на границах
интервала
        Fa = Y(a): Fb = Y(b):
        ' MsgBox "i= " & i & " |   a=" & a & "  ; Fa=" & Fa & _
        '       "  |  b=" & b & "   ;  Fb=" & Fb
        i = i + 1
   ' выбор точки с наименьшим значением F(X)
  c = (a + b) / 2: Fc = Y(c):
```

```
Fm = Fa:  Xm = a ' определение точки Xm с наименьшим Y(Xm)
   If (Abs(Fm) > Abs(Fb)) Then
              Xm = b:    Fm = Y(Xm)
   End If
   If (Abs(Fm) > Abs(Fc)) Then
              Xm = c:     Fm = Y(Xm)
   End If
    If ((Abs(b - a) < eps) And (Abs(Fm) > delta * 100)) Then GoTo   E
   ' MsgBox "i= " & i & " |   корень Xm=" & Xm & " ;   F(Xm) =" & Fm
   Loop Until ((Abs(b - a) < eps) And (Abs(Fm) <= delta)): GoTo E1
E:  MsgBox " Вероятная точка разрыва "
E1: 'MsgBox "число итераций  i= " & i & "  |  Xm=" & Xm & _
                        " | Fm=   " & Fm
   Dihotomia = Xm
End Function
```

Результаты выполнения табличного решения и решения, полученного при обращении к функции Dihotomia()

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	*Уточнение 2-го корня уравнения $F(x)=X^3-5X+3$ методом дихотомии*									
2	*a=*	0,5	*b=*	0,75	$\varepsilon = \delta =$	0,001				
3	*a*	*b*	x_{cp}	*F(a)*	*F(b)*	$F(x_{cp})$	*d=abs(b-a)*	*Условие*	*результат*	*N итерации*
4	0,5	0,75000	0,625	0,62500	-0,32813	0,11914	0,25	ЛОЖЬ	*	1
5	0,625	0,75000	0,6875	0,11914	-0,32813	-0,11255	0,125	ЛОЖЬ	*	2
6	0,625	0,68750	0,65625	0,11914	-0,11255	0,00137	0,0625	ЛОЖЬ	*	3
7	0,65625	0,68750	0,67188	0,00137	-0,11255	-0,05608	0,03125	ЛОЖЬ	*	4
8	0,65625	0,67188	0,66406	0,00137	-0,05608	-0,02747	0,01563	ЛОЖЬ	*	5
9	0,65625	0,66406	0,66016	0,00137	-0,02747	-0,01308	0,00781	ЛОЖЬ	*	6
10	0,65625	0,66016	0,65820	0,00137	-0,01308	-0,00586	0,00391	ЛОЖЬ	*	7
11	0,65625	0,65820	0,65723	0,00137	-0,00586	-0,00225	0,00195	ЛОЖЬ	*	8
12	0,65625	0,65723	0,65674	0,00137	-0,00225	-0,00044	0,00098	ИСТИНА	корень =0,65674	9
13										
14						Dihotomia(B2;D2;$F$2;$F$2)=			0,656738281	

=Dihotomia(B2;D2;$F$2;$F$2)

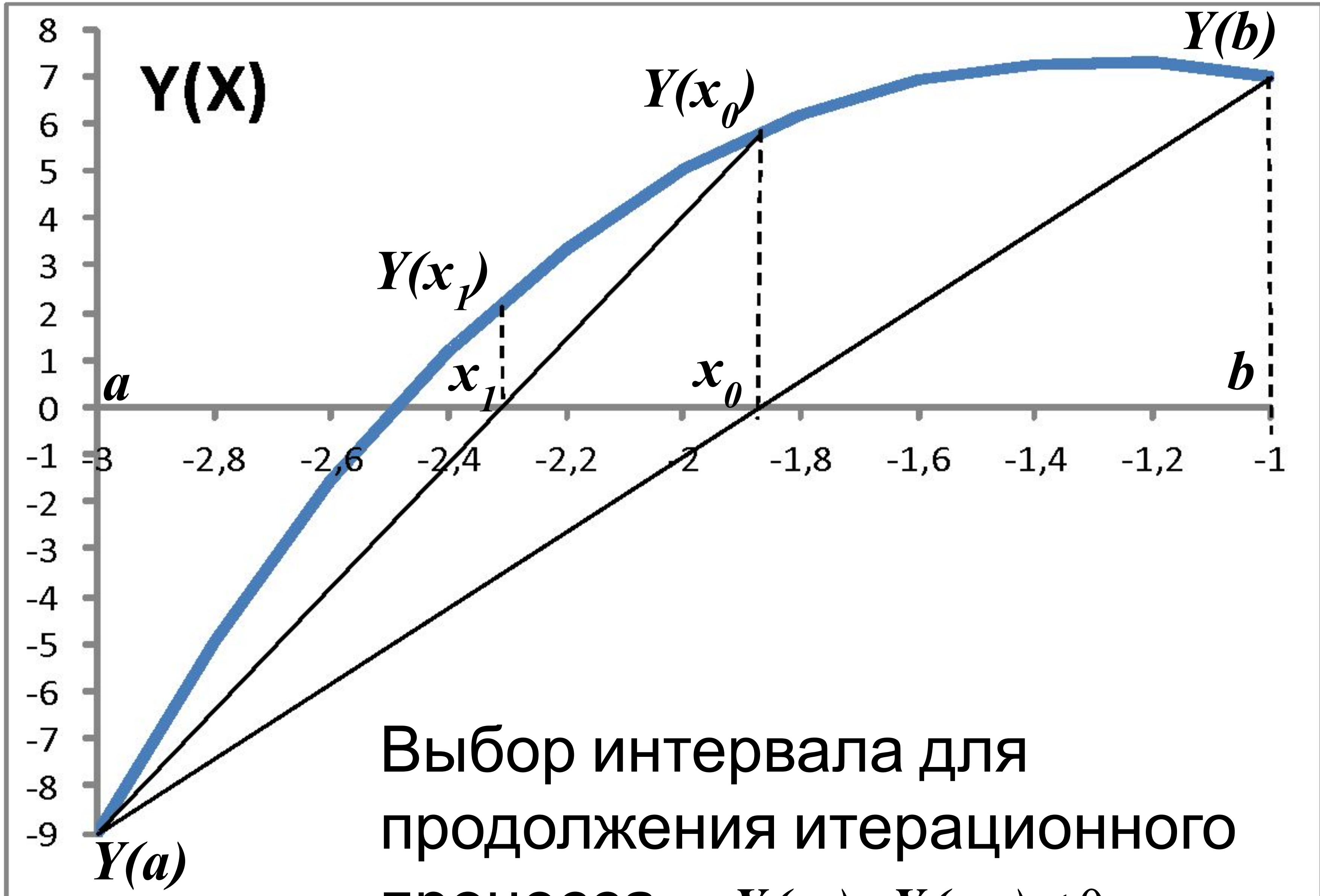
Метод хорд

Уравнение прямой, проходящей через точки Y(a) и Y(b):

$$\frac{y - Y(a)}{Y(b) - Y(a)} = \frac{x - a}{x - b}$$

Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс ($x = x_1$, $y = 0$):

$$x_0 = a - \frac{b - a}{Y(b) - Y(a)} Y(a)$$



Выбор интервала для продолжения итерационного процесса: $Y(a) \times Y(x_i) < 0$

Завершение процесса уточнения корня

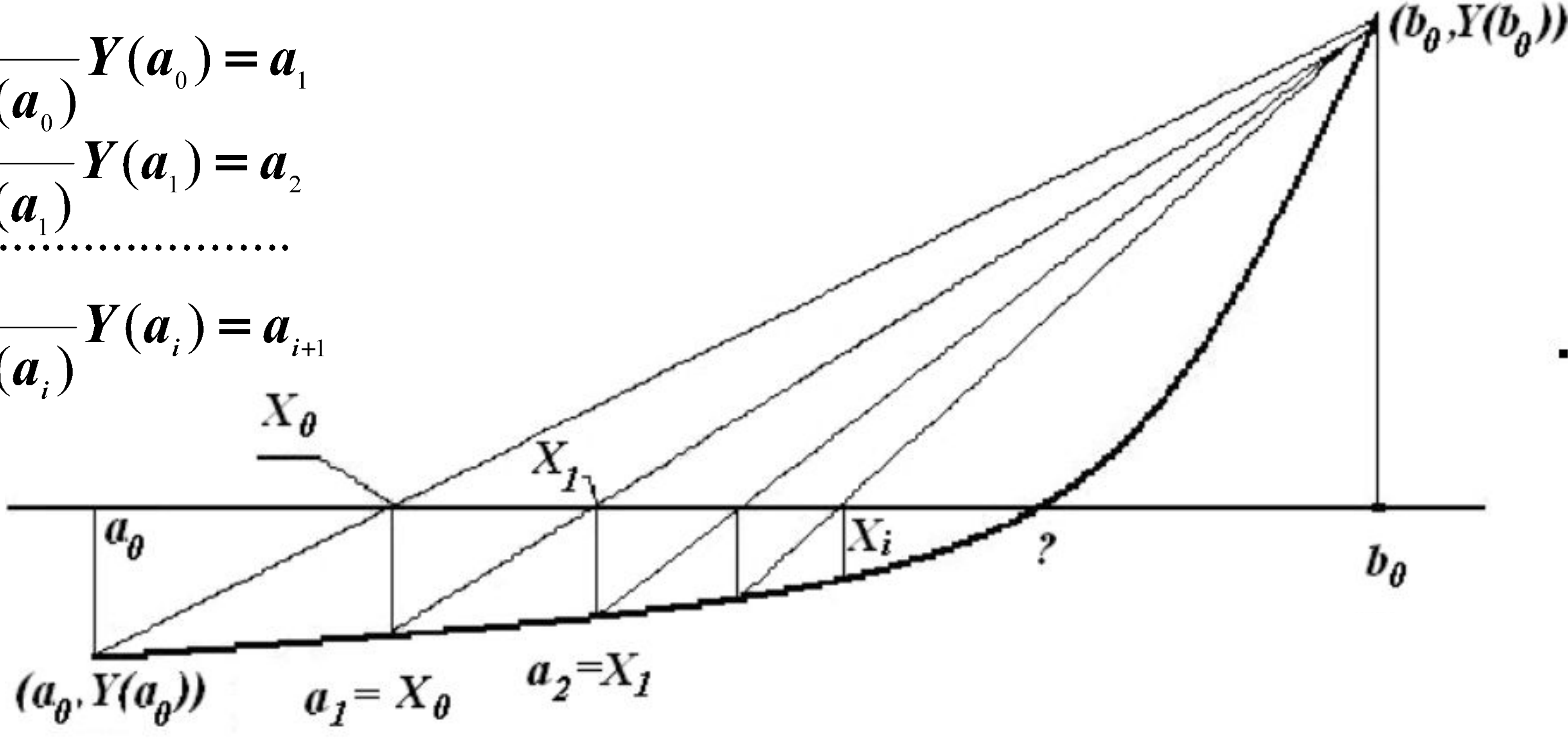
$$(|Y(x_i) < \varepsilon| \text{ È } |x_{i+1} - x_i|) < \delta$$

$$x_0 = a_0 - \frac{b_0}{Y(b_0) - Y(a_0)} Y(a_0) = a_1$$

$$x_1 = a_1 - \frac{b_0}{Y(b_0) - Y(a_1)} Y(a_1) = a_2$$

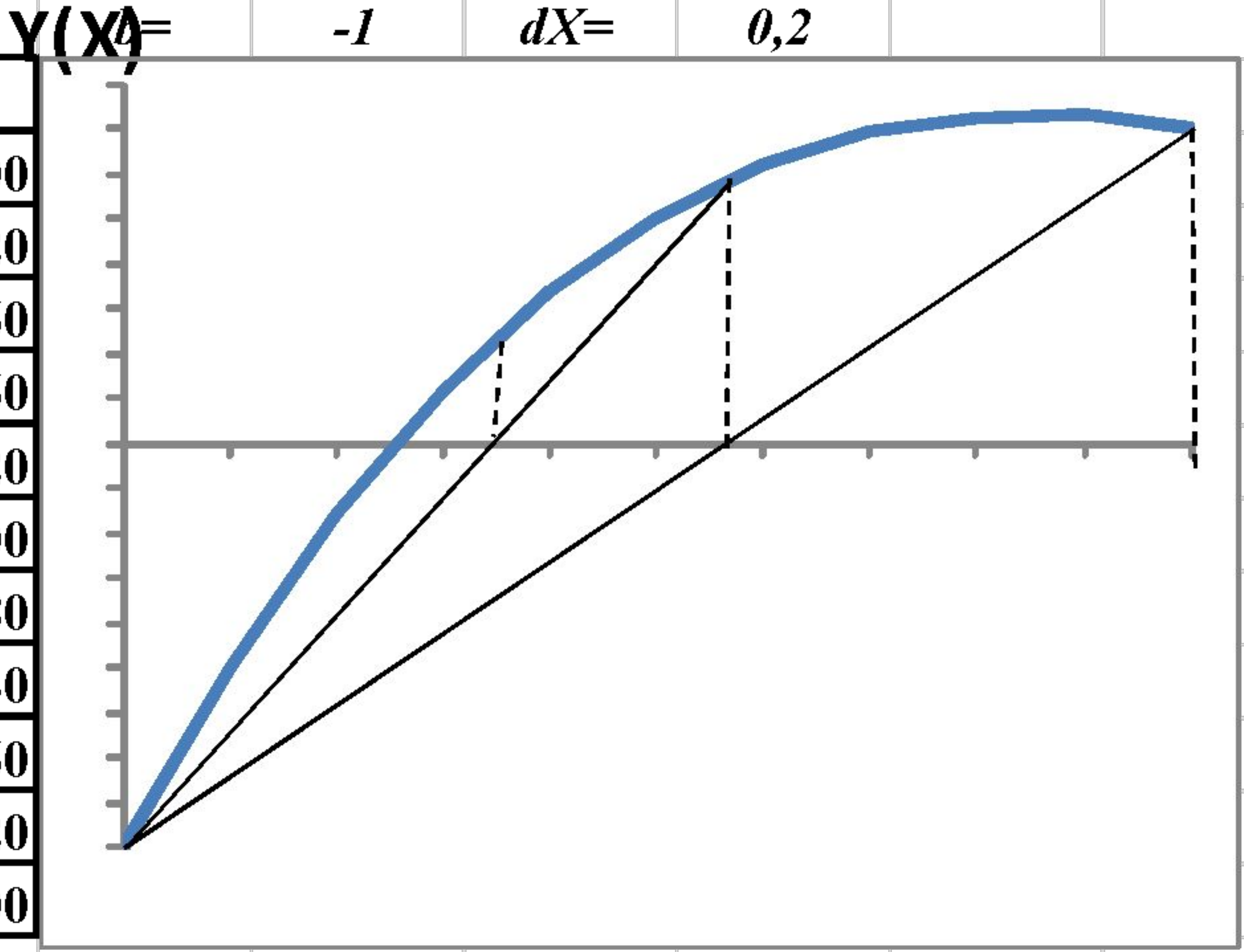
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i = a_i - \frac{b_0}{Y(b_0) - Y(a_i)} Y(a_i) = a_{i+1}$$



a=	*-3*	*b=*	*-1*	*dX=*	*0,2*

X	*Y(X)*
-3	-9,0000
-2,8	-4,9520
-2,6	-1,5760
-2,4	1,1760
-2,2	3,3520
-2	5,0000
-1,8	6,1680
-1,6	6,9040
-1,4	7,2560
-1,2	7,2720
-1	7,0000



Реализация метода хорд в среде MS Excel

Уточнение 2-го корня уравнения $F(x)=X^3-5X+3$ методом дихотомии

заголовок таблицы: $a_0=-1;\ b_0=\ -2,25;\ \varepsilon = \delta = 0,001$

Формирование заголовка, первой и второй строк таблицы (столбцы от А F)

14	*a=*	*-3*	*b=*	*-1*	*ε=δ=*	*0,001*
15	*a*	*b*	*Y(a)*	*Y(b)*	*x*	*Y(x)*
16	=B14	=D14	=A16^3-5*A16+3	=B16^3-5*B16+3	=$A16-(B16-A16)/(D16-C16)*C16	=Y(E16)
17	=ЕСЛИ(C16*F16<0;A16;E16)	=ЕСЛИ(D16*F16<0;B16;E16)	=A17^3-5*A17+3	=B17^3-5*B17+3	=$A17-(B17-A17)/(D17-C17)*C17	=Y(E17)

Ссылки на ячейки со значениями параметров a_0 и b_0

Формулы для вычисления значений Y(a), Y(b), X_i и $Y(X_i)$

Формулы реализации метода хорд в среде MS Excel столбцы от E

	E	F	G	H	I	J
14	ε=δ=	0,001				
15	x	Y(x)	$\lvert x_i - x_{i+1} \rvert$	Условие	Результат	№ итерации
16	=$A16-(B16-A16)/(D16-C16)*C16	=Y(E16)	=ABS(A16-E16)	=И(G16<=$F$14;F16<=$F$14)	=ЕСЛИ(H16;"корень ="&ТЕКСТ(E16;"0,00000");"*")	1
17	=$A17-(B17-A17)/(D17-C17)*C17	=Y(E17)	=ABS(E16-E17)	=И(G17<=$F$14;F17<=$F$14)	=ЕСЛИ(H17;"корень ="&ТЕКСТ(E17;"0,00000");"*")	2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
14	a=	-3	b=	-1	ε=δ=	0,001				
15	a	b	Y(a)	Y(b)	x	Y(x)	$\lvert x_i - x_{i+1} \rvert$	Условие	Результат	№ итерации
16	-3	-1	-9	7	-1,8750	5,7832	1,1250	ЛОЖЬ	*	1
17	-3	-1,8750	-9	5,7832	-2,3151	2,1673	0,4401	ЛОЖЬ	*	2
18	-3	-2,3151	-9	2,1673	-2,4480	0,5696	0,1329	ЛОЖЬ	*	3
19	-3	-2,4480	-9	0,5696	-2,4809	0,1352	0,0329	ЛОЖЬ	*	4
20	-3	-2,4809	-9	0,1352	-2,4886	0,0313	0,0077	ЛОЖЬ	*	5
21	-3	-2,4886	-9	0,0313	-2,4903	0,0072	0,0018	ЛОЖЬ	*	6
22	-3	-2,4903	-9	0,0072	-2,4907	0,0017	0,0004	ЛОЖЬ	*	7
23	-3	-2,4907	-9	0,0017	-2,4908	0,0004	9E-05	ИСТИНА	корень =-2,49084	8

Уточнение значения наименьшего из корней уравнения F(x)=X^3-5X+3 методом хорд при выборе начального интервала неопределённости [-3; -1]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
14	*a=*	*-3*	*b=*	*-1*	*ε=δ=*	*0,001*				
15	***a***	***b***	***Y(a)***	***Y(b)***	***x***	***Y(x)***	$\|x_i - x_{i+1}\|$	***Условие***	***Результат***	***№ итерации***
16	-3	-1	-9	7	-1,8750	5,7832	1,1250	ЛОЖЬ	*	1
17	-3	-1,8750	-9	5,7832	-2,3151	2,1673	0,4401	ЛОЖЬ	*	2
18	-3	-2,3151	-9	2,1673	-2,4480	0,5696	0,1329	ЛОЖЬ	*	3
19	-3	-2,4480	-9	0,5696	-2,4809	0,1352	0,0329	ЛОЖЬ	*	4
20	-3	-2,4809	-9	0,1352	-2,4886	0,0313	0,0077	ЛОЖЬ	*	5
21	-3	-2,4886	-9	0,0313	-2,4903	0,0072	0,0018	ЛОЖЬ	*	6
22	-3	-2,4903	-9	0,0072	-2,4907	0,0017	0,0004	ЛОЖЬ	*	7
23	-3	-2,4907	-9	0,0017	-2,4908	0,0004	9E-05	ИСТИНА	корень =-2,49084	8

Уточнение значения второго корня уравнения $F(x)=X^3-5X+3$ методом хорд при выборе начального интервала неопределённости [0,5; 0,75] (для сравнения с результатами на слайде 27)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
14	*0,5*	*b=*	*0,75*	*ε=δ=*	*0,001*				
15	***b***	***Y(a)***	***Y(b)***	***x***	***Y(x)***	***$\|x_i - x_{i+1}\|$***	***Условие***	***Результат***	***№ итерации***
16	0,75	0,6	-0,328	0,6639	-0,0270	0,1639	ЛОЖЬ	*	1
17	0,6639	0,6	-0,027	0,6571	-0,0019	0,0068	ЛОЖЬ	*	2
18	0,6571	0,6	-0,002	0,6567	-0,0001	0,0005	ИСТИНА	корень =0,65666	3
19	0,6567	0,6	-1E-04	0,6566	0,0000	3E-05	ИСТИНА	корень =0,65662	4