Контроль:

$$[\partial] = 0, \quad (31)$$

$$[\partial^2] = [d\partial]. \quad (32)$$

Систематическую ошибку можно не исключать и делать оценку по формуле (27), если выполняется условие

$$|[d]| \leq 0{,}25\ [|d|]. \quad (33)$$

ЛЕКЦИЯ 3

«ВЕСА ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ФУНКЦИЙ. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ».

1. **Веса измерений и их свойства. Соотношение между весами и средними квадратическими ошибками. Вес среднего арифметического.**
2. **Веса функций измеренных величин.**
3. **Средняя квадратическая ошибка единицы веса.**
4. **Среднее весовое. Средняя квадратическая ошибка и вес среднего весового.**

5. **Поправки неравноточных измерений одной и той же величины и их свойства. Оценка точности неравноточных измерений и среднего весового по поправкам.**

6. **Определение средней квадратической ошибки единицы веса по разностям двойных неравноточных измерений.**

7. **Оценка точности измерения углов и превышений по невязкам в полигонах и ходах.**

1.Веса измерений и их свойства. Соотношение между весами и средними квадратическими ошибками. Вес среднего арифметического.

При обработке неравноточных измерений пользуются дополнительной характеристикой точности измерений, называемой **весом измерения**.

Вес измерения ***p*** – величина обратно-пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки этого измерения:

$$p = \frac{k}{m^2}. \qquad (1)$$

В этой формуле ***k*** произвольное число, но при решении конкретной задачи одинаковое для всех измерений. Его стремятся выбрать таким, чтобы веса были близкими к **1**.

Поскольку *k* выбирается произвольно, при решении данной задачи все веса можно увеличивать или уменьшать в одно и то же число раз. Это является **первым свойством весов**.

Пусть сделано два измерения с весами

$$p_1 = \frac{k}{m_1^2}, \qquad p_2 = \frac{k}{m_2^2}.$$

Отсюда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}, \qquad (2)$$

т.е. веса двух измерений обратно пропорциональны квадратам их средних квадратических ошибок. Это второе свойство весов.

Найдем вес среднего арифметического, принимая вес **p** отдельного измерения равным единице.

Обозначим вес среднего арифметического через **P**. На основании формулы **(2)** запишем

$$\frac{P}{p} = \frac{m^2}{M^2}.$$

Подставляя $\boldsymbol{p} = 1$ и $\mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$, получим

$$\boldsymbol{P = n}, \qquad \mathbf{(3)}$$

т.е. вес среднего арифметического равен числу равноточных измерений из которого оно получено, если вес каждого измерения принят равным единице.

На этом основании любой результат измерений с весом ***p*** можно понимать как среднее арифметическое из ряда воображаемых равноточных измерений, каждое с весом единица, число которых было ***p***.

2. Веса функций измеренных величин.

Ранее были выведены формулы для нахождения СКО функций. Веса и СКО измерений связаны зависимостью

$$p = \frac{k}{m^2}.$$

Принимая ***k*=1**, получим

$$m^2 = \frac{1}{p}.$$

Величину $\frac{1}{p}$ называют обратным весом.

...и в ранее выведенные формулы подставить вместо квадратов СКО соответствующие обратные веса, то получим формулы для нахождения весов функций

1.

$$u = kx + c,$$

$$m_u^2 = k^2 m_x^2,$$

$$\frac{1}{p_u} = k^2 \frac{1}{p_x}. \qquad (4)$$

2. $$u = k_1 x + k_2 y + c,$$

$$m_u^2 = k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2,$$

$$\frac{1}{p_u} = k_1^2 \frac{1}{p_x} + k_2^2 \frac{1}{p_y}. \quad \textbf{(5)}$$

3. $u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n + c,$

$$m_u^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2,$$

$$\frac{1}{p_u} = k_1^2 \frac{1}{p_1} + k_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + k_n^2 \frac{1}{p_n}. \quad \textbf{(6)}$$

4. $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n + c,$

$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2,$$

$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}. \quad \textbf{(7)}$$

Если измерения равноточные, то

$$\frac{1}{p_u} = \frac{n}{p},$$

откуда

$$p_u = \frac{p}{n}, \quad \textbf{(8)}$$

т.е. вес суммы ***n*** равноточных слагаемых в ***n*** раз меньше веса одного измерения.

5. $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2,$$

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}. \quad \textbf{(9)}$$

3. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Средней квадратической ошибкой единицы веса ***μ*** называют СКО измерения, вес которой равен единице.

Выразим μ через истинные ошибки Δ. Пусть измерению с весом p соответствует СКО m. На основании свойства весов можно написать

$$\frac{p}{1} = \frac{\mu^2}{m^2}.$$

Откуда

$$p = \frac{\mu^2}{m^2}, \quad \textbf{(10)}$$

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}, \quad \textbf{(11)}$$

$$\mu = m\sqrt{p} \qquad \textbf{(12)}$$

Пусть имеется ряд измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Составим вспомогательные функции, найдем их истинные и СКО

$$u_i = l_i\sqrt{p_i}; \quad \Delta u_i = \Delta_i\sqrt{p_i};$$

$$m_{u_i} = m_i\sqrt{p_i} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В соответствии с (12) $m_{u_i} = \mu.$

Следовательно, функции равноточные и имеют веса, равные единице.

Для равноточных измерений можно записать

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta u^2]}{n}}$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}. \quad \mathbf{(13)}$$

4. Среднее весовое. Средняя квадратическая ошибка и вес среднего весового.

Рассмотрим обработку результатов неравноточных измерений одной и той же величины.

Пусть получено n измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Результат любого измерения $\boldsymbol{l_i}$ можно рассматривать как среднее арифметическое из $\boldsymbol{p_i}$ воображаемых измерений $l_i^{(1)}, l_i^{(2)}, \ldots, l_i^{(p_i)}$ каждое с весом единица, т. е.

$$l_i = \frac{l_i^{(1)} + l_i^{(2)} + \ldots + l_i^{(p_i)}}{p_i} \qquad \mathbf{(14)}$$

Таким образом, измерения можно свести к равноточным и окончательное значение вычислить по формуле среднего арифметического

$$L_B = \frac{l_1^{(1)} + l_1^{(2)} + \ldots + l_1^{(P_1)} + l_2^{(1)} + l_2^{(2)} + \ldots + l_2^{(P_2)} + \ldots + l_n^{(1)} + l_n^{(2)} + \ldots + l_n^{(P_n)}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \qquad (15)$$

Из (14) следует, что

$$l_i^{(1)} + l_i^{(2)} + \ldots + l_i^{(p_i)} = p_i l_i.$$

Подставляя в (15), получим

$$L_B = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]} \quad \textbf{(16)}$$

Величину L_B называют средним весовым значением (весовым средним, средневзвешенным, общей арифметической срединой).

Для упрощения расчетов вводят приближенное значение l_0, находят остатки $\varepsilon_i = l_i - l_0$, а затем среднее весовое по формуле

$$L_B = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}. \quad (17)$$

Величина **[*p*]** – сумма весов, а следовательно, общее число измерений с весом единица, из которых получено среднее арифметическое. Поэтому вес среднего весового

$$\boldsymbol{P_B = [p].} \qquad \textbf{(18)}$$

Для нахождения средней квадратической ошибки среднего весового воспользуемся формулой

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}.$$

В результате получим

$$M_B = \frac{\mu}{\sqrt{P_B}}$$

или

$$M_B = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad \textbf{(1}$$

5. Поправки неравноточных измерений одной и той же величины и их свойства. Оценка точности неравноточных измерений и среднего весового по поправкам.

Поправки неравноточных измерений одной и той же величины определяют по формуле

$$v_i = L_B - l_i. \qquad (20)$$

Запишем поправки для всех *n* измерений, умножим на соответствующие веса и сложим

$$v_1 = L_B - l_1 \quad \big| p_1,$$

$$v_2 = L_B - l_2 \quad \big| p_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_n = L_B - l_n \quad \big| p_n,$$

$$[pv] = L_B\,[p] - [pl].$$

Подставляя $L_B = \frac{[pl]}{[p]}$, получим

$$[pv] = 0. \qquad (21)$$

Это **первое свойство** поправок неравноточных измерений. Равенство (21) контролирует правильность вычисления L_B и v.

При округлении L_B получим равенство

$$[pv] = [p]\, w, \quad (22)$$

где w – ошибка округления.

Второе свойство поправок для неравноточных измерений одной и той же величины выражается равенством

$$[pv^2] = min. \qquad (23)$$

Для оценки точности неравноточных измерений по поправкам используют формулы

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \qquad (24)$$

$$M_B = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}, \qquad (25)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – СКО единицы веса;

$\boldsymbol{M_B}$ – СКО среднего весового.

Вычисления контролируются по формуле

$$[p\ v^2] = -[pvl] = -[pv\varepsilon].$$

Если L_B округлено, то

$$[p\ v^2] = -[pv\varepsilon] + (L_B - l_0)[pv].$$

Для приближенного контроля можно пользоваться неравенством $|[p\ v^2]+[pv\varepsilon]| \le 0{,}5\ |[p\varepsilon]|$ единицы последнего знака L_B.

6. Определение средней квадратической ошибки единицы веса по разностям двойных неравноточных измерений.

Пусть при двойном измерении ***n*** величин получены результаты

$l_1, l_1^{\prime}$ каждое с весом p_1,

$l_2, l_2^{\prime}$ -“- p_2,

…. … … … …

$l_n, l_n^{\prime}$ -“- p_n.

Составим разности

$$d_1 = l_1 - l_1',$$
$$d_2 = l_2 - l_2',$$
$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$d_n = l_n - l_n'.$$

Полученные разности являются истинными ошибками самих разностей, поэтому можно записать

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}.$$

Каждая разность $\boldsymbol{d_i = l_i - l_i^{\prime}}$ является функцией равноточных измерений с весом $\boldsymbol{p_i}$.

Следовательно, $p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$ и формула примет вид

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \quad (26)$$

При наличии систематических ошибок их предварительно исключают по формуле

$$\partial_i = d_i - \Theta_i. \quad (27)$$

После исключения систематических ошибок СКО единицы веса находят по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}. \quad (28)$$

7. ***Оценка точности измерения углов и превышений по невязкам в полигонах и ходах***

Во всех замкнутых и разомкнутых теодолитных ходах и полигонах угловые невязки являются истинными ошибками суммы измеренных углов. Поэтому для оценки точности можно воспользоваться формулой

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}.$$

Если вес измерения одного угла принять равным единице, то вес суммы ***n*** углов найдется по формуле

$$p = \frac{1}{n}.$$

Подставляя в предыдущую формулу это значение веса, заменяя **Δ** на ***f*** и ***n*** на число полигонов ***N***, получим

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}. \quad (29)$$

Здесь $\boldsymbol{\mu}$ является СКО измерения одного угла, т.к. за единицу веса принят вес одного угла. Поэтому формулу (29) можно записать иначе

$$m = \sqrt{\frac{\left[\dfrac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}, \qquad (30)$$

где $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\beta}}$ – невязки в полигонах или ходах;

$\boldsymbol{n}$ – число углов в полигоне или ходе;

$\boldsymbol{N}$ – число полигонов или ходов.

Для триангуляции ***n* =3**, поэтому

$$m=\sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{3N}}.\quad (31)$$

Для четырехугольников

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{N}}.\quad (32)$$

Аналогичными рассуждениями можно получить формулу для оценки точности превышений геометрического нивелирования.

Если сумме превышений на 1 км хода придать вес, равный единице, то вес суммы превышений хода длиной ***L*** км определится по формуле

$$p = \frac{1}{L}$$

СКО единицы веса (СКО в сумме превышений на 1 км хода) найдется по формуле

$$m_{км} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{L}\right]}{N}}, \quad (33)$$

где $\boldsymbol{f_h}$ – невязки в превышениях;

$\boldsymbol{L}$ – длины ходов в км;

$\boldsymbol{N}$ – число полигонов или ходов.

В качестве единицы веса можно взять вес превышения на одной станции. Тогда вес суммы превышений из ***n*** станций будет равен $\frac{1}{n}$ и формула примет вид

$$m_h = \sqrt{\frac{\left[\frac{f^2}{n}\right]}{N}}. \qquad (34)$$

Если на 1 км хода приходится ***k*** станций, то

$$m_{км} = m_h \sqrt{k}. \qquad (35)$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !