

В результате получим условные уравнения поправок в следующем линейном виде

$$\left. \begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ \dots \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n + w_r &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

где $a, b, \dots, r$ – частные производные;
 w – свободные члены (невязки).

Выражение (5) можно упростить

$$\left. \begin{array}{l} [av] + w_1 = 0 \\ [bv] + w_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ [rv] + w_r = 0 \end{array} \right\} \cdot \quad (6)$$

Особенность уравнений поправок в том, что число их меньше числа неизвестных ($r < n$). Поэтому система неопределенная, допускающая множество решений.

Рассмотрим решение задачи по определению поправок для случая равноточных измерений в соответствии с принципом $[v^2] = \min$, т.е. будем находить $[v^2] = \min$ при условии (6).

Данная задача решается с помощью ***множителей Лагранжа***.

Составим функцию путем прибавления к $[v^2]$ левых частей уравнения (6), умножив каждое на неопределенный множитель $-2k_1, -2k_2, \dots, -2k_r$

$$F = [v^2] - 2k_1([av] + w_1) - 2k_2([bv] + w_2) - \dots - 2k_r([rv] + w_r). \quad (7)$$

Для нахождения минимума функции (7) находят частные производные и приравнивают к нулю. В результате получим n уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v_1} &= 2v_1 - 2a_1k_1 - 2b_1k_2 - \dots - 2r_1k_r = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v_2} &= 2v_2 - 2a_2k_1 - 2b_2k_2 - \dots - 2r_2k_r = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F}{\partial v_n} &= 2v_n - 2a_nk_1 - 2b_nk_2 - \dots - 2r_nk_r = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Отсюда получим уравнения поправок

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + r_1 k_r \\ v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + r_2 k_r \\ &\dots \\ v_n &= a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + r_n k_r \end{aligned} \right\} \cdot \quad (8)$$

Неопределенные множители $k_1, k_2, \dots, k_r$ называются коррелатами. Чтобы по этим уравнениям найти поправки, нужно вначале определить эти коррелаты.

Подставляя выражения из (8) в условные уравнения (5) для первого уравнения получим

$$a_1 a_1 k_1 + a_1 b_1 k_2 + \dots + a_1 r_1 k_r + \\ a_2 a_2 k_1 + a_2 b_2 k_2 + \dots + a_2 r_2 k_r + \\ + \dots +$$

$$+ a_n a_n k_1 + a_n b_n k_2 + \dots + a_n r_n k_r + w_1 = 0,$$

или

$$[aa]k_1 + [ab]k_2 + \dots + [ar]k_r + w_1 = 0.$$

Делая аналогичную подстановку в остальные уравнения системы (5), получим **систему нормальных уравнений коррелат** в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} [aa]k_1 + [ab]k_2 + \dots + [ar]k_r + w_1 &= 0 \\ [ab]k_1 + [bb]k_2 + \dots + [br]k_r + w_2 &= 0 \\ \dots & \\ [ar]k_1 + [br]k_2 + \dots + [rr]k_r + w_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Коэффициенты $[aa]$, $[bb]$, ..., $[rr]$, расположенные на главной диагонали, всегда положительны и называются квадратичными. Неквадратичные коэффициенты, расположенные симметрично относительно главной диагонали попарно равны между собой. Поэтому для краткости нормальные уравнения, обычно, записывают, начиная с квадратичных коэффициентов.

Решая систему (9) находят коррелаты, а затем, подставляя в уравнения поправок (8) находят поправки к измеренным величинам.

Для неравноточных измерений уравнения поправок имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= q_1(a_1k_1 + b_1k_2 + \dots + r_1k_r) \\ v_2 &= q_2(a_2k_1 + b_2k_2 + \dots + r_2k_r) \\ &\dots \\ v_n &= q_n(a_nk_1 + b_nk_2 + \dots + r_nk_r) \end{aligned} \right\} \cdot (10)$$

Нормальные уравнения коррелат будут такими

$$\left. \begin{aligned} [qaa]k_1 + [qab]k_2 + \dots + [qar]k_r + w_1 &= 0 \\ [qbb]k_2 + \dots + [qbr]k_r + w_2 &= 0 \\ &\dots \\ [qrr]k_r + w_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В этих выражениях q – величина обратная весу измерения

$$q_i = \frac{1}{p_i}.$$

Вывод аналогичен, только условие $[v^2] = \min$ заменяется на $[pv^2] = \min$.

2. Понятие о параметрическом способе уравнивания.

Пусть измерено n величин. Получены значения $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$ с весами соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Пусть выбраны необходимые неизвестные (параметры), уравненное значение которых обозначим через $x, y, \dots, w$.

Между уравненным значением измеренной величины и искомыми неизвестными всегда можно найти связывающую их функцию

$$l'_i + v_i = F_i(x, y, \dots w). \quad (12)$$

К примеру, в треугольнике измерены все три угла α , β и γ . Выберем в качестве необходимых углы α и β и обозначим их уравненное значение через x и y . Тогда для каждого измерения можно составить функцию

$$\alpha + (\alpha) = x,$$

$$\beta + (\beta) = y,$$

$$\gamma + (\gamma) = 180^0 - x - y.$$

Запишем (12) в таком виде

$$F_i(x, y, \dots, w) - l'_i = v_i. \quad (13)$$

Найдем $x, y, \dots, w$ при условии $[pv^2] = \min$. Если функция F_i нелинейная, то ее нужно привести к линейному виду путем разложения в ряд Тейлора.

Для этого представим уравненные значения неизвестных в следующем виде

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \delta x, \\y &= y_0 + \delta y, \\&\dots \\w &= w_0 + \delta w.\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь $x_0, y_0, \dots, w_0$ – приближенные, однако близкие к точным значения параметров, а $\delta x, \delta y, \dots, \delta w$ – поправки к ним.

При разложении (13) в ряд получим

Введем обозначения:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = a_i, \quad \frac{\partial F_i}{\partial y} = b_i, \quad \frac{\partial F_i}{\partial w} = g_i.$$

$$F_i(x_0, y_0, \dots, w_0) - l'_i = l_i.$$

С учетом их запишем

$$a_i \delta x + b_i \delta y + \dots + g_i \delta w + l_i = v_i. \quad (15)$$

Уравнение (15) называют **параметрическим уравнением поправок**. Частные производные $a_i, b_i, \dots, g_i$ вычисляют по приближенным значениям параметров $x_0, y_0, \dots, w_0$. Общее число уравнений поправок равно числу измеренных величин n . Искомыми неизвестными в данном случае будут $\delta x, \delta y, \dots, \delta w$.

Исходя из принципа наименьших квадратов $u = [pv^2] = \min$, найдем частные производные и приравняем их к нулю

$$u = \sum_{i=1}^n p_i (a_i \delta x + b_i \delta y + \dots + g_i \delta w + l_i)^2 = \min,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \delta x} = \sum_{i=1}^n (2 p_i a_i a_i \delta x + 2 p_i a_i b_i \delta y + \dots + 2 p_i a_i g_i \delta w + 2 p_i a_i l_i) = 0.$$

Или короче

$$[paa] \delta x + [pab] \delta y + \dots + [pag] \delta w + [pal] = 0.$$

Находя аналогичные производные $\frac{\partial u}{\partial \delta y} \dots$,

$$\frac{\partial u}{\partial \delta w}$$

получим систему нормальных

уравнений

$$\left[\begin{array}{l} [pa a]\delta x + [pab]\delta y + ... + [pag]\delta w + [pal] = 0 \\ [pab]\delta x + [pb b]\delta y + ... + [pbs]\delta w + [pbl] = 0 \\ \\ [pag]\delta x + [pbs]\delta y + ... + [pgg]\delta w + [pgl] = 0 \end{array} \right] \quad (16)$$

В этой системе число уравнений равно числу неизвестных. Решив ее, найдем поправки к приближенным значениям параметров. Затем по формуле (14) и сами параметры. Поправки к измеренным величинам найдутся по формуле (15).

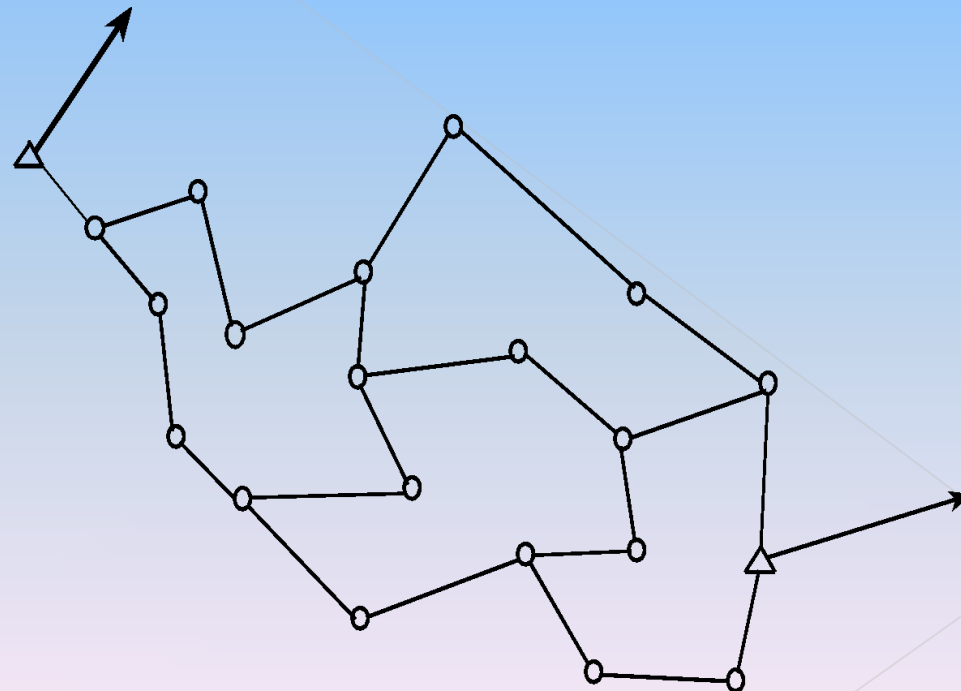
Параметрическим способом уравнивают обширные сети триангуляции и трилатерации, линейно-угловые и комбинированные построения.

Тема «Методы создания съемочных сетей»

1. Теодолитные ходы.
2. Микротриангуляция.
3. Четырехугольники без диагоналей
проф. Зубрицкого И.В.
4. Полярно-лучевой метод.

1. Теодолитные ходы.

При создании съемочных сетей, в частности, для целей землеустройства, широко применяются теодолитные ходы. Этот метод весьма эффективен в условиях закрытой и полужакрытой местности.



Если необходимо выполнить съемку какого-то землепользования, то основной теодолитный ход прокладывается по его границе. Внутри прокладываются диагональные ходы. Кроме того, прокладываются ходы для привязки к пунктам государственных геодезических сетей

В результате, как правило, создается система замкнутых и разомкнутых теодолитных ходов. Углы в теодолитных ходах измеряются теодолитами не менее **30''** точности.

Предельные угловые невязки определяются по формуле

$$f_{\beta_{\text{дон}}} = \pm 1' \sqrt{n},$$

где n – число углов в ходе (полигоне).

Стороны теодолитных ходов измеряются светодальномерами, оптическими дальномерами, 20-ти метровыми лентами, рулетками и другими приборами.

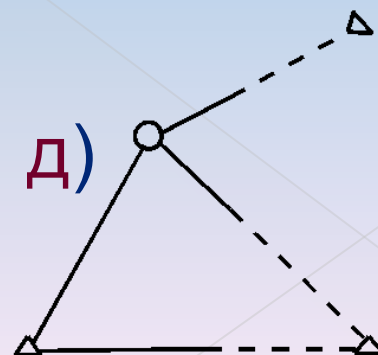
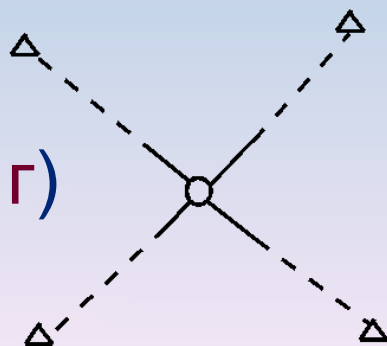
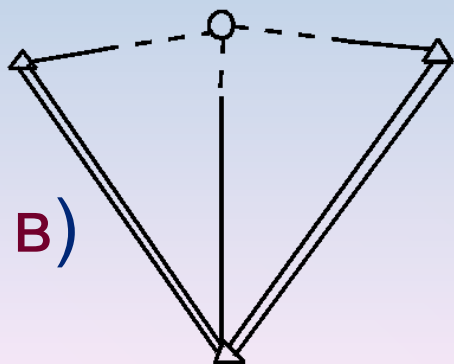
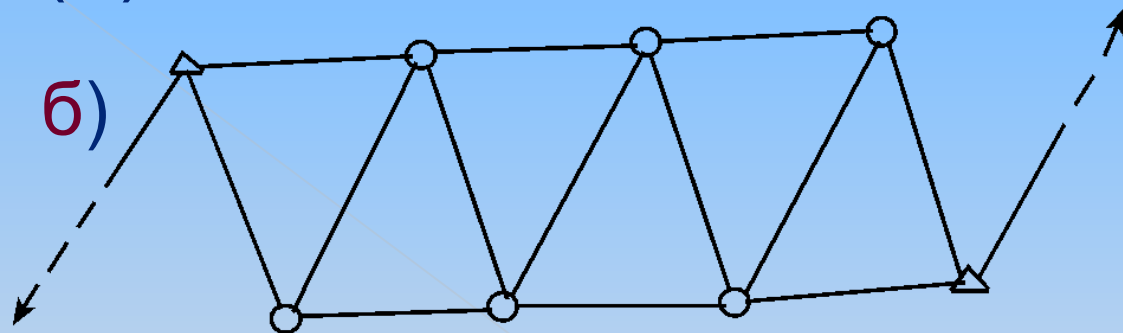
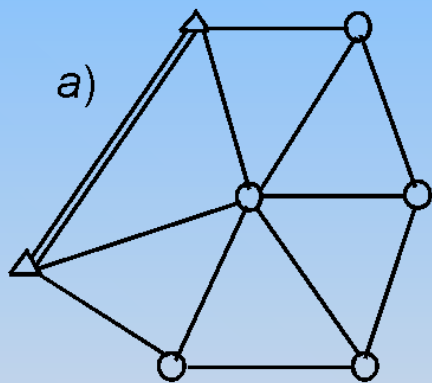
Теодолитные ходы в зависимости от условий местности прокладываются с предельными относительными погрешностями **1:3000, 1:2000, 1:1000**.

Допустимые длины ходов размеры сторон и их число в ходе зависят от масштаба съемки и указываются в инструкциях.

2. Микротриангуляция.

В условиях открытой и всхолмленной местности съёмочные сети взамен теодолитных ходов могут развиваться методами триангуляции, которую в данном случае часто называют **«микротриангуляцией»**.

Она строится в виде несложных сетей
треугольников (**а**), цепочек треугольников (**б**),
вставок отдельных пунктов, определяемых
прямыми (**в**), обратными (**г**) и комбинирован-
ными засечками (**д**).



В качестве исходных сторон используется стороны триангуляции или полигонометрии 1 и 2 разрядов, а также специально измеренные базисные стороны с относительной ошибкой не более 1:5000.

Углы треугольников должны быть не менее 20° , а стороны не короче 150 м.

Измерение углов производится теодолитами не менее 30-секундной точности двумя круговыми приемами. Невязки в треугольниках не должны превышать $1,5'$.

Определение точек прямой засечкой производится не менее чем с трех пунктов, при этом углы засечки должны находиться в пределах от 30° до 150° .

Определение точек обратной засечкой производится не менее чем по четырем исходным пунктам.

3. Четырехугольники без диагоналей **проф. Зубрицкого И.В.**

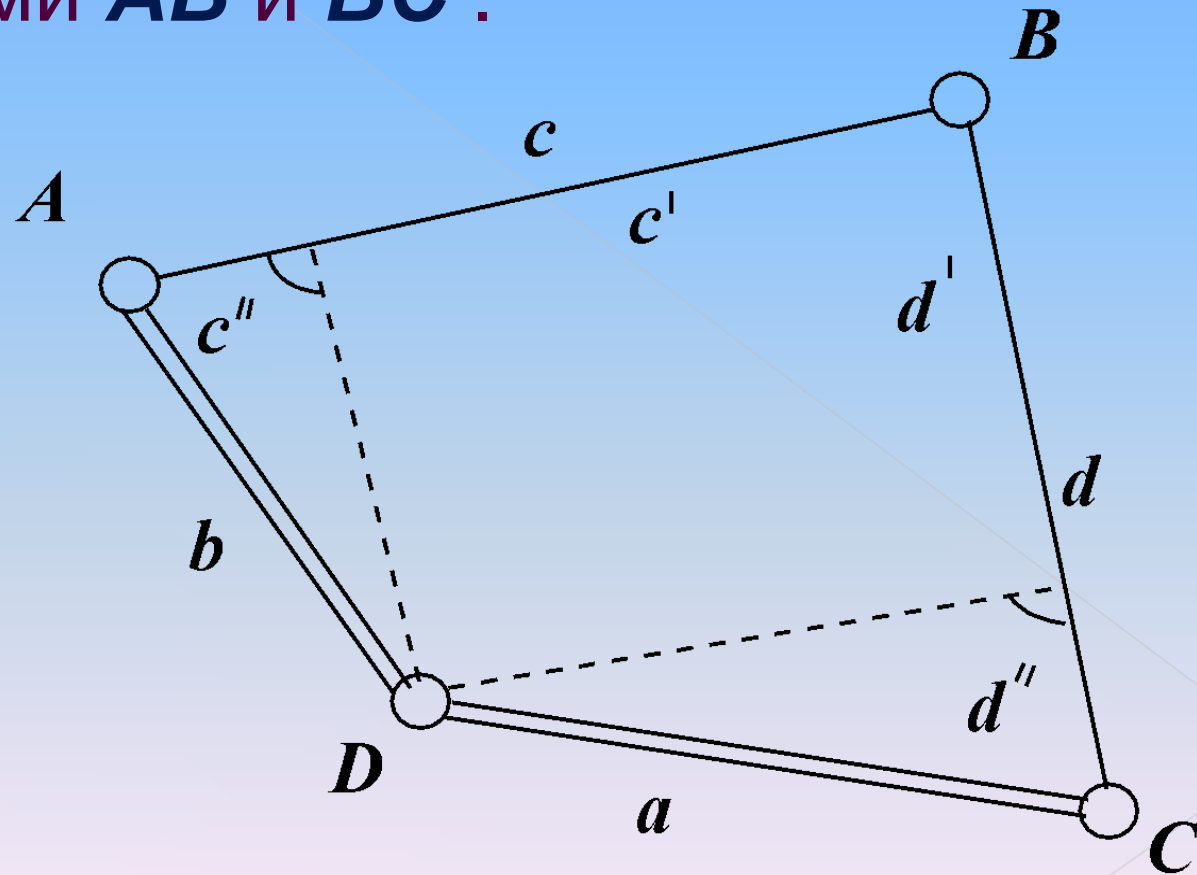
В условиях полузакрытой местности, в населенных пунктах с квартальной застройкой и в ряде других случаев обоснование можно создавать по методу четырехугольников без диагоналей, предложенному проф. И.В. Зубрицким.

На местности создается система примыкающих друг к другу четырехугольников.

В них измеряются все углы и некоторые стороны. Остальные стороны вычисляются.

В исходном четырехугольнике обязательно должны быть известны две смежные стороны.

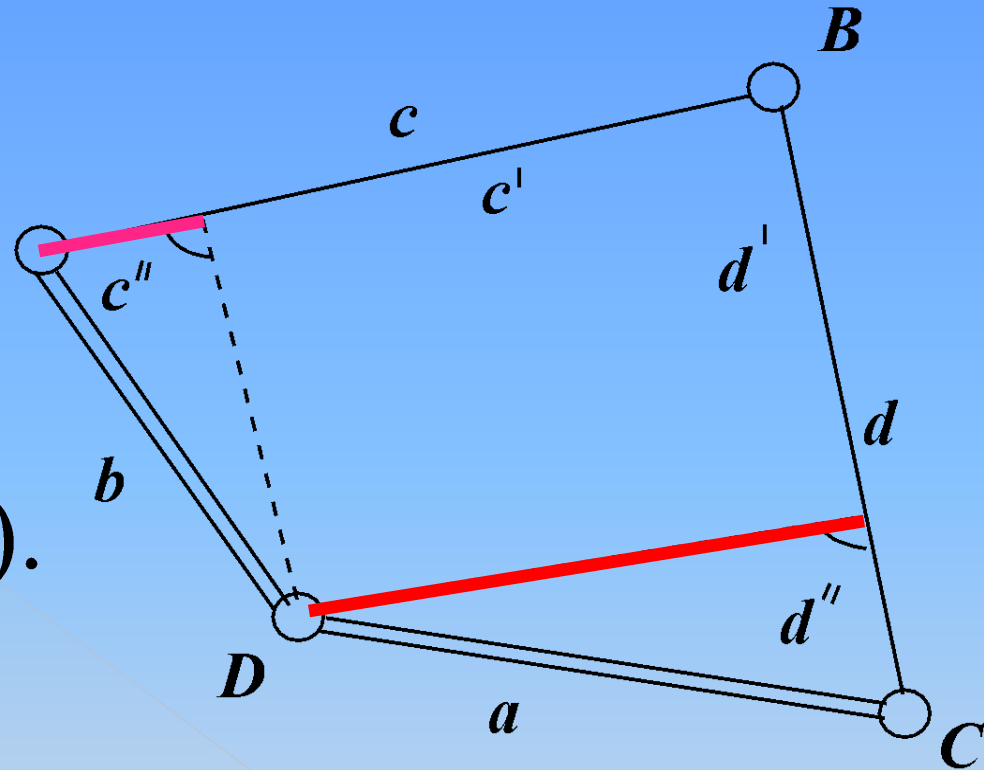
Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором известны стороны a , b и углы A , B , C , необходимо определить стороны c и d . Проведем из точки D линии, параллельные сторонами AB и BC .



Непосредственно из чертежа получим:

$$c' = \frac{a}{\sin B} \sin C,$$

$$c'' = \frac{b}{\sin B} \sin(A + B).$$



Отсюда

$$c = \frac{a \sin C + b \sin(A + B)}{\sin B}.$$

Аналогично найдем

$$d' = \frac{b}{\sin B} \sin A,$$

$$d'' = \frac{a}{\sin B} \sin(B + C).$$

$$d = \frac{b \sin A + a \sin(B + C)}{\sin B}.$$

Решение четырехугольников можно проконтролировать путем вычисления сторон ***a*** и ***b***, считая исходными стороны ***c*** и ***d*** по формулам

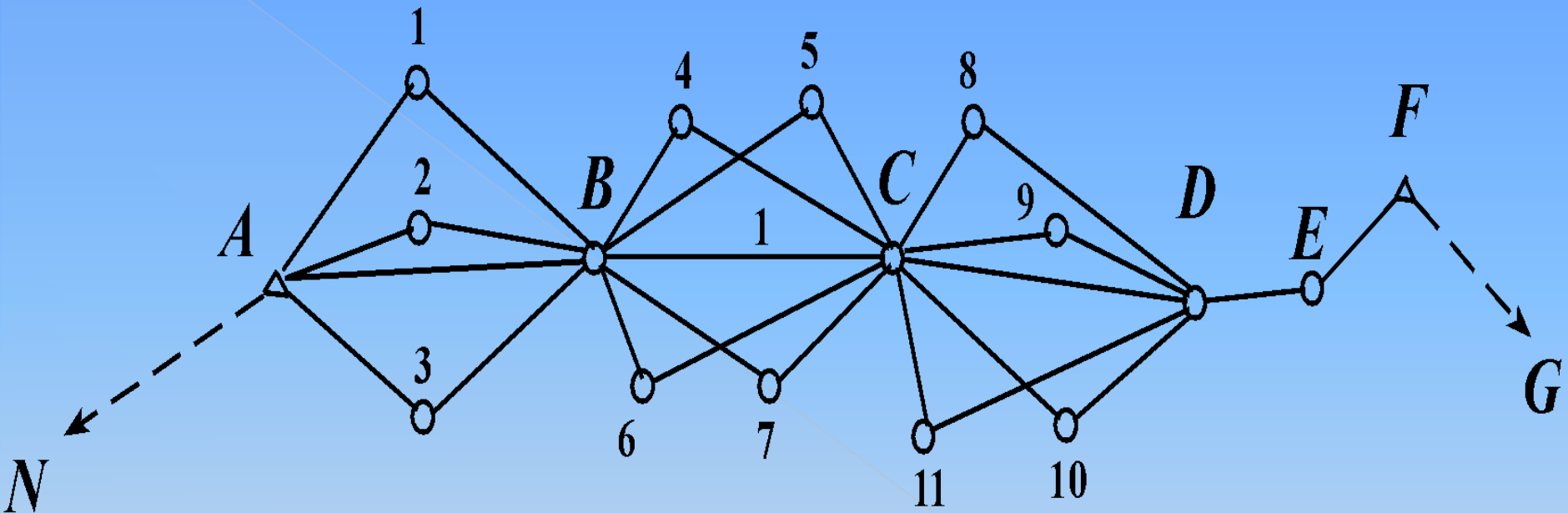
$$a = \frac{c \sin A + d \sin(C + D)}{\sin D},$$

$$b = \frac{d \sin C + c \sin(A + D)}{\sin D}.$$

4. Полярно-лучевой метод.

При наличии электронных дальномеров и тахеометров съемочное обоснование можно создавать **полярно-лучевым методом**. Схемы сетей могут быть разнообразными.

Например, между исходными пунктами **A** и **F** прокладывается основной ход **ABCDEF**.

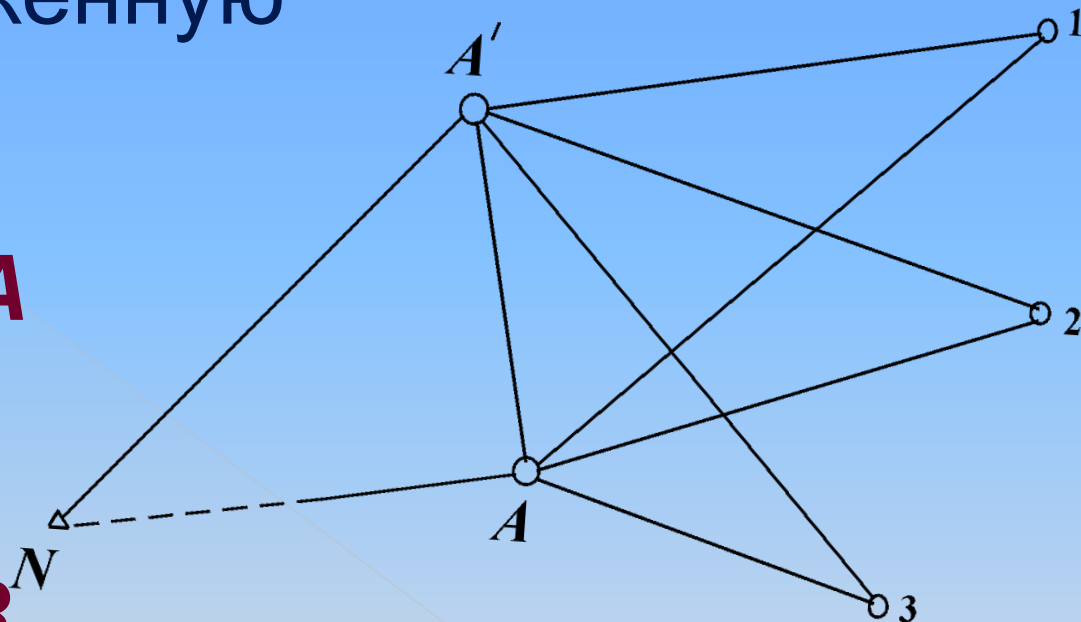


Координаты точек **1, 2, ..., 11** в целях контроля необходимо получать дважды. Поэтому их определяют полярным способом с двух станций. например, точки **1, 2, 3** определены с пунктов **A** и **B**.

Если по условиям местности этого сделать нельзя, то используют дополнительную станцию, расположенную вблизи основной.

Устанавливают прибор на пункте **A** и измеряют направления на точки **N**, **A'**, **1**, **2** и **3**.

Здесь **AN** – направление на другой исходный пункт, **A'** – дополнительная точка, расположенная на расстоянии 5–10 м от точки **A**.



Затем измеряют расстояния AA' – рулеткой, а до точек **1, 2 и 3** электронным дальномером.

Зная дирекционный угол линии AN , по измеренным направлениям вычисляют дирекционные углы линий AA' , $A1$, $A2$, $A3$, а затем и координаты этих точек.

Для контроля устанавливают прибор в точке A' и также измеряют направления и расстояния и вычисляют повторно координаты точек A , **1, 2, 3**.

Полярно-лучевой метод применим для любых условий местности, позволяет очень быстро выполнить полевые и вычислительные работы.

Спасибо за внимание!