



Лекция 9



Аппроксимация

Передаточная функция фильтра $H(p)$ в общем виде:

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}, \text{ где } n > m$$

Передаточная функция $H(p)$ ФНЧ:

$$H(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} = \frac{b_0}{(a'_0 + a'_1 p + a'_2 p^2)(a'_3 + a'_4 p^4 + a'_5 p^5) \dots}$$

Задача-нахождение полюсов $H(p)$.

Простейший ФНЧ – RC-цепочка (пассивный фильтр)

$$H(p) = \frac{b_0}{a'_0 + a'_1 p}$$

Полюс $p = -\frac{a'_0}{a'_1}$ - отрицательный и действительный.

В активных фильтрах полюсы комплексно – сопряженные.



Аппроксимация по Баттерворту: $|H(j\omega)| = \frac{b_0}{\sqrt{1 + \epsilon\Omega^{2n}}}$

Нахождение полюсов на комплексной плоскости

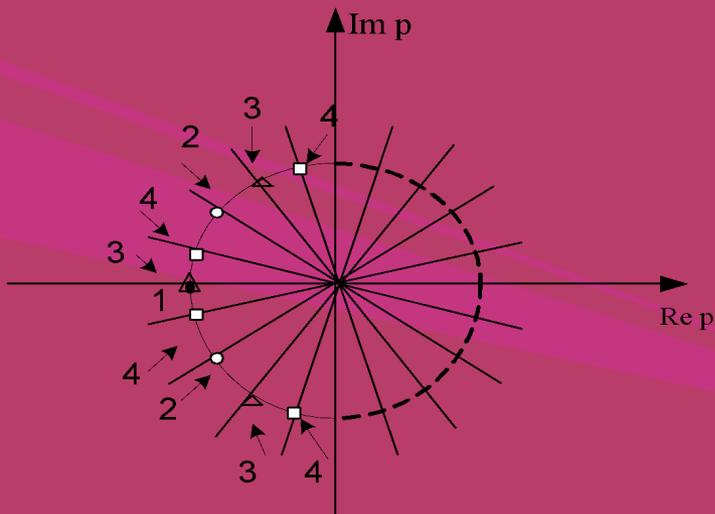


Рис.1

Угол деления в зависимости от порядка передаточной функции n

$$\varphi = \frac{360^\circ}{2n}$$

$$n = 1 \quad \varphi = 180^\circ$$

$$n = 2 \quad \varphi = 90^\circ$$

$$n = 3 \quad \varphi = 60^\circ$$

$$n = 4 \quad \varphi = 45^\circ$$

Полиномы Баттерворта

$$1) 1 + p$$

$$2) 1 + \sqrt{2}p + p^2$$

$$3) 1 + 2p + 2p^2 + p^3 = (1+p)(1+p+p^2)$$

$$4) 1 + 2,613 p + 3,414 p^2 + 2,613 p^3 + p^4 =$$

$$= (1 + 1,848 p + p^2)(1 + 0,765 p + p^2)$$

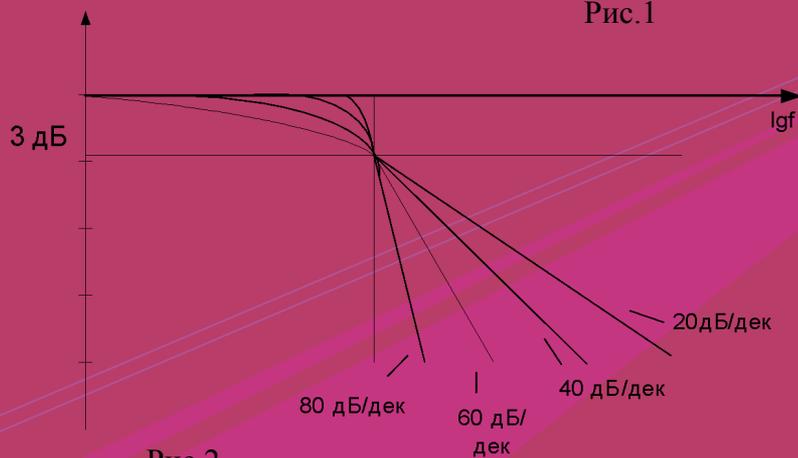


Рис.2

Аппроксимация по Чебышеву

Свойства многочлена Чебышева

$$y_1 = x$$

$$y_2 = 2x^2 - 1$$

$$y_3 = 4x^3 - 3x$$

$$y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

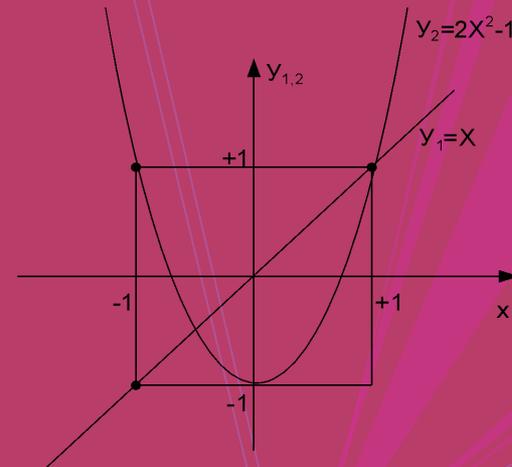


Рис.3

При $x=\pm 1$ dy/dx максимально для данного порядка x

$$y_3 = 4x^3 - 3x$$

Если $y_3=0$, то получаем $x_0=0$, $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$dy_3/dx = 12x^2 - 3$$

$$x_{3,4} = \pm 1/2$$

$$y_3(x=1/2) = -1$$

$$y_3(x=-1/2) = 1$$

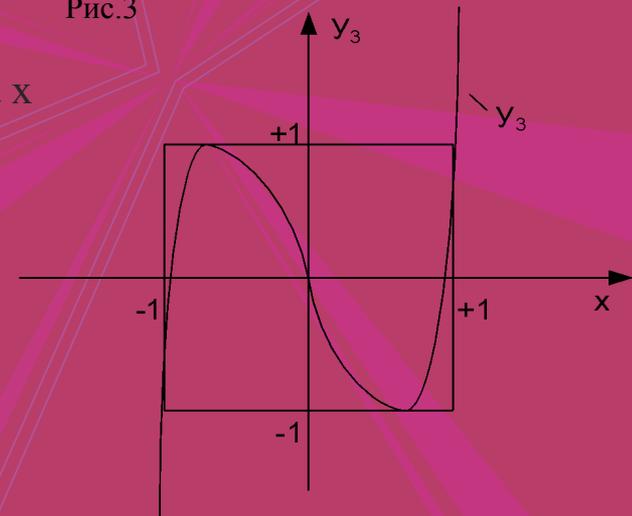


Рис.4

$$H(j\omega) = \frac{b_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2(j\omega)}}, \text{ где } T_n(j\omega) \text{ – полином Чебышева}$$



Рис.5

Расположение полюсов на комплексной плоскости (6-й порядок)

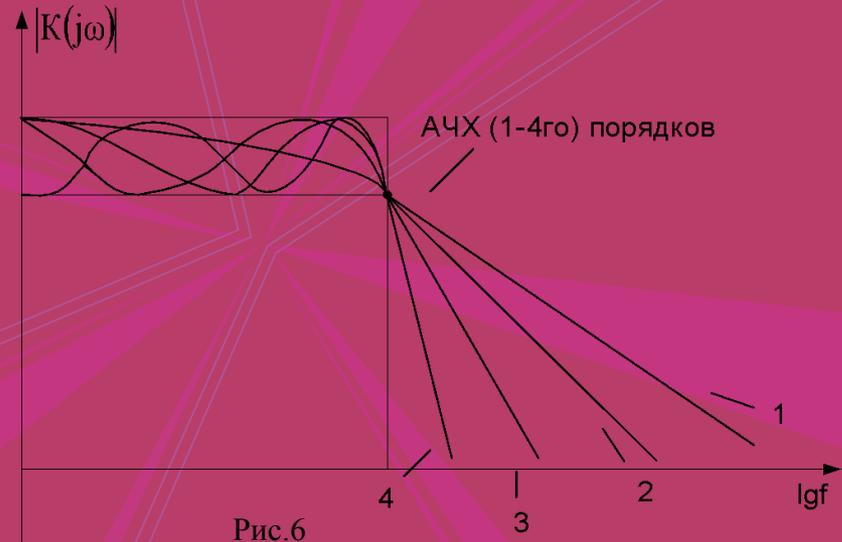


Рис.6

Правило для АЧХ при аппроксимации по Чебышеву: количество максимумов и минимумов в АЧХ соответствует порядку фильтра.

Аппроксимация по Бесселю

Фазовый сдвиг пропорционален частоте, что гарантирует отсутствие выброса в переходной характеристике.

Полиномы Бесселя

- 1) $1 + p$
- 2) $(1 + 0,756p)(1 + 0,996p + 0,4772p^2)$
- 3) $1 + 1,3397p + 0,4889p^2)(1 + 0,7743p + 0,385p^2)$

АЧХ фильтров Бесселя

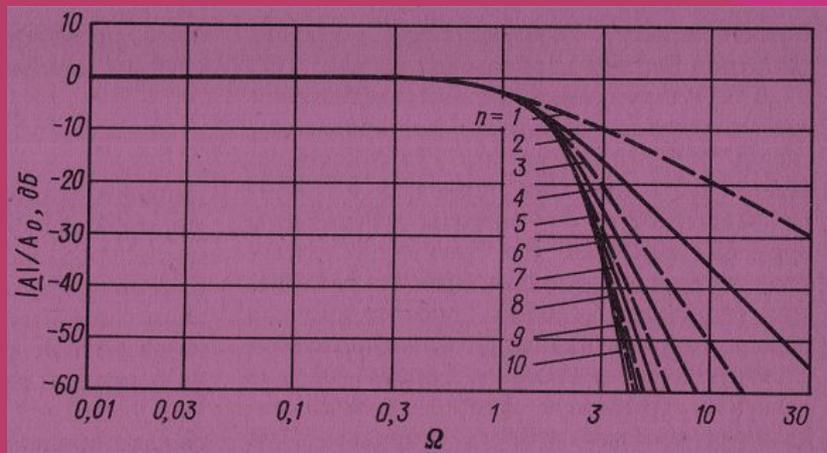
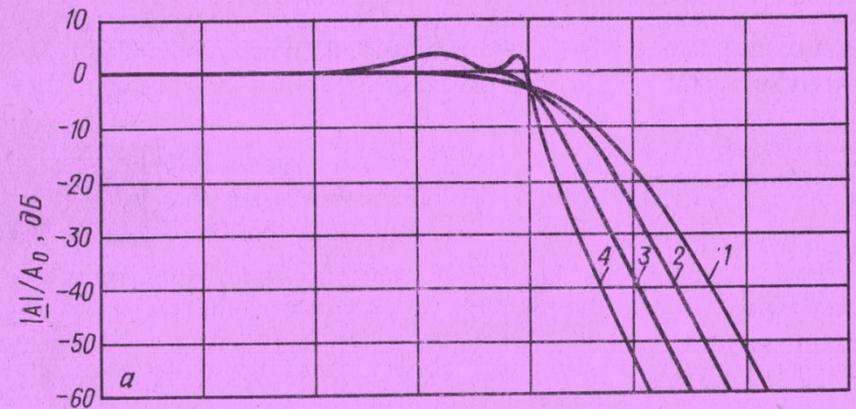


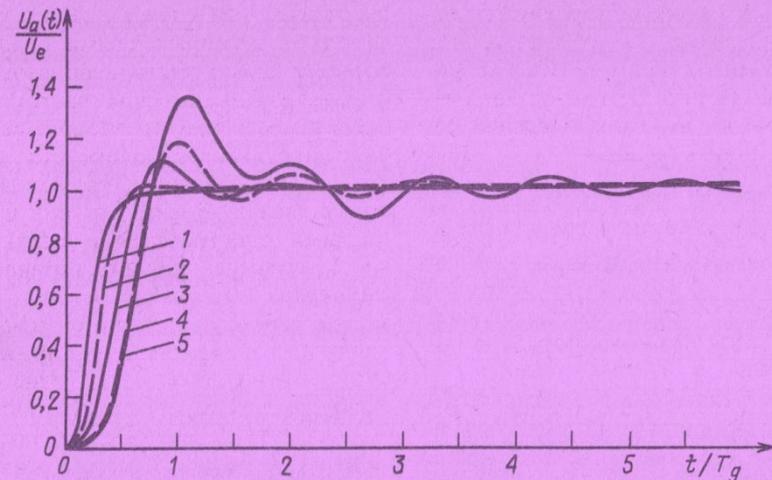
Рис.7

Сравнение различных аппроксимаций

АЧХ фильтров 4-порядка



Переходные характеристики



Преобразование частот

ФНЧ=>ФВЧ

$$H(p) = \frac{1}{1+p} - \text{ФНЧ} \quad \text{для ФВЧ } p = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \frac{s}{1+s} - \text{ФВЧ}$$

$$H(p) = \frac{1}{1+a_1p+a_2p^2} \Rightarrow H(s) = \frac{s^2}{s^2+a_1s+a_2}$$

ФНЧ=>ПФ

$$p = \frac{1}{\Delta\Omega} \left(s + \frac{1}{s} \right), H(p) = \frac{1}{1+p} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Delta\Omega} \left(s + \frac{1}{s} \right)} = \frac{\Delta\Omega s}{1 + \Delta\Omega s + s^2}$$

ФНЧ=>РФ

$$p = \frac{\Delta\Omega}{s + \frac{1}{s}}, H(p) = \frac{1}{1+p} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\Omega}{s + \frac{1}{s}}} = \frac{1+s^2}{1 + \Delta\Omega s + s^2}$$