Решение нелинейных уравнений

Часть 2

Метод деления отрезка пополам

- (Метод дихотомии, метод бисекции)

Известно, что корень находится на отрезке $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$

Т.е. $x^* \in [a;b]$ и $\boldsymbol{f(x^*)=0}$

$$\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$$

$$c=\frac{a+b}{2}$$

$f(c)$

$f(c)<0$

$f(c)>0$

$f(c)=0$

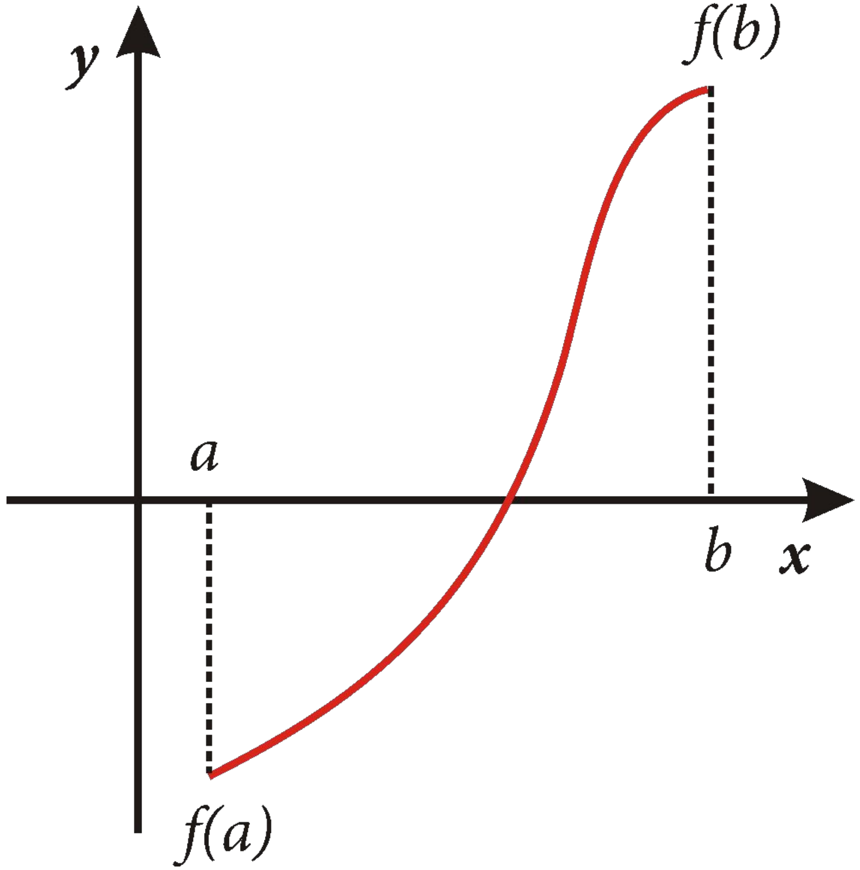
$f(a)f(c)<0$

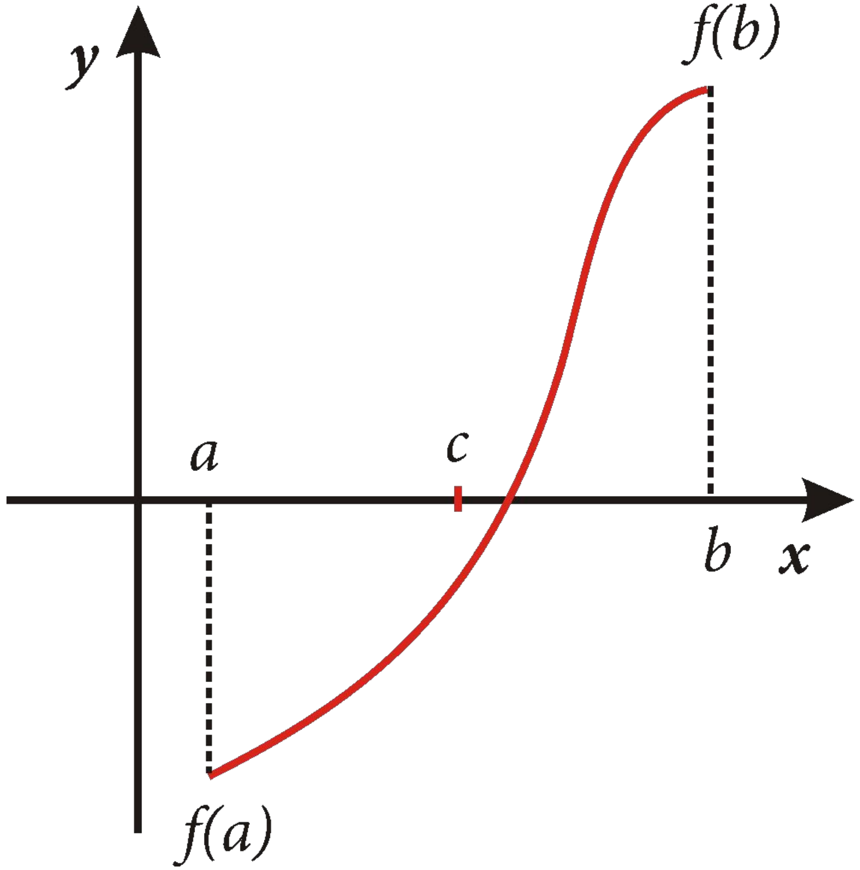
$f(c)f(b)<0$

c

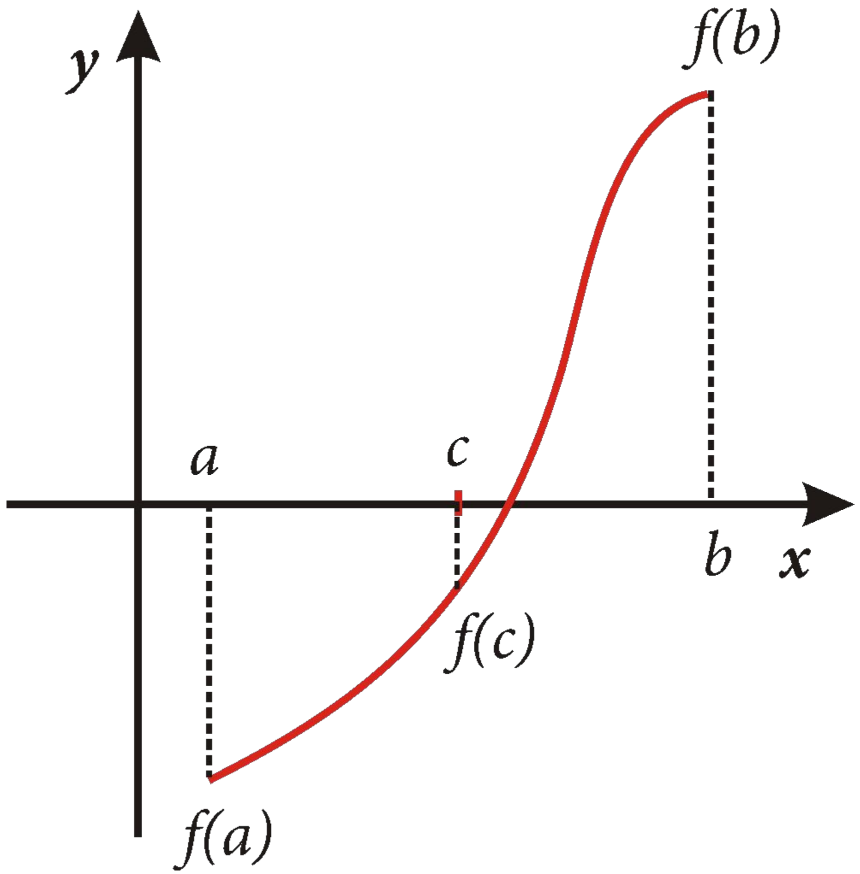
$c=b$

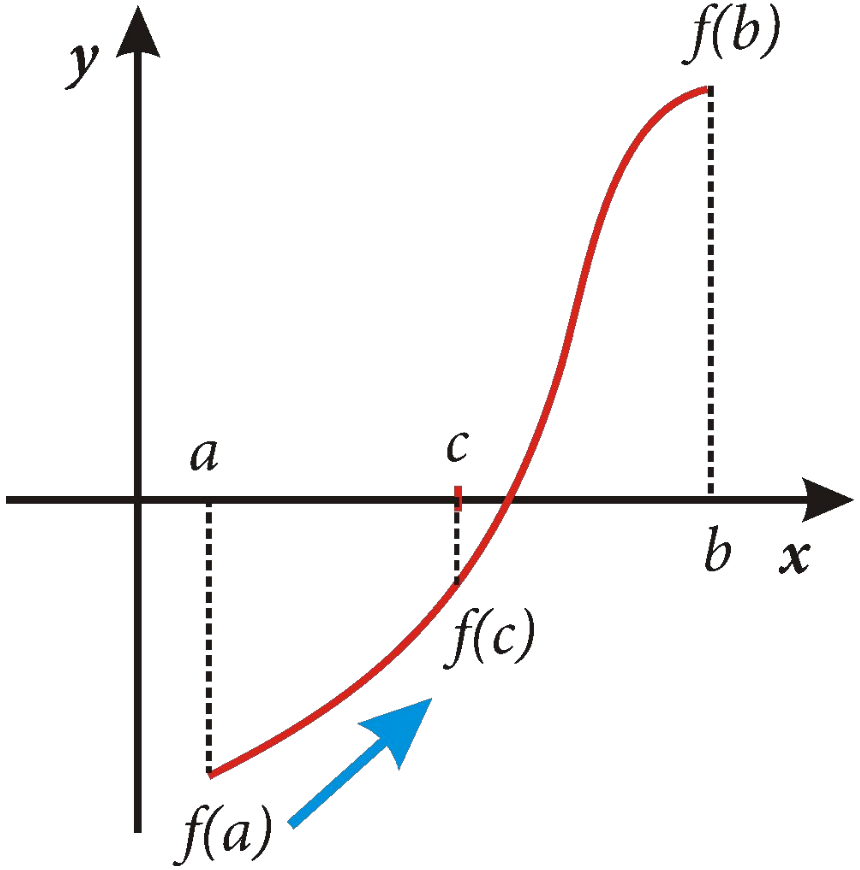
$c=a$


y
f(b)
a
b
x
f(a)

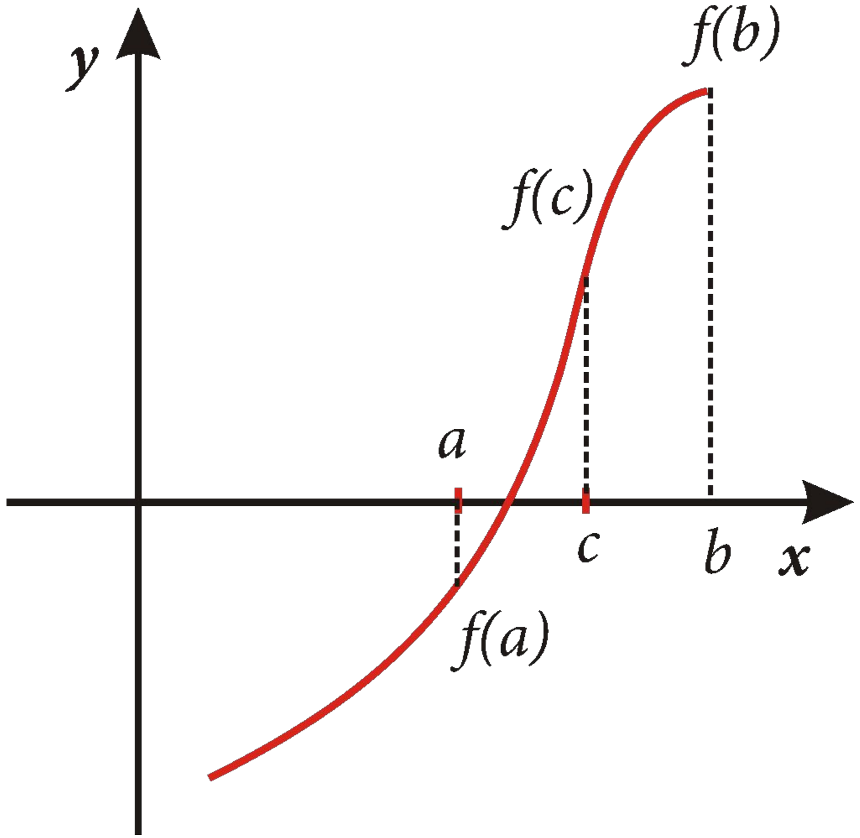


y
f(b)
a
c
b
x
f(a)


y
f(b)
a
c
b
x
f(c)
f(a)



y
f(b)
a
c
b
x
f(c)
f(a)



y
f(b)
f(c)
a
c
b
x
f(a)

Условия окончания вычислений

- Для того чтобы найти приближенное значение корня с точностью до $\varepsilon > 0$, необходимо остановить процесс половинного деления на таком шаге n, на котором отрезок $[a;b]$ будет иметь длину

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \leq 2\varepsilon$$

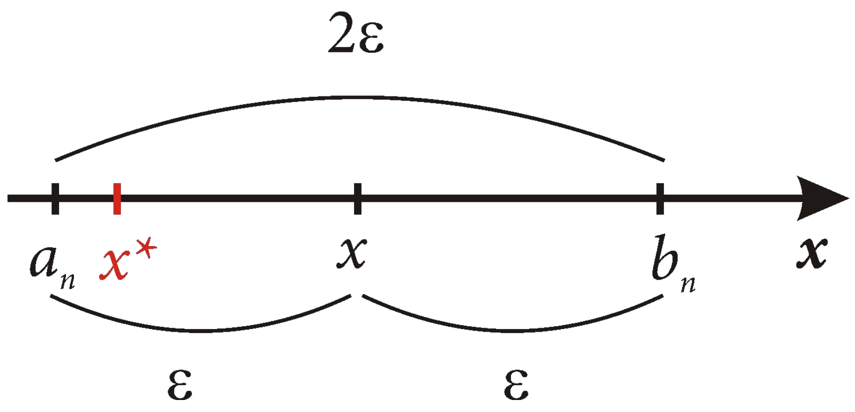
- И вычислить

$$x = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- Тогда

$$x^* \approx x$$

$$|x^* - x| \le \varepsilon$$



Пример

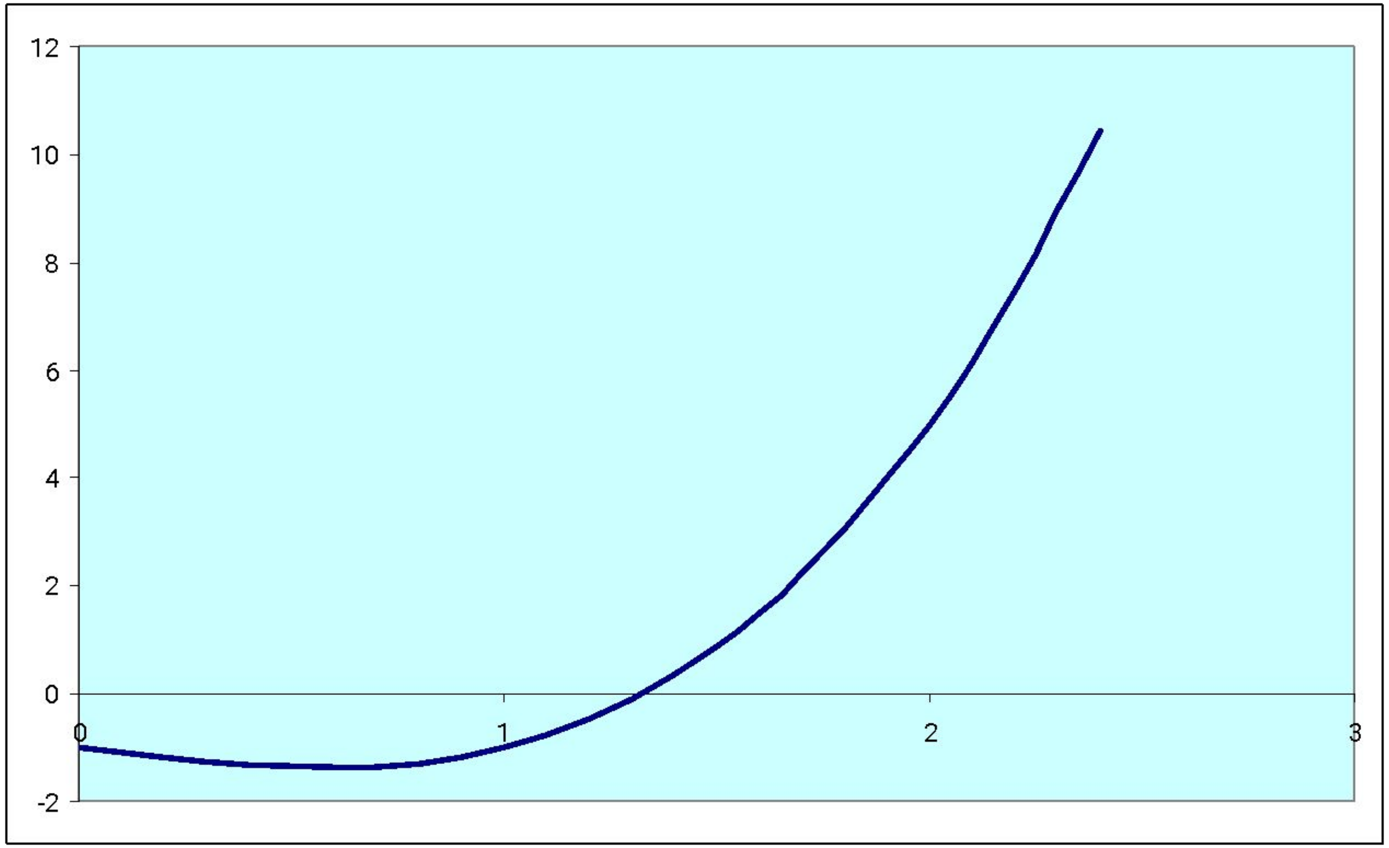
- Дано уравнение

$$x^3 - x - 1 = 0$$

- Необходимо найти корень уравнения с точностью

$$\varepsilon \leq 0{,}005$$

Графическое отделение корней



- Единственный корень уравнения расположен на отрезке *[1; 2]*

- Для уточнения корня уравнения можно применить метод половинного деления, поскольку функция непрерывна на этом отрезке и на его концах принимает разные знаки:

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

$$f(1) = -1 < 0;$$

$$f(2) = 5 > 0$$

Найдем середину $c=1,5$ отрезка $[1;\ 2]$

Вычислим значение функции в этой точке

$$f(1,5) = 0,875$$

Значит, число $1,5$ не является точным корнем уравнения.

Далее проверяем:

$$f(1)f(1,5) < 0$$

$$f(1,5)f(2) > 0$$

Следовательно корень уравнения находится на отрезке $[1;\ 1,5]$

- Делим полученный отрезок точкой $c_1 = 1{,}25$ и находим $f(1{,}25) \approx -0{,}3$
- Необходимая точность вычисления не достигнута. Проверяем дальше:

$$f(1)f(1{,}25) > 0$$

$$f(1{,}25)f(1{,}5) < 0$$

- Следовательно корень уравнения находится на отрезке *[1,25; 1,5]*.
- И так продолжается до достижения необходимой точности двух верных цифр после запятой.

Метод простых итераций

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x}{\sin x} - 0{,}5 = 0 \Rightarrow x = 0{,}5 \sin x$$

$$x = \varphi(x)$$

$$x_0$$

Расчетная формула
метода простых итераций

$$\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n)}$$

При n→∞

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$x^* = \varphi(x^*)$$

Корень уравнения

Теорема

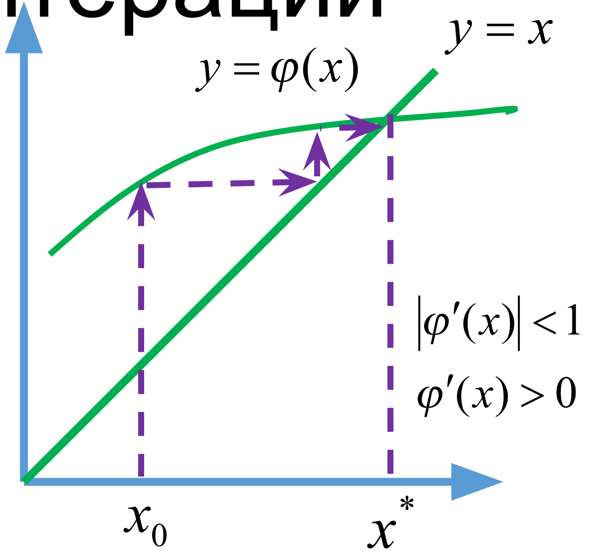
- Если в интервале, содержащем корень x^* уравнения $x=\phi(x)$, а также его последовательные приближения $x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots$ вычисляемые по формуле $x_{n+1}=\phi(x_n)$, выполнено условие:

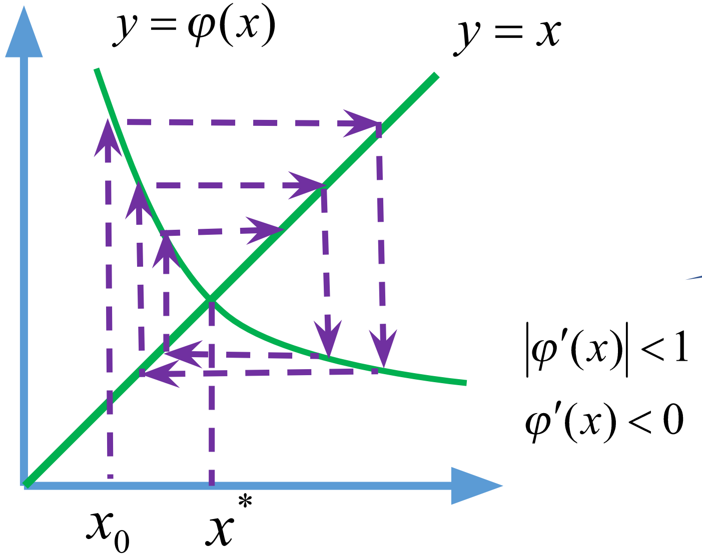
$$\phi'(x) \le q < 1$$

то $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ т.е. итерационный процесс сходится и справедлива следующая оценка сходимости:

$$\left|x_n - x^*\right| \le q^n \left|x_0 - x^*\right|$$

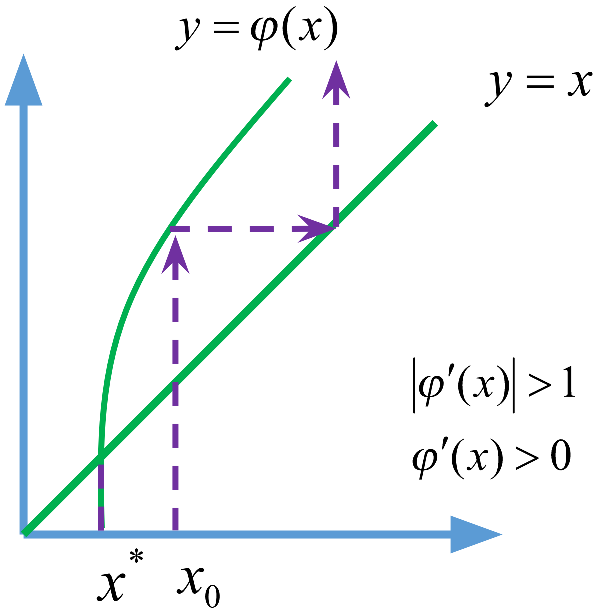
Графическая интерпретация метода простых итераций

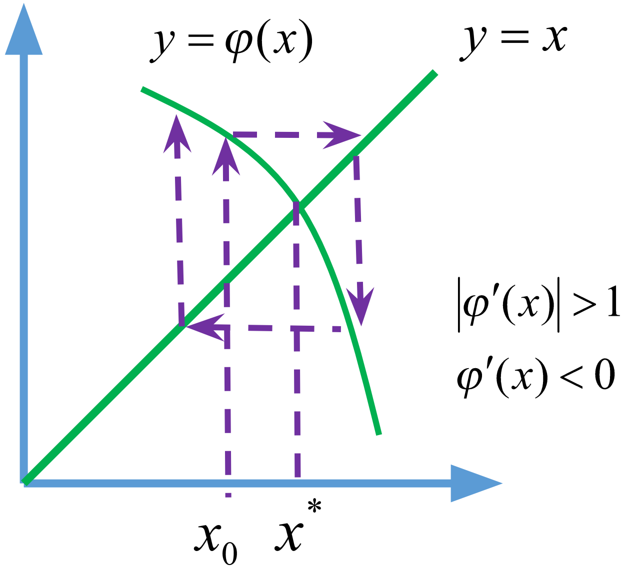




Итерационный процесс сходится

Итерационный процесс расходится





Метод Ньютона (касательных)